PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LVI – ZESZYT 3-4 – 2009

ANDRZEJ STRYJEK

ZASTOSOWANIE MIAR ZALEŻNOŚCI ZMIENNYCH LOSOWYCH ORAZ KOPULI CLAYTONA I GUMBEL-HOUGAARDA DO SZACOWANIA WARTOŚCI ZAGROŻONEJ[1]

Od początku lat dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku istotną rolę w ocenie ryzyka finansowego odgrywa wartość zagrożona (Value at Risk – VaR). Regulacje prawne w Polsce nakładają na instytucje finansowe obowiązek stosowania tej miary w celu bieżącej oceny poziomu ryzyka portfela, lecz jednocześnie pozostawiają dużą dowolność w wyborze algorytmu estymacji. Stale prowadzone są badania nad różnymi metodami szacowania wartości zagrożonej. Bieżący artykuł ma na celu zaprezentowanie możliwości, jakie daje zastosowanie kopuli do wyznaczania wartości VaR oraz porównanie tej metody z innymi, bardziej znanymi.

Kopula jest pojęciem mocno osadzonym w teorii statystyki. W ostatnich latach pojęcie to przeżywa swój renesans z powodu licznych prób zastosowania do modelowania zależności zmiennych opisujących szeregi finansowe. Zagadnienie szacowania wartości zagrożonej za pomocą kopuli pojawia się w pracach [2] i [5].

W opracowaniu oprócz omówienia pojęcia wartości zagrożonej oraz funkcji powiązań (kopuli) autor prezentuje własną, nową metodę szacowania VaR za pomocą kopuli Claytona oraz kopuli Gumbel-Hougaarda, a także wyniki badania empirycznego ilustrującego efektywność różnych metod wyznaczania VaR za pomocą kopuli.

1. WARTOŚĆ ZAGROŻONA

Wartość zagrożona VaR jest definiowana jako maksymalna możliwa strata wartości rynkowej portfela, której przekroczenie w rozpatrywanym horyzoncie czasowym inwestycji może nastąpić z zadanym, niewielkim prawdopodobieństwem $\alpha \in (0, 1)$ zwanym poziomem tolerancji. Decyzja o długości okresu na jaki wyznacza się VaR oraz poziomie tolerancji α jest w gestii podmiotu dokonującego inwestycji. Uściślając, wartość zagrożona jest określona jako liczba $VaR_\alpha(X)$, która spełnia warunek

$$VaR_\alpha(X) = -\sup\{x \in \mathbb{R}: P(X \leq x) \leq \alpha\},$$

[1] Opracowanie jest kontynuacją badań przeprowadzonych w badaniu statutowym nr 03/S/0015/07 w Instytucie Ekonometrii Szkoły Głównej Handlowej w Warszawie (zob. [6]).

gdzie parametr $\alpha \in (0, 1)$ oznacza poziom tolerancji, natomiast X jest zmienną losową opisującą potencjalne zyski i straty, które może wygenerować rozpatrywany portfel. Zmienna ta nazywana jest zmienną zysków i strat lub zmienną P&L[2].

Ponieważ $VaR_\alpha (X)$ jest górnym kwantylem rozkładu zmiennej P&L, więc w przypadku modelowania zmiennej X za pomocą ciągłego rozkładu prawdopodobieństwa, wartość $VaR_\alpha (X)$ jest α-kwantylem tego rozkładu. Można zatem zapisać, że $VaR_\alpha (X) = -F^{-1} (\alpha)$, przy czym F jest dystrybuantą zmiennej X.

Przy założeniu, że X jest zmienną o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa ze średnią $\mu \in R$ oraz odchyleniem standardowym $\sigma > 0$ otrzymujemy

$$VaR_\alpha (X) = -\phi_{\mu,\sigma}^{-1} (\alpha) = -\mu - \phi^{-1} (\alpha) \cdot \sigma,$$

gdzie $\phi_{\mu,\sigma}$ jest dystrybuantą wspomnianego rozkładu normalnego oraz $\phi = \phi_{0,1}$.

W praktyce działania instytucji finansowej pojawia się zagadnienie szacowania wartości zagrożonej dla portfela instrumentów finansowych. Przyjęcie założenia, że zmienne P&L poszczególnych instrumentów wchodzących w skład portfela mają rozkład normalny upraszcza proces wyznaczenia wartości VaR dla portfela. W takim przypadku portfel złożony z k inwestycji, które opisane są zmiennymi X_i dla $i = 1, 2, \ldots, k$ oraz proporcjach składników portfela $\varphi_i \geq 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$, gdzie $\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k = 1$ jest określony przez zmienną zysków i strat $X_{P\&L}$. Rozkład tej zmiennej jest także rozkładem normalnym. Wartość zagrożona dla portfela wynosi

$$VaR_\alpha (X_{P\&L}) = -\sum_{i=1}^{k} \varphi_i \cdot \mu_i - \phi^{-1} (\alpha) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(\varphi_i^2 \cdot \sigma_i^2\right) + 2\sum_{i<j} (\varphi_i \cdot \varphi_j \cdot \sigma_{ij})},$$

gdzie

μ_i – wartość oczekiwana zmiennej X_i,
σ_i^2 – wariancja zmiennej X_i,
σ_{ij} – kowariancja zmiennych X_i, X_j dla $i \neq j$.

Szacowanie wartości zagrożonej za pomocą powyższego wzoru, w literaturze przedmiotu, nosi nazwę metody kowariancji. Metoda ta jest prosta w zastosowaniu, lecz założenie o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa zmiennej P&L często stanowi nadmierne uproszczenie. Drugą metodą szacowania VaR jest metoda historyczna. Polega na uszeregowaniu historycznych realizacji zmiennej X, a następnie odczytaniu empirycznego kwantyla rzędu α. Metoda ta jest nieparametryczna i nie wymaga przyjmowania żadnych założeń o rozkładzie prawdopodobieństwa zmiennej zysków i strat. Niestety, dużą jej wadą jest fakt, że do przewidywania kształtowania się możliwych zmian wartości portfela korzysta się tylko z danych historycznych i często przy jej zastosowaniu nie jest spełniony warunek dywersyfikacji ryzyka (por. [8]). Wreszcie trzecią metodą szacowania VaR jest symulacja Monte Carlo. Polega na wielokrotnym wygenerowaniu obserwacji z rozkładu zmiennej X i wyznaczeniu za każdym razem kwantyla rzędu α. Ostatecznie za ocenę wartości VaR przyjmuje się średnią z otrzyma-

[2] Niektórzy autorzy (patrz [3] oraz [5]) zamiast zmiennej P&L posługują się równoważnie stopą zwrotu inwestycji R_t.

nych kwantyli we wszystkich iteracjach. Alternatywnie, zamiast generować dużą liczbę próbek, można wygenerować jedną, dużą próbę z zadanego rozkładu i odczytać VaR jako odpowiedni kwantyl. Tu w obliczaniu wartości zagrożonej znajdują zastosowanie także inne rozkłady niż rozkład normalny np. t-studenta, GED, rozkłady α-stabilne, mieszane rozkłady normalne.

Wyboru metody obliczania wartości zagrożonej dokonuje się na podstawie porównania w wybranym okresie wszystkich wyznaczonych wartości VaR z rzeczywistymi zmianami wartości inwestycji. Są to tzw. testy wsteczne. Najprostsza możliwość to wyznaczenie udziału przekroczeń rzeczywistej zmiany wartości portfela ponad wyznaczone wartości VaR w całej próbie testowej. Udział ten nie powinien przekraczać przyjętego poziomu α. Drugim sposobem jest zastosowanie testu Kupca (1995). Hipoteza zerowa tego testu o poprawności metody szacowania VaR jest weryfikowana za pomocą statystyki:

$$LR_{uc} = -2\ln\left((1-\alpha)^{T-N}\alpha^{N}\right) + 2\ln\left(\left(1-\frac{N}{T}\right)^{T-N}\left(\frac{N}{T}\right)^{N}\right),$$

gdzie

α – jest przyjętym poziomem tolerancji w testowanym modelu,
T – oznacza długość próby testowej,
N – liczbę zaobserwowanych przekroczeń w tej próbie.

Statystyka LR_{uc} ma asymptotyczny rozkład χ^2 z jednym stopniem swobody. Odrzucenie hipotezy zerowej przy poziomie istotności testu wynoszącym 0,05 następuje, gdy wartość statystyki przekracza 3,84.

2. KOPULA

W ostatnich latach dzięki wykorzystaniu mocy obliczeń komputerowych pojęcie kopuli próbuje się coraz częściej stosować do modelowania zależności zmiennych opisujących rynki finansowe.

Kopula jest to funkcja $\mathsf{C}: I^n \to \mathbb{R}$, gdzie $I = [0, 1]$, $n \geq 2$, która spełnia następujące warunki:

i. $\mathsf{C}(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, 0, u_{k+1}, \ldots, u_n) = 0$ dla dowolnych $u_i \in [0, 1]$ oraz $i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$,

ii. $\mathsf{C}(1, \ldots, 1, u_i, 1, \ldots, 1) = u_i$ dla dowolnego $u_i \in [0, 1]$ oraz $i = 1, 2, \ldots, n$,

iii. $V_{\mathsf{C}}([\mathbf{u}, \mathbf{v}]) = \sum_w sgn(\mathbf{w})\mathsf{C}(\mathbf{w}) \geq 0$,

gdzie:

$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = [u_1, v_1] \times \ldots \times [u_n, v_n]$, przy czym $u_i \leq v_i$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,
$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in I^n$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in I^n$,
sumowanie przebiega po wszystkich wierzchołkach $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ n-wymiarowej kostki $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$,

$$sgn(\mathbf{w}) = \begin{cases} +1, \text{ jeżeli } w_k = u_k \text{ dla parzystej liczby współrzędnych,} \\ -1, \text{ jeżeli } w_k = u_k \text{ dla nieparzystej liczby współrzędnych.} \end{cases}$$

W klasie rozkładów eliptycznych standardową miarą zależności zmiennych losowych jest współczynnik korelacji liniowej Pearsona. Dla zmiennych spoza tej klasy pomiar stopnia zależności za pomocą tego współczynnika może prowadzić do błędnych wniosków.

Pojęcie kopuli jest stosowane do ustalania stopnia zależności między zmiennymi losowymi o dowolnych rozkładach. Co więcej, dla dowolnych ściśle rosnących funkcji f i g, jeżeli zmiennym X i Y odpowiada kopula C, to zmiennym $f(X)$ oraz $g(Y)$ także odpowiada kopula C. W przypadku zastosowania współczynnika Pearsona taka własność zachodzi tylko dla rosnących funkcji liniowych.

Bezpośrednią możliwość wykorzystania kopuli do modelowania zmiennych na rynkach finansowych stworzył A. Sklar formułując następującą własność[3]:

Niech funkcje $F_1(x)$ oraz $F_2(y)$ będą dystrybuantami jednowymiarowych zmiennych losowych X i Y. Dla dowolnych $(x, y) \in \bar{\mathbb{R}}^2$ zachodzi[4]:

– jeżeli funkcja C jest kopulą, to $\mathsf{C}(F_1(x), F_2(y))$ jest dystrybuantą łącznego rozkładu wektora (X, Y) o rozkładach brzegowych danych dystrybuantami $F_1(x)$ oraz $F_2(y)$,

– jeżeli $F(x, y)$ jest dystrybuantą łącznego rozkładu wektora (X, Y) o rozkładach brzegowych zadanych dystrybuantami $F_1(x)$ oraz $F_2(y)$, to istnieje dokładnie jedna kopula C taka, że $F(x, y) = \mathsf{C}(F_1(x), F_2(y))$.

Z twierdzenia Sklara wynikają liczne zastosowania kopuli. Po pierwsze, znając rozkłady brzegowe i łączny rozkład prawdopodobieństwa wektora zmiennych losowych można dopasować odpowiednią kopulę. Wyznaczona kopula może być zastosowana do wyznaczania miar zależności między zmiennymi np. współczynnika korelacji liniowej Pearsona, τ Kendalla, ρ_S Spearmana.

Po drugie, kopula umożliwia dokonanie symulacji łącznego rozkładu prawdopodobieństwa wektora zmiennych przy zadanych rozkładach brzegowych. Oczywiście, w praktycznych zagadnieniach etap symulacji musi być poprzedzony oszacowaniem nieznanych parametrów kopuli na podstawie danych empirycznych.

Najczęściej stosowaną metodą estymacji parametrów kopuli jest estymacja metodą największej wiarygodności. Do zastosowania tej metody niezbędna jest znajomość parametrów rozkładów brzegowych, co w praktyce oznacza konieczność dokonania ich estymacji innymi metodami. Dlatego też w literaturze funkcjonuje inny sposób estymacji parametrów kopuli tzw. wnioskowanie dla rozkładów brzegowych. Ta metoda oparta jest na spostrzeżeniu, że w zlogarytmowanej funkcji wiarygodności występują dwa składniki, przy czym jeden zawiera tylko parametry rozkładów brzegowych, a drugi zawiera dodatkowo także parametry kopuli. Estymacja odbywa się wówczas w dwóch krokach. W pierwszym szacuje się parametry rozkładów brzegowych poprzez ich dobór tak, aby maksymalizować pierwszy składnik. W drugim kroku dokonuje się doboru parametrów kopuli, aby zmaksymalizować drugi składnik przy wyznaczonych estyma-

[3] Sklar A. (1959), *Fonctions de repartition a n dimensions et leurs margers,* Pub. Inst. Statist. Univ. Paris, 8, 229-231.

[4] $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

torach z pierwszego kroku. Obie procedury są w praktyce czasochłonne. W przypadku kopuli zależnej od jednego parametru można podać prostszy sposób estymacji tego parametru. Polega na wyznaczeniu oszacowania współczynnika τ Kendalla (lub ρ_S Spearmana) na podstawie danych. W dalszym ciągu procedury wyznaczenie oszacowania parametru kopuli sprowadza się do rozwiązania nieskomplikowanego równania (por. [2], [4]).

Wiele przykładów kopuli jest zawartych w literaturze przedmiotu (zob. [3]). W badaniu empirycznym, którego wyniki są zaprezentowane w dalszej części artykułu, wykorzystano trzy funkcje powiązań:

(1) Kopula Gaussa

$$C(u,v;\theta) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \exp\left(\frac{-(s^2 - 2\theta \cdot st + t^2)}{2(1-\theta^2)}\right) ds\, dt,$$

gdzie ϕ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego oraz $\theta \in [-1, 1]$.

(2) Kopula Claytona

$$C(u,v;\theta) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{\frac{1}{\theta}}, \theta \in (0, +\infty)$$

(3) Kopula Gumbel-Hougaarda

$$C(u,v;\theta) = \exp\left(-\left((-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right), \theta \in (0, +\infty).$$

Wybór tych funkcji jest arbitralną decyzją autora. Po części wynikał z faktu, że stanowią one jednoparametrowe rodziny funkcji, co w przypadku estymacji parametrów jest zagadnieniem istotnie prostszym niż dla kopuli o większej liczbie parametrów. W przypadku kopuli Claytona i Gumbel-Hougaarda zaletą jest też nieskomplikowana postać analityczna. Pozostaje nadal otwartym pytanie o to, w jaki sposób spośród szerokiego spektrum funkcji powiązań dokonywać wyboru odpowiedniej kopuli do badanego zagadnienia.

3. OPIS ZASTOSOWANYCH PROCEDUR

Szczegółowy opis badania empirycznego zawarty jest w następnym punkcie artykułu. Bieżący punkt jest poświęcony zaprezentowaniu procedur, które zostały użyte przez autora we wspomnianej analizie empirycznej.

Wektory $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oraz $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ oznaczają dzienne zmiany wartości, odpowiednio, dwóch instrumentów finansowych obserwowanych w tym samym okresie. Na podstawie wartości zawartych w wektorach $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ dokonano oszacowania wartości zagrożonej $VaR_\alpha\,(\beta \cdot X + (1-\beta) \cdot Y)$ gdzie β = 0,1; 0,2; …; 0,9, następującymi metodami: klasyczną metodą kowariancji, dwiema modyfikacjami tej metody, metodą symulacji Monte Carlo oraz symulacji z zastosowaniem kopuli Claytona i Gumbel-Hougaarda.

Estymacja metodą kowariancji była przeprowadzona zgodnie ze wzorem (1). Łatwo zauważyć, że formuła (1) może zostać zapisana w postaci

$$VaR_{\alpha}(X_{P\&L}) = -\sum_{i=1}^{k}\varphi_i \cdot \mu_i - \phi^{-1}(\alpha) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(\varphi_i^2 \cdot \sigma_i^2\right) + 2\sum_{i<j}(\varphi_i \cdot \varphi_j \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{ij})},$$

gdzie ρ_{ij} oznacza współczynnik korelacji między zmiennymi X_i oraz X_j.

Modyfikacja tej metody, dokonana przez autora, polegała na zastąpieniu współczynnika korelacji liniowej $\rho_{\mathbf{XY}}$ przez współczynnik τ Kendalla lub ρ_S Spearmana. Przypomnijmy, że

$$\hat{\tau}_{\mathbf{XY}} = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j} sgn((x_i - x_j) \cdot (y_i - y_j)) \tag{2}$$

oraz

$$\hat{\rho}_s = 1 - 6 \cdot \frac{(r_i - s_i)^2}{n(n^2-1)},$$

gdzie r_i jest rangą obserwacji x_i, a s_i rangą obserwacji y_i.

Procedura jednej iteracji w symulacji Monte Carlo dla rozkładu normalnego została przeprowadzona w następujących etapach:

1. wyznaczenie macierzy kowariancji C dla wektorów $\beta \cdot \mathbf{X}$ i $(1-\beta) \cdot \mathbf{Y}$,

2. dekompozycja Choleskiego macierzy C do postaci $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą trójkątną dolnie,

3. wygenerowanie dwóch szeregów obserwacji $\mathbf{Z}_X$ oraz $\mathbf{Z}_Y$ – obu ze standardowego rozkładu normalnego,

4. dokonanie transformacji $\mathbf{S} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}_\mathbf{X}$ oraz $\mathbf{T} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}_\mathbf{Y}$,

5. wektor $(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ ma rozkład normalny o macierzy kowariancji C. Szereg symulowanych wartości dziennych zmian portfela to wektor $\mathbf{T} + \mathbf{S}$, zatem wartość zagrożona $VaR_\alpha(\beta \cdot \mathbf{X} + (1-\beta) \cdot \mathbf{Y})$ jest odpowiednim kwantylem w jego rozkładzie empirycznym.

W procedurze wyznaczania wartości zagrożonej za pomocą kopuli Claytona i Gumbel-Hougaarda można wyróżnić dwa etapy.

Pierwszy etap dotyczy oszacowania parametru kopuli. Kopule Claytona i Gumbel-Hougaarda należą do grupy kopuli archimedesowych, których postać funkcyjna jest zależna od jednego parametru θ. Estymacja tego parametru polegała na wyznaczeniu w pierwszej kolejności oszacowania współczynnika τ Kendalla na podstawie wzoru (2). Ponieważ dla obu kopuli współczynnik τ Kendalla wyraża się za pomocą parametru kopuli tzn. dla kopuli Claytona

$$\tau = \frac{\theta}{\theta+2}, \theta \in (0, +\infty),$$

kopuli Gumbel-Hougaarda zaś

$$\tau = \frac{\theta - 1}{\theta}, \theta \in (0, +\infty),$$

więc estymator $\hat{\theta}$ obliczano jako rozwiązanie odpowiedniego równania. Taki sposób estymacji pojawia się w [3] i [4].

Drugi etap procedury szacowania wartości zagrożonej za pomocą kopuli Claytona i Gumbel-Hougaarda polegał na generowaniu dwóch szeregów wartości z rozkładu o oszacowanej kopule. Na tym etapie posłużono się algorytmem opisanym w pracy [4]:

1. wygenerowanie niezależnie z rozkładu jednostajnego na odcinku [0, 1] pary liczb (q, s),

2. wyznaczenie wartości $t = K_C^{-1}(q)$, gdzie $K_C(q) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}$, φ jest generatorem kopuli[5], a K_C^{-1} jest funkcją odwrotną w uogólnionym sensie[6],

3. przyjęcie $u = \varphi^{-1}(s \cdot \varphi(t))$ oraz $v = \varphi^{-1}((1-s) \cdot \varphi(t))$,

4. para (u, v) stanowi element szukanej próby.

Wielokrotne zastosowanie tego algorytmu generuje dwa szeregi wartości z rozkładu o zadanej kopule. Są to wartości dystrybuant rozkładów brzegowych. W celu otrzymania dwóch szeregów symulujących zmiany wartości składników portfela dokonano jeszcze transformacji tych szeregów za pomocą uogólnionej odwrotności dystrybuanty empirycznej odpowiedniego rozkładu brzegowego[7] zmiennej P&L. W ten sposób nie było konieczności przyjmowania założenia o rozkładzie zmiennej zysków i strat poszczególnych składników portfela. Jest to nowe podejście, odbiegające od prezentowanych w literaturze metod symulacji zmian wartości portfela za pomocą kopuli.

4. OPIS I WYNIKI BADANIA EMPIRYCZNEGO

Opisane w tym punkcie badanie empiryczne ma na celu zaprezentowanie możliwości zastosowania kopuli do szacowania wartości zagrożonej. W analizie dokonano empirycznego porównania efektywności znanych z literatury i zaproponowanych przez autora różnych metod szacowania wartości VaR z podstawową metodą estymacji wartości zagrożonej, tj. metodą kowariancji.

Badanie empiryczne zostało przeprowadzone dla trzech szeregów dziennych zmian wartości akcji wybranych spółek, które były notowane na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Były to spółki wchodzące w skład indeksu mWIG40 (dawniej MIDWIG). Indeks mWIG40 obejmuje średnie spółki notowane na giełdzie, a zatem nie są one instrumentami o największej płynności (WIG20) ani największej zmienności (sWIG80). Indeks ten jest notowany od 31 grudnia 1997 r., co umożliwiło

---

[5] Generatorem kopuli Claytona jest funkcja $\varphi(t) = \frac{t^{-\alpha} - 1}{\alpha}$, a kopuli Gumbel-Hougaarda $\varphi(t) = (-\ln(t))^{\alpha}$.

[6] $K_C^{-1}(y) = \inf\{x: K_C(x) \geq y\}$.

[7] $F^{-1}(y) = \inf\{x: F(x) \geq y\}$.

wybranie szeregów danych odpowiednich pod względem liczby obserwacji i trendu. Z drugiej strony skład indeksu zmieniany jest co kwartał (w marcu, czerwcu, wrześniu i grudniu). Zatem do badania empirycznego wybrane zostało dziesięć spółek w trzech okresach: od 24 maja 2000 do 11 października 2002, od 30 listopada 2004 do 18 kwietnia 2007 oraz od 2 grudnia 2005 do 24 kwietnia 2008, które praktycznie przez cały podany okres były obecne w indeksie mWIG40. W przypadku trzeciego z wymienionych okresów takich spółek było więcej, lecz dla zachowania spójności procedur numerycznych i porównywalności otrzymanych wyników, do badania wylosowano spośród nich dokładnie 10 spółek. Lista spółek uczestniczących w badaniu zawiera tabela 1. Dane zostały pobrane z serwisu ISI Emerging Markets (*www.securities.com*).

Tabela 1

Spółki uczestniczące w badaniu empirycznym

24.05.2000 – 11.10.2002		30.11.2004 – 8.04.2007		2.12.2005 – 24.04.2008	
nazwa	kod spółki	nazwa	kod spółki	nazwa	kod spółki
AMICA	PLAMICA00010	COMARCH	PLCOMAR00012	AMREST	NL0000474351
BUDIMEX	PLBUDMX00013	ECHO	PLECHPS00019	BUDIMEX	PLBUDMX00013
CERSANIT	PLCRSNT00011	GETIN	PLGSPR000014	CCC	PLCCC0000016
ECHO	PLECHPS00019	GRAJEWO	PLZPW0000017	DUDA	PLDUDA000016
ELBUDOWA	PLELTBD00017	HANDLOWY	PLBH00000012	ECHO	PLECHPS00019
IMPEXMETAL	PLIMPXM00019	INGBSK	PLBSK0000017	GETIN	PLGSPR000014
JUTRZENKA	PLJTRZN00011	KREDYT	PLKRDTB00011	INGBSK	PLBSK0000017
KREDYT	PLKRDTB00011	LPP	PLLPP0000011	KREDYTB	PLKRDTB00011
PGF	PLMEDCS00015	MILLENIUM	PLBIG0000016	MILLENIUM	PLBIG0000016
RAFAKO	PLRAFAK00018	RAFAKO	PLRAFAK00018	SWIECIE	PLCELZA00018

Źródło: opracowanie własne.

W badaniu analizowano dwuskładnikowe portfele w trzech okresach wyszczególnionych w tabeli 1, odpowiednio, okres o trendzie stałym, okres o trendzie rosnącym i okres o trendzie początkowo rosnącym ze zmianą trendu na malejący. Dla każdych dwóch spółek tworzono portfele z wagami β i $1-\beta$, gdzie $\beta = 0{,}1; 0{,}2; \ldots; 0{,}9$. Obliczenia przeprowadzono za pomocą procedur napisanych przez autora w programie R 2.7.1.

Wartość zagrożona była szacowana na podstawie 125, 250 oraz 500 obserwacji dziennych zmian wartości poszczególnych akcji w każdym badanym szeregu. Otrzymane w ten sposób oszacowanie VaR porównywano z rzeczywistą zmianą wartości portfela w horyzoncie jednego dnia. Następnie obliczenia powtórzono dla szeregu przesuniętego o jeden dzień do przodu. Tę procedurę powtarzano sto razy, zatem okres testowy służący do oceny estymatorów wartości VaR obejmował sto dni.

W pierwszym etapie badania wykorzystano trzy wymienione wyżej szeregi danych w trzech wariantach długości szeregu (125, 250, 500 obserwacji). W tej części dokonano porównania klasycznej metody kowariancji z dwiema modyfikacjami tej metody opisanymi w poprzednim punkcie opracowania. Przypomnijmy, że modyfikacja metody kowariancji polegała na zastąpieniu współczynnika korelacji we wzorze (2) przez współczynnik τ Kendalla lub ρ_S Spearmana.

Liczba przekroczeń w okresie testowym oraz liczba przekroczeń statystyki Kupca we wszystkich analizowanych okresach dla trzech metod szacowania VaR jest zaprezentowana w tabelach 2 i 3.

Tabela 2

Liczba portfeli z przekroczeniami VaR powyżej poziomu tolerancji $\alpha = 0{,}01$ w grupie 405 badanych portfeli za pomocą trzech wariantów metody kowariancji

Okres		24.05.2000-11.10.2002			30.11.2004 -18.04.2007			2.12.2005-24.04.2008		
liczebność szeregu		125	250	500	125	250	500	125	250	500
ρ	wg przekroczeń (%)	28,89	9,14	4,94	35,06	34,32	20,74	36,3	60,99	6,42
	wg stat. Kupca	14	3	90	4	109	230	0	178	143
τ	wg przekroczeń (%)	32,84	9,38	7,9	35,8	35,31	46,17	37,04	61,98	12,35
	wg stat. Kupca	15	3	92	3	114	231	0	183	146
ρ_S	wg przekroczeń (%)	27,16	8,64	7,41	34,07	34,32	45,19	35,56	60,25	11,85
	wg stat. Kupca	11	3	89	3	110	224	0	177	141

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3

Liczba portfeli z przekroczeniami VaR powyżej poziomu tolerancji $\alpha = 0{,}05$ w grupie 405 badanych portfeli za pomocą trzech wariantów metody kowariancji

Okres		24.05.2000-11.10.2002			30.11.2004 -18.04.2007			2.12.2005-24.04.2008		
liczebność szeregu		125	250	500	125	250	500	125	250	500
ρ	wg przekroczeń (%)	13,09	0	0	4,69	1,23	0	0,49	4,94	0
	wg stat. Kupca	52	58	85	3	44	218	20	124	209
τ	wg przekroczeń (%)	13,09	0	0	0,49	1,73	0	4,69	5,68	0
	wg stat. Kupca	53	119	124	20	129	319	3	199	234
ρ_S	wg przekroczeń (%)	11,85	0	0	4,44	0,99	0	0,49	4,69	0
	wg stat. Kupca	59	135	122	4	130	316	26	193	232

Źródło: opracowanie własne.

Dokonując porównania otrzymanych przekroczeń można stwierdzić, że dla poziomu tolerancji α = 0,01 najefektywniejsza okazała się metoda ze współczynnikiem ρ_S. W stosunku do klasycznej metody kowariancji otrzymano lepsze wyniki, zwłaszcza w krótszych próbach 125 i 250 obserwacji. Zastosowanie współczynnika τ wygenerowało wyniki nieznacznie gorsze niż dla metod ze współczynnikami ρ i ρ_S. Przy poziomie tolerancji α = 0,05 metoda ze współczynnikiem ρ_S zawsze generowała mniej przekroczeń ponad poziom tolerancji niż metoda klasyczna. Zastosowanie współczynnika τ dało lepszy wynik dla okresu o trendzie rosnącym i 125 obserwacjach. W pozostałych przypadkach wyniki były porównywalne lub gorsze od rezultatów metody kowariancji ze współczynnikiem korelacji.

Na podstawie porównania wartości statystki Kupca odnotowano prawie we wszystkich przypadkach (α = 0,05) nieznaczny wzrost liczby portfeli z wartościami statystyki Kupca w obszarze krytycznym w stosunku do klasycznej metody kowariancji. Ponieważ znaczna część otrzymanych wyników nie zawierała żadnych przekroczeń ponad poziom tolerancji przy jednoczesnym występowaniu portfeli ze zbyt wysoką statystyką Kupca, można postawić hipotezę, iż dla poziomu tolerancji α = 0,05 wyniki trzech metod są zbliżone. Różnice między liczbą portfeli z przekroczeniami, a liczbą portfeli wynikającą z testu Kupca można wyjaśnić otrzymywaniem liczby przekroczeń oscylujących wokół przyjętego poziomu tolerancji.

Druga część badania bezpośrednio poświęcona była wykorzystaniu kopuli w szacowaniu wartości zagrożonej.

W pierwszym kroku dokonano analizy wykorzystania kopuli do szacowania wartości zagrożonej dla dwóch wybranych portfeli: Impexmetal i PGF (z wagami odpowiednio 0,6 i 0,4) oraz Impexmetal i Rafako (z wagami 0,7 i 0,3). Szeregi obserwacji dla obu portfeli pochodziły z pierwszego okresu, tj. 24.05.2000-11.10.2002 i miały po 125 obserwacji. VaR szacowany był w przypadku pierwszego portfela przy poziomie ufności α = 0,01 drugim zaś α = 0,05. Wybrane portfele charakteryzowały się maksymalną liczbą przekroczeń w metodzie kowariancji spośród wszystkich badanych portfeli we wszystkich okresach (6 przekroczeń dla pierwszego portfela, 11 dla drugiego).

Do wyznaczenia oszacowania VaR zastosowano kopule Gaussa, Claytona i Gumbel-Hougaarda. Symulacje przeprowadzono w dwóch wersjach. W pierwszej generowano 10000 razy 125-elmentowe próbki o zadanej kopule, a następnie odczytywano poziom VaR. Ostateczna ocena była średnią otrzymanych wyników. W drugiej generowano jedną próbę o liczebności 10000 i odczytywano wartość zagrożoną.

Dla kopuli Gaussa procedura symulowania dziennych zmian wartości portfela w celu wyznaczenia VaR jest identyczna jak dobrze znana z literatury przedmiotu metoda symulacji Monte Carlo dla rozkładu normalnego.

Otrzymane wyniki analizy zamieszczone są w tabelach 4 i 5.

Tabela 4

Symulacja MC (próba o liczebności 10000)

	Impexmetal – PGF		Impexmetal – Rafako	
kopula	liczba przekroczeń	statystyka Kupca	liczba przekroczeń	statystyka Kupca
Gaussa	6	11,758	11	5,733249
Gumbel-Hougaard	5	8,258217	8	1,615808
Clayton	2	0,7827239	8	1,615808

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5

Symulacja MC (próba o liczebności 125, 10000 iteracji dla kopuli Gaussa i 2000 dla pozostałych)

	Impexmetal – PGF		Impexmetal – Rafako	
kopula	liczba przekroczeń	statystyka Kupca	liczba przekroczeń	statystyka Kupca
Gaussa	6	11,758	11	5,733249
Gumbel-Hougaard	6	11,758	10	4,130844
Clayton	3	2,632353	9	2,75

Źródło: opracowanie własne.

Estymacja wartości VaR za pomocą kopuli Gaussa dała takie same liczby przekroczeń jak metoda kowariancji. Jednakże metody z kopulą Gumbel-Hougaarda i Claytona wygenerowały lepsze wyniki. Znaczącą redukcję liczby przekroczeń uzyskano dla obu portfeli wykorzystując kopulę Claytona.

Otrzymane wyniki w tych dwóch przypadkach dla kopuli Claytona okazały się obiecujące. Dlatego w drugim etapie badania dokonano estymacji wartości VaR za pomocą symulacji z wykorzystaniem kopuli Claytona dla szeregu 125 obserwacji z okresu 24.05.2000 – 11.10.2002 i obu poziomów tolerancji: $\alpha = 0{,}01$ oraz $\alpha = 0{,}05$. Wyniki tej analizy zawarte są w tabelach 6 oraz 7.

Tabela 6

Empiryczny rozkład procentowy przekroczeń w próbie testowej stu dni dla 405 badanych portfeli przy poziomie tolerancji $\alpha = 0.01$

liczba przekroczeń	metoda kowariancji (%)	kopula Claytona (%)
0	20,25	40,00
1	51,11	47,40
2	18,02	10,62
3	7,16	1,98
4	2,72	---
5	0,49	---
6	0,25	---

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 7

Empiryczny rozkład procentowy przekroczeń w próbie testowej stu dni dla 405 badanych portfeli przy poziomie tolerancji $\alpha = 0.05$

liczba przekroczeń	metoda kowariancji (%)	kopula Claytona (%)
0	0,99	0,00
1	10,86	2,47
2	9,14	7,90
3	23,46	16,05
4	15,80	15,06
5	14,32	17,04
6	12,35	13,58
7	4,94	20,25
8	3,21	6,67
9	2,96	0,99
10	1,23	---
11	0,74	---

Źródło: opracowanie własne.

Przeprowadzone symulacje wykazują, że zaproponowana przez autora procedura szacowania wartości zagrożonej z wykorzystaniem kopuli Claytona, wygenerowała lepsze wyniki niż metoda kowariancji. Po pierwsze, dla obu poziomów tolerancji zaobserwowano, że symulacja za pomocą kopuli Claytona nie generuje wysokich wartości przekroczeń, tj. dla $\alpha = 0{,}05$ nie wystąpiło 10 i 11 przekroczeń, które pojawiły się w 1,97% przypadków w metodzie kowariancji, dla $\alpha = 0{,}01$ natomiast nie wystąpiło 4, 5 i 6 przekroczeń, które były w 3,46% przypadków z metody kowariancji. Po drugie, dla poziomu tolerancji $\alpha = 0{,}01$ zaobserwowano istotne zmniejszenie liczby przekroczeń, zaś wzrost liczby portfeli bez przekroczeń w porównaniu z wynikami metody kowariancji. Jednakże takiej prawidłowości nie ma przy poziomie $\alpha = 0{,}05$. W tym przypadku niepokojący jest wzrost liczby portfeli, dla których wystąpiło 7 przekroczeń. Jest to wartość, która wskazuje na przekroczenie ponad zakładany poziom. Warto jednak podkreślić, że jest to małe przekroczenie poziomu tolerancji przy jednoczesnym braku większych przekroczeń, tj. 10 i 11.

Na podstawie wartości statystyki Kupca w obu przypadkach metody dały podobne rezultaty. Dla poziomu $\alpha = 0{,}01$ nie zaobserwowano wartości statystyki w obszarze krytycznym dla metody z kopulą Claytona, dwie zaś dla metody kowariancji. Dla poziomu $\alpha = 0{,}05$ było to odpowiednio 10 oraz 11 wartości.

5. PODSUMOWANIE

Szacowanie wartości zagrożonej za pomocą kopuli, a także miar τ Kendalla i ρ_S Spearmana w przeprowadzonych symulacjach wskazuje, że otrzymane oszacowania są generalnie lepsze niż w metodzie kowariancji, w której zależność zmiennych zysków i strat składników portfela jest mierzona liniowym współczynnikiem korelacji. Oczywiście, opisane w artykule analizy stanowią wstęp do dalszych, pogłębionych badań. Należałoby zaproponowaną przez autora metodę szacowania VaR z wykorzystaniem kopuli Claytona przeanalizować dla innych typów szeregów danych oraz większej liczby danych. Przeprowadzone bowiem badanie z wykorzystaniem kopuli jest jedynie analizą dwóch przypadków. Otrzymane wyniki są obiecujące, lecz trudno na tym etapie badania formułować ogólne wnioski o skuteczności metod. Dalsze analizy dla większej liczby portfeli są kontynuowane przez autora. Niemniej jednak można postawić bardzo wiarygodną hipotezę, że zaproponowane metody są skuteczniejsze od metody kowariancji przy poziomie tolerancji $\alpha = 0{,}01$

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

LITERATURA

[1] Bałamut T., [2002], *Metody estymacji VaR*, Materiały i studia, zeszyt nr 147, NBP, Warszawa.

[2] Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W., [2004], *Copula Methods in Finance*, John Wiley & Sons Ltd., West Sussex.

[3] Jorion P., [2000], *Value at Risk. The new benchmark for managing financial risk*, McGraw-Hill, New York.

[4] Kpanzou T.A., [2007], *Copulas in statistics*, African Institute for Mathematical Sciences, University of Stellenbosch.

[5] Papla D., Piontek K., [2003], *Zastosowanie rozkładów α-stabilnych i funkcji powiązań (copula) w obliczaniu wartości zagrożonej (VaR)*, Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu, Katedra Inwestycji Finansowych i Ubezpieczeń (*http://www.kpiontek.ae.wroc.pl/DP_KP_VaR_copula.pdf*).

[6] Stryjek A., [2008], *Zastosowanie kopuli do szacowania wartości zagrożonej*, Badanie statutowe nr 03/S/0015/07, Szkoła Główna Handlowa, Warszawa.
[7] Stryjek A., [2008], *Efekt dywersyfikacji ryzyka a efektywność klasycznych metod szacowania VaR dla portfeli GPW*, Badanie statutowe nr 03/S/0014/07, Szkoła Główna Handlowa, Warszawa.
[8] Stryjek A., [2007], *Value at Risk a dywersyfikacja ryzyka*, Badanie statutowe nr 03/S/0060/06, Szkoła Główna Handlowa, Warszawa.
[9] *Zarządzanie ryzykiem*, [2007], red. K. Jajuga, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Praca wpłynęła do redakcji w maju 2009 r.

ZASTOSOWANIE MIAR ZALEŻNOŚCI ZMIENNYCH LOSOWYCH ORAZ KOPULI CLAYTONA I GUMBEL-HOUGAARDA DO SZACOWANIA WARTOŚCI ZAGROŻONEJ

Streszczenie

Opracowanie prezentuje możliwości, jakie daje kopula do szacowania wartości zagrożonej VaR. Autor przedstawia wyniki badania empirycznego dla portfeli spółek GPW w Warszawie. W badaniu dokonano porównania efektywności klasycznej metody kowariancji z dobrze znanymi z literatury przedmiotu oraz nowymi, zaproponowanymi przez autora metodami wykorzystującymi kopule Claytona i Gumbel-Hougaarda.

Słowa kluczowe: zarządzanie ryzykiem, wartość zagrożona, kopula, symulacje Monte Carlo

APPLICATION OF RANDOM VARIABLES DEPENDENCE MEASURES AND CLAYTON AND GUMBEL-HOUGAARD COPULAS FOR ESTIMATING VALUE AT RISK

Summary

This paper shows the opportunities of copula for estimating Value at Risk (VaR). The author presents results of empirical research carried out for portfolios of stocks from Warsaw Stock Exchange. Efficiency of classical covariance method was compared with other well known in the literature and also new methods proposed by author using Clayton and Gumbel-Hougaard copulas.

Key words: risk management, Value at Risk, copula, Monte Carlo simulations