PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LVI – ZESZYT 3-4 – 2009

MICHAŁ KOLUPA, JOANNA PLEBANIAK

# O ELIMINACJI BŁĘDÓW W PROGNOZACH WYKONYWANYCH NA PODSTAWIE MODELU LEONTIEWA W PRZYPADKU AGREGACJI NIEDOSKONAŁEJ W SENSIE HATANAKI

Celem artykułu jest przedstawienie eliminacji błędów w prognozach wykonanych na podstawie modelu Leontiewa w przypadku, kiedy agregacja nie jest doskonała w sensie Hatanaki. Proponowane podejście wykorzystuje macierze brzegowe i zapewnia uzyskanie prognoz nie obarczonych błędami wynikającymi z niedoskonałej agregacji.

Dany jest schemat pierwotny Leontiewa, czyli trójka ($\mathbf{P_X}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{x}$), gdzie $\mathbf{P_X} = [x_{ij}]$ jest macierzą kwadratową stopnia $n$ o elementach stanowiących przepływy międzygałęziowe z $i$-tej do $j$-tej gałęzi. Wektory $\mathbf{X}$ oraz $\mathbf{x}$ są $n$-wymiarowymi wektorami kolumnowymi o składowych odpowiednich równych $X_i$ oraz $x_i$ będących wartościami produkcji globalnej oraz końcowej $i$-tej gałęzi. Jest przy tym:

$$X_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + x_i, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Oznaczymy symbolem $\mathcal{X}$ macierz diagonalną stopnia $n$ taką, że:

$$\mathcal{X} = \text{diag}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}. \tag{2}$$

Definiujemy macierz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ o wymiarach $n$x$n$ w następujący sposób:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P_X}\mathcal{X}^{-1}. \tag{3}$$

Zauważmy, że:

$$\begin{gathered} a_{ij} \geq 0, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1, \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{4}$$

Z (3) wynika, że:

$$\mathbf{P_X} = \mathbf{A}\mathcal{X}, \tag{5}$$

co po podstawieniu do (1) prowadzi do modelu Leontiewa. Ma on postać:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{X} = \mathbf{x}. \tag{6}$$

Na podstawie modelu Leontiewa danego wzorem (6), który będziemy nazywali pierwotnym, możliwe są do wykonania prognozy.

Prognoza prosta pierwszego rodzaju polega na wyznaczeniu wektora wartości przyrostu produkcji końcowej – $\Delta\mathbf{x}$, przy założeniu, że znamy macierz $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ oraz wektor przyrostu wartości produkcji globalnej $\Delta\mathbf{X}$.

Z kolei prognoza drugiego rodzaju polega na wyznaczeniu wektora przyrostu wartości produkcji globalnej $\Delta\mathbf{X}$, kiedy znamy macierz $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ oraz wektor przyrostu wartości produkcji końcowej $\Delta\mathbf{x}$.

Dodajmy jeszcze, że stopień $n$ macierzy $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ nazywamy stopniem pierwotnego modelu Leontiewa, który dany jest wzorem (6). Z kolei model postaci:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})\,\Delta\mathbf{Y} = \Delta\mathbf{y} \tag{7}$$

jest zagregowanym modelem Leontiewa, gdzie macierz $\mathbf{B}$ jest odpowiednikiem macierzy $\mathbf{A}$ podobnie jak $r$-wymiarowe wektory kolumnowe o składowych odpowiednio równych $\Delta Y_i$ oraz $\Delta y_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$ stanowiące zagregowane wektory odpowiednio przyrostu wartości produkcji globalnej i końcowej.

Ponieważ stopień pierwotnego modelu Leontiewa jest wyższy od stopnia modelu wtórnego (zagregowanego) ($r < n$), przeto agregacja jest zabiegiem pożądanym. Niesie ona jednak pewne problemy, które niżej będą przedmiotem analiz.

Zatem analogicznie do schematu pierwotnego danego wzorem (1) mamy do czynienia z zagregowanym schematem Leontiewa:

$$Y_j = y_{j1} + y_{j2} + \ldots + y_{jr} + y_j,\; j = 1, 2, \ldots, r, \tag{8}$$

zaś powyżej podane wielkości są zagregowanymi wielkościami stanowiącymi analogiczne wielkości do danych wzorami (2), (3), (4) i (5), czyli:

$$\Upsilon = \mathrm{diag}\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_r\}, \tag{9}$$

zaś macierz o wymiarach $r \times r$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{P_y}\Upsilon^{-1}. \tag{10}$$

ma elementy równe $b_{ij}$ spełniające warunek:

$$\begin{gathered} b_{ij} \geq 0, \\ \sum_{j=1}^{r} b_{ij} < 1, \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, r. \end{gathered} \tag{11}$$

Jeżeli model pierwotny ma stopień $n$, zaś model zagregowany jest stopnia $r$ ($r < n$) ([3]), to schemat agregacji opisywany jest przez specjalną macierz $\mathbf{S}$ o wymiarach $r \times n$.

Odnotujmy jeszcze, że schemat agregacji stanowi zbiór reguł, według których łączy się gałęzie modelu pierwotnego w odpowiednie gałęzie modelu zagregowanego. Schemat taki nazywamy zgodnym, jeżeli spełnia następujące warunki [3]:

a) każda gałąź modelu pierwotnego jest zaliczona do pewnej gałęzi modelu zagregowanego,

b) jedna i ta sama gałąź modelu pierwotnego nie może być zaliczona do dwóch różnych gałęzi modelu zagregowanego,

c) gałęzie zagregowane mają sens ekonomiczny.

Przypuśćmy, że pierwsze $k_1$ gałęzi modelu pierwotnego zostały zaliczone do pierwszej gałęzi modelu zagregowanego. Wówczas pierwszy wiersz macierzy **S** ma na węzłach (1, 1), (1, 2), …, (1, $k_1$) jedynki, zaś pozostałe elementy tego wiersza są zerami.

Z kolei drugą gałąź modelu zagregowanego tworzą gałęzie o numerach $k_1 + 1, \ldots, k_2$ modelu pierwotnego. Wówczas drugi wiersz macierzy **S** ma jedynki na miejscach (2, $k_1 + 1$), …, (2, $k_2$), zaś pozostałe elementy tego wiersza są zerami, itd. i na koniec gałęzie o numerach $k_{r-1} + 1, \ldots, k_r$ tworzą $r$-tą (ostatnią) gałąź w modelu zagregowanym. Wówczas elementy wiersza $r$-tego macierzy **S** stojące w węzłach ($r$, $k_{r-1} + 1$), …, ($r$, $k_r$) są jedynkami, żaś pozostałe elementy tego wiersza są zerami.

Przypomnijmy jeszcze praktycznie ważne własności macierzy **S** ([4]):

$1^0$ rząd $\mathbf{S} = r$,

$2^0$ iloczyn $\mathbf{S}^T\mathbf{S}$ jest macierzą diagonalną,

$3^0$ jeżeli $d_i$ oznacza liczbę jedynek występującą w $r$-tym wierszu macierzy **S**, to $i$-ty diagonalny element tej macierzy jest równy $d_i$.

Obecnie zdefiniujemy agregację doskonałą.

W przypadku prognozy prostej pierwszego rodzaju agregacja **S** jest doskonała, jeżeli z warunku:

$$\mathbf{S}\Delta\mathbf{X} = \Delta\mathbf{Y} \tag{13}$$

spełnionego dla dowolnego wektora $\Delta\mathbf{X}$ wynika, że:

$$\mathbf{S}\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{y}. \tag{14}$$

Z kolei w przypadku prognozy prostej drugiego rodzaju agregacja **S** jest doskonała, jeżeli z warunku:

$$\mathbf{S}\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{y} \tag{15}$$

spełnionego dla dowolnego wektora $\Delta\mathbf{x}$ wynika, że:

$$\mathbf{S}\Delta\mathbf{X} = \Delta\mathbf{Y}. \tag{16}$$

Z kolei niżej podane twierdzenia dotyczą agregacji doskonałej.

**Twierdzenie 1** (Hatanaka [2])

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby agregacja **S** była doskonała dla prognozy prostej tak pierwszego jak i drugiego rodzaju jest spełnienie warunku:

$$\mathbf{SA} = \mathbf{BS}. \tag{17}$$

Posługiwanie się tym wzorem wymaga znajomości schematu pierwotnego. W praktyce wymóg ten nie zawsze jest spełniony.

Wówczas chcąc rozstrzygnąć, czy dana agregacja **S** jest doskonała korzystamy z twierdzenia Ary ([1]) podanego w wersji zamieszczonej w pracy [4].

**Twierdzenie 2** (Ara)

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby agregacja **S** była doskonała jest spełnienie równania:

$$\mathbf{SA} = \mathbf{SAS}^{\mathrm{T}}(\mathbf{SS})^{-1}\mathbf{S}. \tag{18}$$

Posługiwanie się tym wzorem jest ułatwione z uwagi na poprzednio omówione własności macierzy **S**.

Zakładamy, że agregacja **S** jest niedoskonała.

W przypadku prognozy prostej pierwszego rodzaju z warunku $\mathbf{S}\Delta\mathbf{X} = \Delta\mathbf{Y}$ spełnionego dla dowolnego wektora $\Delta\mathbf{X}$ wynika nie warunek (14), lecz warunek:

$$\mathbf{S}\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{y} + \boldsymbol{\delta}, \tag{19}$$

gdzie $\boldsymbol{\delta}$ jest niezerowym wektorem błędu.

W przypadku prognozy prostej drugiego rodzaju z warunku (15) spełnionego dla dowolnego wektora $\Delta\mathbf{x}$ wynika nie warunek (16), lecz warunek:

$$\mathbf{S}\Delta\mathbf{X} = \Delta\mathbf{Y} + \boldsymbol{\eta}, \tag{20}$$

gdzie $\boldsymbol{\eta}$ jest niezerowym wektorem błędu.

Wektor $\boldsymbol{\delta}$ może być wyznaczony na podstawie wzoru Czechowskiego (patrz [3]) postaci:

$$\boldsymbol{\delta} = (\mathbf{BS} - \mathbf{SA})\,\Delta\mathbf{X}. \tag{21}$$

Możliwe jest również wykorzystanie do tego celu macierzy brzegowej. I tak ma ona postać:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \Delta\mathbf{X} \\ -(\mathbf{BS} - \mathbf{SA}) & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Po wykonaniu na macierzy **Q** przekształceń elementarnych typu $\beta$ (macierz $-\mathbf{BS} - \mathbf{SA}$) przechodzi w macierz zerową) otrzymujemy:

$$\mathbf{Q} \sim \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_n)^* & (\Delta\mathbf{X})^* \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix}, \tag{23}$$

co pozwala odczytać wektor $\boldsymbol{\delta}$.

W pracy [4] rozpatrzono przypadek kiedy $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$, zaś macierz podstawowa układu (21) jest macierzą rzędu $t$ ($0 \leq t \leq r$). Wówczas otrzymujemy wektor $\Delta\mathbf{X}$ spełniający warunek:

$$(\mathbf{BS} - \mathbf{SA})\,\Delta\mathbf{X} = \mathbf{0}, \tag{24}$$

który daje wektor $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$ mimo że $\mathbf{BS} \neq \mathbf{SA}$.

Z kolei w przypadku prognozy drugiego rodzaju wektor $\boldsymbol{\eta}$ spełnia warunek:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})\,\eta = (\mathbf{SA} - \mathbf{BS})\,\Delta\mathbf{X}. \tag{25}$$

Zauważmy, że nie znamy wektora $\Delta\mathbf{X}$ i dlatego bezpośrednie skorzystanie z tego wzoru nie jest możliwe. Staje się ono możliwe po wykorzystaniu odpowiednich macierzy brzegowych.

Podamy dwa takie sposoby podejścia. Pierwszy polega na tym, iż możemy wyznaczyć wektor:

$$(\mathbf{SA} - \mathbf{BS})\,\Delta\mathbf{X} = (\mathbf{SA} - \mathbf{BS})\,(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\Delta\mathbf{x} \tag{26}$$

nie wyznaczając przy tym wektora $\Delta\mathbf{X}$, lecz od razu iloczyn macierzy $(\mathbf{SA} - \mathbf{BS})\,\Delta\mathbf{X}$, czyli wektor $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\Delta\mathbf{x}$.

Podkreślamy ten fakt z naciskiem. Jest to analogia do rozwiązywania układu równań liniowych $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, przy czym chcąc uzyskać rozwiązanie nie wyznaczamy osobno macierzy odwrotnej do macierzy $\mathbf{A}$, a następnie nie mnożymy macierzy $\mathbf{A}^{-1}$ przez wektor $\mathbf{b}$, lecz od razu wyznaczamy wektor $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Do tego celu można wykorzystać odpowiednią macierzą brzegową.

A zatem, chcąc wyznaczyć wektor stanowiący prawą stronę układu (25) najpierw korzystamy z macierzy brzegowej postaci:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{A} & \Delta\mathbf{x} \\ -(\mathbf{SA} - \mathbf{BS}) & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Po wykonaniu na macierzy $\mathbf{U}$ przekształceń elementarnych typu $\alpha$ (macierz $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ przechodzi w górną macierz trójkątną z jedynkami na głównej przekątnej) oraz przekształceń elementarnych typu $\beta$ (macierz $-(\mathbf{SA} - \mathbf{BS})$ przechodzi w macierzą zerową) dostajemy:

$$\mathbf{U} \sim \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{*} & (\Delta\mathbf{x})^{*} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{SA} - \boldsymbol{BS})\,\Delta\mathbf{X} \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Stąd odczytujemy wektor $(\mathbf{SA} - \mathbf{BS})\,\Delta\mathbf{X}$ nie znając *a priori* wektora $\Delta\mathbf{X}$.

Znając już wektor $(\mathbf{SA} - \mathbf{BS})\,\Delta\mathbf{X}$ rozwiązujemy układ (25). Do tego celu możemy wykorzystać macierz brzegową postaci:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}-\mathbf{B} & (\mathbf{SA}-\mathbf{BS})\,\Delta\,\mathbf{X} \\ -\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Po wykonaniu na macierzy **V** przekształceń elementarnych typu $\alpha$ (macierz **I** – **B** przechodzi w górną macierz trójkątną z jedynkami na głównej przekątnej) oraz przekształceń elementarnych typu $\beta$ (macierz $-\mathbf{I}_r$ przechodzi w macierzą zerową) dostajemy:

$$\mathbf{V} \sim \begin{bmatrix} (\mathbf{I}-\mathbf{B})^* & [(\mathbf{SA}-\mathbf{BS})\,\Delta\,\mathbf{X}]^* \\ \mathbf{0} & \eta \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Stąd odczytujemy wektor $\boldsymbol{\eta}$ będący rozwiązaniem układu (25) (przypomnijmy nie była w tym przypadku konieczna *a priori* znajomość wektora $\Delta\mathbf{X}$).

Zauważmy, że znacznie prościej jest wykorzystać macierz brzegową **F** postaci ([5]):

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}-\mathbf{A} & \Delta\,\mathbf{x} \\ -\mathbf{S} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{31}$$

i wykonać na niej przekształcenia elementarne typu $\alpha$ (macierz **I** – **A** przechodzi w górną macierz trójkątną z jedynkami na głównej przekątnej) oraz przekształceń elementarnych typu $\beta$ (macierz –**S** przechodzi w macierzą zerową). Wówczas:

$$\mathbf{F} \sim \begin{bmatrix} (\mathbf{I}-\mathbf{A})^* & (\,\Delta\,\mathbf{x})^* \\ \mathbf{0} & \Delta\,\mathbf{Y} \end{bmatrix}, \tag{32}$$

gdzie zawsze $\Delta\mathbf{Y} = \mathbf{S}\Delta\mathbf{X}$.

*Politechnika Radomska*
*Szkoła Główna Handlowa*

LITERATURA

[1] Ara K., [1959], *The Aggregation Problem In Input – Output Analysis*, „Econometrica" 27.
[2] Czechowski T., [1960], *Kilka uwag o agregacji w modelu Leonteiwa*, „Przegląd Statystyczny" 3, Warszawa.
[3] Hatanaka M., [1952], *Note on Consolidation with Leontief System*, „Econometrica" 4.
[4] Kolupa M., [1969], *O eliminacji błędów w prognozach wykonywanych na podstawie modelu Leontiewa*, „Przegląd Statystyczny" 2, Warszawa.
[5] Łukasik J. (obecnie Plebaniak), [1983], Z*astosowanie macierzy brzegowych do prognozowania na podstawie modelu Leontiewa*, Monografie i Opracowania SGPiS, Warszawa.

Praca wpłynęła do redakcji listopad 2009 r.

## O ELIMINACJI BŁĘDÓW W PROGNOZACH WYKONYWANYCH NA PODSTAWIE MODELU LEONTIEWA W PRZYPADKU AGREGACJI NIEDOSKONAŁEJ W SENSIE HATANAKI

### Streszczenie

Dany jest pierwotny model Leontiewa stopnia $n$ postaci:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\Delta\mathbf{X} = \Delta\mathbf{x}.$$

Dokonujemy agregacji $\mathbf{S}$ (macierz o wymiarach $r \times n$ ($r < n$) uzyskując wtórny (zagregowany) model Leontiewa stopnia $r$ postaci:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})\,\Delta\mathbf{Y} = \Delta\mathbf{y}.$$

Jeżeli agregacja nie spełnia $\mathbf{BS} = \mathbf{SA}$, to w prognozach prostych zarówno pierwszego, jak i drugiego rodzaju pojawiają się błędy.

Dla prognozy pierwszego rodzaju wektor błędów $\boldsymbol{\delta}$ możemy wyznaczyć z warunku Czechowskiego:

$$(\mathbf{BS} - \mathbf{SA})\,\Delta\mathbf{X} = \boldsymbol{\delta}.$$

Jeżeli przy tym rząd macierzy $\mathbf{BS} - \mathbf{SA}$ ($r(\mathbf{BS} - \mathbf{SA})$) jest równy $t$ ($0 < t \le r$), to istnieją wektory $\Delta\mathbf{X}$, dla których $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$ mimo że agregacja nie jest doskonała ($\mathbf{BS} \neq \mathbf{SA}$).

Dla prognozy drugiego rodzaju konstruując macierz brzegową postaci:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{A} & \Delta\mathbf{X} \\ -\mathbf{S} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

zapewniamy, że zawsze $\mathbf{S}\Delta\mathbf{X} = \Delta\mathbf{Y}$ mimo że $\mathbf{BS} \neq \mathbf{SA}$.

W przypadku prognozy drugiego rodzaju wektor $\boldsymbol{\eta}$ ($\mathbf{BS} \neq \mathbf{SA}$ – agregacja nie jest doskonała) może być wyznaczony z równania:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})\,\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{SA} - \mathbf{BS})\,\Delta\mathbf{X}.$$

Jako, że nie znamy *a priori* $\Delta\mathbf{X}$, możemy go wyznaczyć wykorzystując kolejno macierze brzegowe postaci:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{A} & \Delta\mathbf{x} \\ -(\mathbf{SA} - \mathbf{BS}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ oraz } \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{B} & (\mathbf{SA} - \mathbf{BS})\,\Delta\mathbf{X} \\ -\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

i wtedy wektor $\boldsymbol{\eta}$ może być wyznaczony.


**Słowa kluczowe:** model Leontiewa, prognozy ekonometryczne, agregacja


## ON ELIMINATING ERRORS OF FORECASTS OBTAINED FROM THE LEONTIEF MODEL FOR THE CASE OF IMPERFECT HATANAKI'S AGGREGATION

### Summary

In the following article, there is presented a primary Leontiew model of order *nxn*:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\Delta\mathbf{X} = \Delta\mathbf{x}.$$

Aggregation **S** is performed (matrix **S** is a matrix of order $r \times n$ ($r < n$)) and the effect of it is an aggregated Leontiew model of rank $r$:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})\, \Delta\mathbf{Y} = \Delta\mathbf{y}.$$

If aggregation does not fulfil **BS** = **SA**, then in simple prognoses, both of the first and second kind, some errors appear.

For the prognosis of the first kind, the errors vector $\boldsymbol{\delta}$ can be determined from Czechowski's equation**:**

$$(\mathbf{BS} - \mathbf{SA})\, \Delta\mathbf{X} = \boldsymbol{\delta}.$$

If the rank of matrix **BS** – **SA** ($r(\mathbf{BS} - \mathbf{SA})$) equals $t$ ($0 < t \le r$), there are $\Delta\mathbf{X}$ vectors, for which $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$ despite the fact that aggregation is not perfect i.e. $\mathbf{BS} \neq \mathbf{SA}$.

For the prognosis of the second kind a bordered matrix:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{A} & \Delta\mathbf{X} \\ -\mathbf{S} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

is constructed; then always $\mathbf{S}\Delta\mathbf{X} = \Delta\mathbf{Y}$ in spite of the fact that $\mathbf{BS} \neq \mathbf{SA}$.

In case of the prognosis of the second kind the $\boldsymbol{\eta}$ vector ($\mathbf{BS} \neq \mathbf{SA}$ – aggregation is not fulfilled) can be derived from the equation:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})\, \boldsymbol{\eta} = (\mathbf{SA} - \mathbf{BS})\, \Delta\mathbf{X}.$$

As $\Delta\mathbf{X}$ is *a priori* not known, the following bordered matrices are applied in sequence:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{A} & \Delta\mathbf{x} \\ -(\mathbf{SA} - \mathbf{BS}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ oraz } \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{B} & (\mathbf{SA} - \mathbf{BS})\,\Delta\mathbf{X} \\ -\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

and the $\boldsymbol{\eta}$ vector can thus be determined.

**Key words:** Leontief model, econometric forecasts, aggregation.