PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LIX – ZESZYT 1 – 2012

HENRYK GURGUL, TOMASZ WÓJTOWICZ

HIPOTEZA BRODY W ŚWIETLE WYNIKÓW BADAŃ EMPIRYCZNYCH

1. METODA I TABLICE INPUT-OUTPUT

Pierwszą ideę metody input-output można znaleźć (za [7]) w dziele Francois Quesnaya *Tableau Economique* (1758). W tej książce autor przedstawił gospodarkę wymienną w postaci ruchu okrężnego. Ideę tę rozbudował następnie Leon Walras. Jednak nowoczesną analizę input-output (zwaną również w literaturze polskiej analizą nakładów i wyników albo analizą przepływów międzygałęziowych) stworzył dopiero W. Leontief. Jej podstawy zostały wyłożone w roku 1941 w pracy [7], gdzie zostały przedstawione wzajemne powiązania w gospodarce Stanów Zjednoczonych w okresie 1919-1939. Po opublikowaniu tej pracy rozpoczął się burzliwy, wszechstronny rozwój teorii input-output.

Metodologia input-output była i jest nadal intensywnie rozwijana i modyfikowana. Obecnie opiera się ona na tzw. Systemie Rachunków Narodowych (SNA'93, ang. skrót *System of National Accounts*). Pierwszą wersję SNA opracowaną przez laureatów Nagrody Nobla Simona Kuznetsa i Richarda Stone'a opublikowano w 1952 roku. Wersja SNA z roku 1993 (zalecana przez ONZ) stanowi uporządkowany wewnętrznie zbiór spójnych, logicznych i zintegrowanych rachunków makroekonomicznych, bilansów i tablic opracowanych według obowiązujących norm i reguł statystycznych. Odmianą SNA'93 jest system ESA'95 (*European System of Accounts*) bardziej nastawiony na warunki i dane wymagane przez Unię Europejską. System ten jest dopasowany do pojęć i klasyfikacji stosowanych w wielu innych statystykach społecznych i gospodarczych Unii Europejskiej. Dzięki temu może być podstawą odniesienia dla statystyki społecznej i gospodarczej krajów członkowskich. Klasyfikacje i założenia polskiego systemu rachunków narodowych są zgodne zarówno z założeniami zalecanymi przez ONZ jak i przez Unię Europejską. Polski System Rachunków Narodowych uwzględnia jednak pewną specyfikę polskiego systemu organizacyjnego i prawnego.

Istotną rolę w systemie ESA'95 odgrywają tablice wykorzystania (ang. *use tables*) w układzie produkt/działalności oraz tablice podaży (ang. *supply tables*) wiążące wytwarzanie produktów z określonymi działalnościami. W ESA'95 nie występuje jako takie pojęcie gałęzi. Jednakże w rozważaniach teoretycznych i empirycznych używa się tego pojęcia jako agregatu obejmującego produkty czyli produkcję przedsiębiorstw lub zakładów o określonym rodzaju działalności. Symetryczne tablice przepływów międzygałęziowych są tablicami typu produkt/produkt lub gałąź/gałąź i łączą tablice wykorzystania i tablice podaży w jedną tablicę z identyczną klasyfikacją produktów lub gałęzi w zastosowaniu do kolumn i wierszy. Tablice przepływów międzygałęziowych w układzie produktowym w przypadku polskiej gospodarki są zestawiane zgodnie z PKWiU (Polska Klasyfikacja Wyrobów i Usług). Natomiast rodzaje działalności uwzględniane w tablicach wykorzystania i podaży klasyfikowane są zgodnie z Polską Klasyfikacją Działalności (skrót PKD2004, ang. skrót NACE). W części empirycznej tego artykułu wykorzystano tablice przepływów międzygałęziowych w układzie produkt/produkt.

W pewnym uproszczeniu tablica przepływów międzygałęziowych w swojej najogólniejszej postaci może być rozumiana jako ilustracja *ex post* ruchu okrężnego strumieni dóbr i usług pomiędzy jednostkami produkcyjnymi połączonymi w gałęzie. Strumienie te są wyrażone przeważnie w ujęciu wartościowym w walucie krajowej i dotyczą najczęściej jednego roku. Proces produkcyjny będący centralnym punktem tablic input-output może być rozumiany jako ”przekształcenie” nakładów (input) w produkty (output). Nakłady dzielą się na nakłady bieżące (inaczej bezpośrednie) oraz wartość dodaną. Popyt na produkty dzieli się na pośredni oraz końcowy.

Tablica IO opisująca wzajemne powiązania gałęziowe wewnątrz całego kraju lub regionu opiera się na następujących teoretycznych założeniach:

a) cała gospodarka lub region są podzielone na gałęzie,
b) każda z gałęzi stosując określoną technologię produkuje jednorodne dobro,
c) wszystkie procesy produkcyjne są efektywne przy stałej skali produkcji,
d) w procesie produkcyjnym są stosowane czynniki produkcji, których zasoby są ograniczone.

W praktyce realnie funkcjonujące gospodarki nigdy ściśle nie spełniają podanych warunków, a zwłaszcza b) i c).

Tablica przepływów międzygałęziowych może być przedstawiona schematycznie za pomocą macierzy blokowych podanych w tabeli 1.

Tabela 1.

Macierze blokowe tablicy IO

Macierz zużycia produkcyjnego I	Macierz popytu końcowego II
Macierz wartości dodanej III	Macierz podziału wtórnego IV

Źródło: opracowanie własne.

Centralną rolę w tablicy odgrywa I ćwiartka (macierz I) obrazująca strumienie dóbr i usług przepływające między gałęziami produkcyjnymi. Suma elementów danego wiersza podaje łączną wielkość produkcji pozostającej w tej gałęzi oraz przepływającej do pozostałych gałęzi. Suma elementów dowolnej kolumny tej macierzy obrazuje łączne zużycie produkcyjne własnych produktów oraz produktów pozostałych gałęzi. Macierz I jest z reguły kwadratowa, choć dla określonych celów konstruuje się też macierze prostokątne. Macierz popytu końcowego (macierz II) obrazuje w wierszach zużycie produktów gałęzi w podziale na poszczególne kategorie popytu końcowego. Kolumny tej macierzy pokazują gałęziowy skład odpowiednich kategorii popytu końcowego. Sumy poszczególnych wierszy obrazują zużycie końcowe produktów gałęzi, sumy kolumn ukazują globalne wielkości poszczególnych kategorii popytu końcowego. W praktyce wyróżnia się najczęściej następujące kategorie popytu końcowego: spożycie indywidualne, spożycie instytucjonalne i agend rządowych, przyrost zapasów i rezerw, nakłady na środki trwałe i kapitalne remonty oraz eksport. Macierz popytu końcowego jest prostokątna. Wyjaśnijmy jeszcze, że nakłady inwestycyjne nie oznaczają tu inwestycji poczynionych w poszczególnych gałęziach, a jedynie zrealizowany popyt na dobra inwestycyjne dostarczone przez produkujące te dobra gałęzie.

W III ćwiartce w różnych wersjach tablic przeważnie wykazuje się pozycję podatki od produktów pomniejszone o dotacje do produktów, koszty związane z zatrudnieniem, podatki od producentów, dotacje dla producentów oraz nadwyżkę operacyjną brutto. Tę ostatnią pozycję oblicza się jako różnicę pomiędzy wartością dodaną brutto a kosztami związanymi z zatrudnieniem i podatkami od producentów minus dotacje dla producentów. Nadwyżkę operacyjną netto uzyskuje się po odjęciu amortyzacji.

Dane z zakresu przepływów międzygałęziowych (np. popyt końcowy, produkcję globalną) podaje się najczęściej w cenach bazowych. Ceny bazowe otrzymuje się poprzez odjęcie od każdego przepływu w cenach nabywcy podatków od produktów pomniejszonych o dotacje do produktów oraz marż handlowych i transportowych. Dane dotyczące przepływów wyrobów i usług w bilansie przepływów międzygałęziowych w cenach bazowych dla produkcji krajowej otrzymuje się przez odjęcie od przepływów wyrobów i usług w cenach bazowych wyrobów i usług pochodzących z importu.

Podział wartości globalnej w poszczególnych gałęziach można wyrazić za pomocą tożsamości

$$\sum_k X_{ik} + Y_i = X_i \tag{1}$$

lub zakładając, że $a_{ik} X_k = X_{ik}$ otrzymuje się równość

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{x}, \tag{2}$$

gdzie macierz **A** jest macierzą nakładów bezpośrednich (lub bieżących) albo macierzą materiałochłonności bezpośredniej. W niektórych publikacjach, zwłaszcza niemieckojęzycznych jest też nazywana macierzą produkcji.

Wzór (2) definiuje tzw. statyczny model Leontiefa. Ma on liczne zastosowania, w tym i niestandardowe (por. np. [6], [10], [12]). Jak widać kluczową rolę w statycznym modelu Leontiefa odgrywa nieujemna macierz nakładów **A** bazująca na danych z I ćwiartki tablic przepływów międzygałęziowych. Jest ona także zasadniczą składową modelu dynamicznego Leontiefa stanowiącego uogólnienie modelu (2). Dla modeli dynamicznych IO definiuje się tzw. rozwiązanie zbilansowane, tzn. taką ścieżkę wzrostu sektorów gospodarki (tzw. ścieżka równowagi), na której nie zmieniają się ani proporcje produkcji sektorów ani ich tempo wzrostu (z roku na rok jest takie samo). Okazuje się, że w świetle hipotezy Samuelsona ten typ wzrostu gospodarki jest optymalny.

Naturalnym jest pytanie, od czego zależy tempo powrotu gospodarki, po wystąpieniu ewentualnego zaburzenia, do tak rozumianego stanu równowagi. Pewne wnioski w tym zakresie pojawiły się w literaturze ekonomicznej w kontekście dyskusji wokół tzw. hipotezy Brody, której omówieniu jest poświęcony następny podrozdział.

2. MACIERZE INPUT-OUTPUT

A. Brody [3] napisał, że wyznaczenie punktu lub ścieżki równowagi w przypadku dużych systemów Leontiefa lub von Neumanna wymaga mniejszej liczby iteracji niż w przypadku małych systemów, czyli systemów silnie zagregowanych. Z tej obserwacji dotyczącej obliczeń wywiódł przypuszczenie, że zdezagregowane systemy ekonomiczne szybciej osiągają proporcje Frobeniusa niż systemy silnie zagregowane. W obliczeniach, o których wspomniał autor chodziło głównie o iteracyjne uzyskanie rozwiązania zrównoważonego o określonej dokładności.

Jak wiadomo dla dowolnej macierzy **A** o dodatnich elementach zachodzi następująca równość

$$v_m = A^m v = \lambda_1^m x_1 + \lambda_2^m x_2 + \ldots + \lambda_n^m x_n, \tag{3}$$

gdzie $\mathbf{v} = \mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_n$ oraz λ_i i $\mathbf{x}_i$ oznaczają odpowiednio wartość własną i związany z nią wektor własny macierzy **A**. Wartości własne są ponumerowane według ich malejących modułów. Ze wzrostem m lewa strona będzie się stawała coraz bardziej podobna do tej składowej prawej strony, która jest związana z największą (dominującą) wartością własną, zwaną też wartością własną Frobeniusa lub liczbą Frobeniusa. Jest to liczba rzeczywista i dodatnia, co wynika z twierdzenia Frobeniusa.

Łatwo zauważyć, że liczba iteracji niezbędna do "dopasowania" $\mathbf{A}^m\mathbf{v}$ do $\lambda_1^m x_1$ jest zdeterminowana przez wielkość drugiej co do wielkości wartości własnej macierzy **A**. Jeśli rząd macierzy **A** jest równy 1, tzn. jeśli macierz ta składa się na przykład z takich samych liczb różnych od zera, to liczba Frobeniusa jest równa 1, a wszystkie pozostałe wartości własne takiej macierzy są równe 0. Dlatego iloczyn

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{v}_k \tag{4}$$

prowadzi do proporcji równowagi już po pierwszym mnożeniu macierzy **A** oraz $\mathbf{v}_k$. W tym przypadku zbieżność jest najszybszą z możliwych, gdyż proporcje równowagi są osiągane w pojedynczym kroku.

Macierz **A** utożsamiana jest z macierzą materiałochłonności bezpośredniej (nakładów bezpośrednich), która jest macierzą kwadratową o elementach nieujemnych. Jej wymiary zależą od stopnia agregacji, tzn. od ilości gałęzi gospodarki uwzględnionych w tablicy IO, która jest podstawą macierzy **A.**

Posługując się intuicją i eksperymentami komputerowymi Brody sformułował następującą hipotezę ([3], str. 255):

"Im większe wymiary ma (losowa) kwadratowa macierz **A**, *tzn. im więcej elementów (gałęzi lub branż) zawiera ta macierz, tym mniejszy jest stosunek jej drugiej wartości własnej do dominującej wartości własnej Frobeniusa i w konsekwencji tym szybsza jest jej zbieżność do stanu równowagi, czyli wejście na zbilansowaną ścieżkę wzrostu (ścieżka Frobeniusa)".*

W celu uzasadnienia swojej hipotezy Brody zdefiniował macierz losową o elementach niezależnych stochastycznie i mających rozkład jednostajny na przedziale (0, 1). Łatwo zauważyć, że dla współczynników tak zdefiniowanej losowej macierzy nakładów parametry opisowe wynoszą odpowiednio: wartość oczekiwana $E(a_{ij}) = \frac{1}{2}$, odchylenie standardowe $D(a_{ij}) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Widać, że $E(a_{.j}) = \frac{n}{2}$, gdzie $a_{.j}$ oznacza sumę j-tej kolumny macierzy **A**. Dzieląc wyrazy każdej kolumny tej macierzy przez jej wartość oczekiwaną $n/2$ otrzymuje się macierz $\mathbf{A}^*$ o postaci

$$A^* = A \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{n} & & \frac{2}{n} \\ & \ddots & \\ \frac{2}{n} & & \frac{2}{n} \end{bmatrix}.$$

Z założenia wynika, że współczynniki a^*_{ij} macierzy losowej $\mathbf{A}^*$ są niezależne stochastycznie i mają rozkład jednostajny na przedziale $\left(0, \frac{2}{n}\right)$. Wartości oczekiwane tych współczynników wynoszą $E(a^*_{ij}) = \frac{1}{n}$, zaś odchylenia standardowe $D(a^*_{ij}) = 1/(n\sqrt{3})$ dla każdych i, $j = 1, \ldots, n$. Zachodzi też $E(a^*_{.j}) = 1$ oraz $D(a^*_{.j}) = 1/(\sqrt{3n})$, gdzie $a^*_{.j}$ oznacza sumę elementów w j–tej kolumnie macierzy $\mathbf{A}^*$. Dlatego – jak przekonuje Brody – iloraz $\lambda_2(\mathbf{A}^*)/\lambda_1(\mathbf{A}^*)$ drugiej wartości własnej i pierwiastka Frobeniusa (ten iloraz jest oczywiście taki sam również dla macierzy **A**) będzie oscylował wokół liczby $1/(\sqrt{3n})$. Łatwo zauważyć, że rząd $(E(\mathbf{A}^*))=1$ oraz spektrum macierzy $E(\mathbf{A}^*)$ stanowią elementy zbioru $\{1,0,\ldots,0\}$ dla każdego n. Wraz z rosnącym n realizacje losowych współczynników a^*_{ij} stają się coraz bliższe ich wartości oczekiwanej ($1/n$). Dlatego spektrum macierzy $\mathbf{A}^*$ zmierza do spektrum $E(\mathbf{A}^*)$. Dla macierzy $\mathbf{A}^*$ zachodzi więc własność: im większe n, tym bliższa zera jest wartość $\lambda_2(A^*)$ (lub dla macierzy **A**: im większe n, tym bliższy 0 będzie iloraz $\lambda_2(\mathbf{A})/\lambda_1(\mathbf{A})$). Ten efekt potwierdziły wyniki zeprezentowanej w artykule symulacji.

Wkrótce po ukazaniu się pracy Brody dwaj autorzy Molnar i Simonovits [9] próbowali rozwiązać pokrewny problem. Zamiast macierzy losowej, o której pisał Brody zaproponowali ujęcie deterministyczne. Przeskalowali oni macierz **A** w ten sposób, aby miała pojedynczą (równą 1) dominującą wartość własną (wartość własna Frobeniusa).

Wymienieni autorzy rozważali macierze o nieujemnych elementach, których sumy w kolumnach wynoszą jeden. Takie macierze nazywa się w teorii prawdopodobieństwa macierzami stochastycznymi. Ich wartość własna Frobeniusa wynosi 1. Rozważania autorów dotyczyły macierzy stochastycznych spełniających dodatkowo warunek, że elementy tych macierzy są "bliskie" wartościom $1/n$.

Typowym przykładem ekonomicznym macierzy stochastycznej **A** jest macierz nakładów IO reprezentująca tzw. "*self-replacing system*" (statyczny zamknięty model Leontiefa – system reprodukcji prostej, tzn. gospodarka produkuje tylko tyle dóbr aby pokryć nakłady i nie więcej). Taki system może się sam odtwarzać, ale nie dostarcza żadnej nadwyżki ("produkcja dla produkcji", brak nadwyżek na rynek).

Formalne sformułowanie Molnara i Simonovitsa [9] warunku prawdziwości hipotezy Brody brzmi:

"Jeśli każdy element macierzy **A** odchyla się od 1/n nie więcej niż $\tau/n^{1+\varepsilon}$, to moduł drugiej wartości własnej jest nie większy niż τ/n^{ε}, gdzie τ oraz ε są pewnymi liczbami rzeczywistymi".

Wynik ten uzyskany na drodze analitycznej potwierdza hipotezę Brody, jednakże tylko w pewnym w szczególnym przypadku, a mianowicie, gdy macierz **A** jest "bliska" macierzy **E**, składającej się tylko z elementów $1/n$. Zauważmy, że jeśli w przykładzie Brody przeskalowałoby się macierz **A** do $\mathbf{A}^*$, to odchylenia realizacji zmiennych losowych a_{ij}^* od liczb $1/n$ zmniejszałyby się z rosnącym n i znikałyby w nieskończoności. Tak więc wynik Brody ma ścisły związek z cytowanym twierdzeniem Molnara i Simonovitsa.

3. DRUGA WARTOŚĆ WŁASNA MACIERZY NAKŁADÓW BIEŻĄCYCH W ZAMKNIĘTYM MODELU IO REPRODUKCJI PROSTEJ (*SELF-REPLACING SYSTEM*)

Zaraz na początku swojego artykułu Brody napisał, że "*estymator drugiej wartości własnej czysto losowej macierzy współczynników nakładów pokazuje, że jego wartość oczekiwana maleje monotonicznie do zera wraz ze wzrostem wymiarów tej macierzy*".

Jednak w dalszej części swojej pracy Brody przyznał, że "*A special distribution and/or a special structure of the matrix may still permit exceptions*" czyli, że dla specjalnych postaci rozkładów prawdopodobieństwa współczynników macierzy nakładów czy dla specjalnych postaci samych macierzy nakładów możliwe są odstępstwa i wyjątki od jego hipotezy.

Białas i Gurgul [1] zbadali hipotezę Brody w przypadku, gdy macierz **A** jest macierzą nakładów bezpośrednich, dla której sumy w kolumnach wynoszą 1. Macierz ta występuje w statycznym, zamkniętym modelu Leontiefa. W modelu tym pierwiastek Frobeniusa λ_1 (nieujemnej i nierozkładalnej) macierzy **A** wynosi 1. Dlatego dla innych wartości własnych musi zachodzi zależność:

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_i^m = 0, \text{ for } \quad i = 2, \ldots, n,$$

gdzie λ_i oznacza i-ty pierwiastek charakterystyczny macierzy **A**.

Jak wiadomo macierz $\mathbf{P}=[p_{ij}]\in \mathrm{IR}^{n\times n}$ nazywa się dodatnią i stochastyczną, gdy $p_{ij}>0$ $i,\ j=1,\ldots,n$ oraz $\sum_{i=1}^{n} p_{ij}=1,\ j=1,2,\ldots,n$. Dla takiej szczególnej macierzy (dodatniej i stochastycznej) hipoteza Brody została sformułowana przez autorów w postaci:

Jeśli $\mathbf{A}=[a_{ij}]\in \mathrm{IR}^{n\times n}$ jest macierzą dodatnią i stochastyczną oraz $\lambda_n=\max\limits_{1<i\le n}|\lambda_i(\mathbf{A})|$, to

$$\lambda_1(A)=1 \text{ i } \lim_{n\to\infty}\lambda_n=0.$$

Aby zbadać prawdziwość powyższej hipotezy Białas i Gurgul przytoczyli za książką Marcusa i Minca, [8] następujące dwie własności macierzy stochastycznych:

Własność 1. Wartości własne macierzy stochastycznych $\mathbf{P}=[p_{ij}]\in \mathrm{IR}^{n\times n}$ spełniają warunki:

$$|\lambda_i(P)|\le 1,\quad i=1,\ldots,n \text{ oraz } \quad \lambda_1(P)=1.$$

Własność 2. Jeśli $\mathbf{P}=[p_{ij}]\in \mathrm{IR}^{n\times n}$ jest macierzą stochastyczną oraz $\omega=\min\limits_{1\le i\le n} p_{ii}$, to

$$|\lambda_i(P)-\omega|\le 1-\omega \text{ dla } \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Poprzez kontrprzykład Białas i Gurgul pokazali następnie, że hipoteza Brody nie jest prawdziwa dla dowolnej stochastycznej macierzy nakładów.

Autorzy rozważyli macierz stochastyczną o elementach dodatnich wyrażoną wzorem

$$\bar{P}=[\bar{p}_{ij}], \tag{5}$$

gdzie:

$$\bar{p}_{11}=\frac{3}{4},$$

$\frac{3}{4}<\bar{p}_{ii}$ dla $i=2,3,\ldots,n$,

$\bar{p}_{ij}>0$ dla $i,\ j=1,2,\ldots,n,\ i\neq j$,

$\sum_{i=1}^{n}\bar{p}_{ij}=1$ dla $j=1,2,\ldots,n$.

Łatwo zauważyć, że dla macierzy (5) zachodzi

$$\omega=\min_{1\le i\le n}\bar{p}_{ii}=\frac{3}{4}.$$

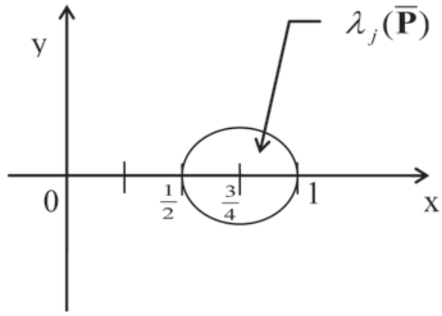
Biorąc pod uwagę *Własność 2* autorzy otrzymali, że dla dowolnego $j=1,\ldots,n$

$$\left|\lambda_j(\bar{P})-\frac{3}{4}\right|\le\frac{1}{4}. \tag{6}$$

Przyjmując $\lambda_j(\bar{P})=x+iy$, gdzie $i=\sqrt{-1}$. Powyższa równość może być zapisana w postaci:

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2\le\frac{1}{16}. \tag{7}$$

A to oznacza, że wszystkie wartości własne leżą w kole o środku w punkcie $(3/4, 0)$ i promieniu $1/4$.



Rysunek 1. Koło, w którym zawierają się wszystkie wartości własne (wzór (7))

Autorzy zauważyli, że $\lambda_1(\bar{P}) = 1$ oraz $|\lambda_j(\bar{P})| \geq \frac{1}{2}$ dla $j = 2, \ldots, n$. Dlatego $\lambda_n = \max_{1<i\leq n} |\lambda_i(\bar{P})| \geq \frac{1}{2}$ oraz $\lim_{n\to\infty} \lambda_n \neq 0$, co dowiodło, że hipoteza Brody sformułowana dla tego szczególnego przypadku nie jest prawdziwa.

Poza tym Białas i Gurgul udowodnili, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $\alpha \in (0, 1)$ istnieje dodatnia i stochastyczna macierz $\mathbf{P} = [p_{ij}] \in \mathrm{IR}^{n\times n}$ taka, że

$$\alpha \leq |\lambda_i(P)| \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ta teza wynikła stąd, że macierz

$$\mathbf{P} = [p_{ij}] \in \mathrm{IR}^{n\times n}, \tag{8}$$

gdzie: $p_{11} = \frac{1}{2}(\alpha + 1)$, $\frac{1}{2}(\alpha + 1) < p_{ii} < 1$, $i = 2, 3, \ldots, n$, $0 < p_{ij} < 1$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$ oraz $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$ jest macierzą dodatnią i stochastyczną. Dlatego $|\lambda_i(P)| \leq 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Stosując *Własność 2* w odniesieniu do macierzy (8) otrzymano $\omega = \min_{1\leq i\leq n} p_{ii} = \frac{1}{2}(\alpha+1)$. Tak więc $|\lambda_i(P)-\omega| \leq 1-\omega$ oraz $2\omega-1 \leq |\lambda_i(P)| \leq 1$. Przyjmując $\omega = \frac{1}{2}(\alpha + 1)$ autorzy otrzymali $\alpha \leq |\lambda_i(P)| \leq 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Podsumowując, Białas i Gurgul sformułowali wniosek, że druga wartość własna macierzy nakładów bieżących, w ogólnym przypadku nie maleje ze wzrostem wymiarów tej macierzy. Co więcej, dla każdej liczby rzeczywistej $\alpha \in (0, 1)$ można zbudować macierz dodatnią i stochastyczną o wymiarach $n \times n$, dla której moduły wszystkich wartości własnych będą większe lub równe α (niezależnie od wymiaru n).

4. UJĘCIE PROBABILISTYCZNE HIPOTEZY BRODY

Wyniki przedstawione wyżej oznaczają, że hipoteza mówiąca, że wraz ze wzrostem wymiaru macierzy nakładów opisującej gospodarkę wzrasta jej tempo powrotu do stanu równowagi nie jest prawdziwa dla każdego rodzaju macierzy. W szczególności nie jest prawdziwa dla pewnej grupy macierzy stochastycznych. Gdyby jednak spojrzeć na to zagadnienie od strony probabilistycznej, to okaże się, że wraz ze wzrostem n zmniejsza się istotnie prawdopodobieństwo wylosowania spośród wszystkich macierzy stochastycznych wymiaru $n \times n$ macierzy stochastycznej P posiadającej wymienione w pracy Białasa i Gurgula własności. To z kolei oznacza, że opisywana hipoteza może być rozważana jedynie na gruncie probabilistycznym.

Sytuacji, gdy elementy a_{ij} macierzy $\mathbf{A}$ są zmiennymi losowymi dotyczy treść artykułu Bidarda i Schattemana [2], w którym autorzy dowodzą następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1 ([2], twierdzenie 1)

Niech elementy a_{ij} dodatniej macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o wartości oczekiwanej μ, posiadającymi skończone momenty do rzędu k, $k>2$. Wówczas iloraz $|\lambda_2|/|\lambda_1|$ dwóch największych wartości własnych macierzy $\mathbf{A}$ zmierza stochastycznie do 0, gdy n zmierza do nieskończoności. Dokładniej:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Prob}\left\{\left|\lambda_2\right|/\left|\lambda_1\right| \le n^{-0{,}23}\right\} = 1 \tag{9}$$

Z tego twierdzenia wynika prawdziwość opisywanej hipotezy o szybkości powrotu do stanu równowagi dla macierzy o losowych i niezależnych elementach. Ponadto, Bidard i Schatteman pokazują tempo w jakim rozważany iloraz zmierza do zera. Z zaprezentowanego twierdzenia wynika, że iloraz modułów dwóch największych wartości własnych losowej macierzy $\mathbf{A}$ zmierza do zera w tempie $n^{-0{,}23}$. Jest to jednak mniej niż postulowane w pracy Brody [3] tempo $n^{-0{,}5}$. Zauważają to również sami autorzy sugerując, że w rzeczywistości tempo zbieżności do zera jest takie jak podpowiada intuicja, jednak zastosowane przez nich metody dowodu nie pozwalają na lepsze oszacowanie.

Problem ten rozstrzyga G.-S. Sun [11] przywołując twierdzenie uzyskane przez Goldberga i in. [4], które z jednej strony stanowi potwierdzenie hipotezy Brody dla przypadku macierzy losowej, a z drugiej daje odpowiednie oszacowanie tempa zmierzania modułu drugiej, wartości własnej do zera:

Twierdzenie 2 ([4] twierdzenie 1.1)

Niech $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathrm{IR}^{n\times n}$ będzie macierzą losową, której elementy są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie takimi, że $E(b_{ij}) = 1/n$ i $var(b_{ij}) = c/n^2$ (gdzie c jest pewną dodatnią stałą). Wówczas dla dowolnych $\varepsilon, p \in (0, 1)$ istnieje stała $N(\varepsilon, p)$ taka, że dla dowolnego $n > N(\varepsilon, p)$:

i) Prob $(|\lambda_1 - 1| < \varepsilon) \geq p$,
ii) Prob $(|\lambda_2| < \varepsilon) \geq p$.

Ponieważ w powyższym twierdzeniu p może być dowolnie bliskie 1, a ε może być dowolnie bliskie 0, to warunek *ii*) tezy oznacza, że druga co do modułu wartość własna takiej macierzy losowej zmierza stochastycznie do zera, podczas gdy największa wartość własna dąży do 1. Co więcej, Goldberg i in. wykazują, że dla dostatecznie dużych n, dla dowolnego $p \in (0, 1)$ istnieje stała $\alpha(p)$ taka, że

$$\text{Prob}\left(|\lambda_2| < \alpha(p)/\sqrt{n}\right) \geq p. \tag{10}$$

Zależność (10) oznacza, że modułdrugiej wartości własnej losowej macierzy **B** zmierza stochastycznie do zera w tempie $1/\sqrt{n}$ sugerowanym przez Brody.

Macierz losowa występująca w tezie twierdzenia 2 jest dosyć specyficzna, tzn. wartości oczekiwane jej elementów maleją wraz ze wzrostem wymiaru, podczas gdy, oryginalnie, hipoteza została sformułowana dla macierzy, której wartości oczekiwane wszystkich elementów są stałe.

Z jednej strony na macierz **B** można patrzeć jako na zaburzoną macierz stochastyczną, bo wartość oczekiwana sumy poszczególnych wierszy jest równa 1. Z drugiej strony tezę twierdzenia 2 można uogólnić na przypadek macierzy losowej, której elementy mają dowolną wspólną wartość oczekiwaną.

Jeżeli $\mathbf{A}_n = [a_{ij}] \in \mathrm{IR}^{n\times n}$ jest macierzą losową, której elementy a_{ij} są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o wartości oczekiwanej μ i skończonej wariancji σ^2 to wówczas możemy zdefiniować macierz $\mathbf{B}_n = [b_{ij}]$ następująco: $b_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{n\mu}$. Wówczas pomiędzy wartościami własnymi macierzy $\mathbf{A}_n$ i $\mathbf{B}_n$ zachodzi następująca zależność:

$$\lambda(\mathbf{A}_n) = n\mu\lambda(\mathbf{B}_n).$$

Z drugiej jednak strony mamy: $E(b_{ij}) = 1/n$ oraz $var(b_{ij}) = \dfrac{\sigma^2}{n^2\mu^2}$, czyli macierz $\mathbf{B}_n$ spełnia założenia wspomnianego powyżej twierdzenia 4.2. Oznacza to, że $\lambda_1(\mathbf{B}_n) \to 1$ i $\lambda_2(\mathbf{B}_n) \to 0$ stochastycznie. Z tego wynika również, że $\dfrac{|\lambda_2(\mathbf{A}_n)|}{|\lambda_1(\mathbf{A}_n)|} = \dfrac{|\lambda_2(\mathbf{B}_n)|}{|\lambda_1(\mathbf{B}_n)|}$ czyli iloraz modułów drugiej i pierwszej wartości własnej macierzy $\mathbf{A}_n$ zmierza stochastycznie do zera.

Tak więc, twierdzenie 2 potwierdza prawdziwość przypuszczenia Brody, że wraz ze wzrostem wymiaru macierzy losowej Leontiefa opisywana przez nią gospodarka szybciej powraca do stanu równowagi po wystąpieniu ewentualnego zaburzenia. Oczywiście dalej pozostaje pytanie czy rzeczywistą gospodarkę można opisać za pomocą macierzy, której wyrazy są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Dalsze badania własności macierzy losowych pozwoliły uogólnić wyniki z twierdzenia 2 poprzez osłabienie założenia o niezależności wyrazów macierzy **B**.

Twierdzenie 3 ([5], twierdzenie 1.1)

Niech $0 < \delta < 1$ i $0 < p < 1$. Niech macierz $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathrm{IR}^{n \times n}$ będzie postaci: $b_{ij} = a_{ij} + 1/n$, gdzie:

i) elementy a_{ij} są zmiennymi losowymi, przy czym wiersze macierzy **A** są niezależnymi n – wymiarowymi wektorami losowymi,

ii) $E(a_{ij}) = 0$ dla $i, j = 1, ..., n$

iii) $var(a_{ij}) \leq c \big/ n^2$ dla $i, j = 1, ..., n$

iv) $|cov(a_{ik}, a_{il})| \leq c \big/ n^3$ dla $i, k, l = 1, ..., n,\ k \neq l.$

Wówczas istnieje stała $N(\delta, p)$ taka, że dla dowolnego $n > N(\delta, p)$ zachodzi

$$\mathrm{Prob}\left(\max_{i=2,...,n} |\lambda_i| \leq \delta \right) \geq p \tag{11}$$

Teza twierdzenia 3 oznacza, że wszystkie wartości własne z wyjątkiem największej mają z prawdopodobieństwem co najmniej p moduły mniejsze niż δ. Z dowolności wyboru δ i p oznacza to, że moduły tych wartości własnych zmierzają stochastycznie do 0. W szczególności, więc zmierza do 0 również druga wartość własna macierzy **B**.

W porównaniu do wcześniejszego, twierdzenie 3 dopuszcza występowanie zależności pomiędzy elementami jednego wiersza, przy czym wraz ze wzrostem wymiaru macierzy siła tej zależności słabnie.

5. TEORIA A RZECZYWISTOŚĆ

Hipoteza postawiona przez Brody, że wraz ze wzrostem liczby gałęzi w gospodarce szybciej powraca ona na ścieżkę równowagi wygląda bardzo obiecująco tak z teoretycznego, jak i z praktycznego punktu widzenia. Oznacza bowiem, że postępująca globalizacja, wzrost powiązań pomiędzy gospodarkami na świecie i tworzenie się wielkiej światowej sieci wzajemnych połączeń powinno zwiększać stabilność i umożliwiać szybszy powrót gospodarek na ścieżkę równowagi po wystąpieniu ewentualnego szoku (zaburzenia). Doświadczenia ostatnich lat nie potwierdzają jednak tego przypuszczenia. Wręcz przeciwnie, ogólnoświatowa gospodarka, poprzez powstałe powiązania stała się bardziej podatna na występujące zakłócenia. Rodzi się więc pytanie, czy rozważana hipoteza znajduje potwierdzenie w danych rzeczywistych, tzn. czy w przypadku analizy rzeczywistych macierzy nakładów bezpośrednich można stwierdzić, że wraz ze wzrostem liczby uwzględnionych gałęzi produkcji maleje iloraz modułów dwóch największych wartości własnych. Aby to sprawdzić zostały przeanalizowane dane dotyczące przepływów międzygałęziowych w 2005 roku państw członkowskich Unii Europejskiej. Badanie zostało przeprowadzone na podstawie tablic input-output opublikowanych przez Eurostat. Dane te zostały uzupełnione o tablice przepływów międzygałęziowych Wielkiej Brytanii opublikowane przez Office of National Statistics.

Zaletą rozważania danych opublikowanych przez Eurostat i ONS jest ich jednorodność, ponieważ wszystkie zostały opracowane w oparciu o jednolity system rachunków narodowych zgodny z ESA'95. Rozważane tablice zawierają bilans przepływów międzygałęziowych w bieżących cenach bazowych dla produkcji krajowej w układzie 59x59 działów wyrażony w jednostkach monetarnych danego kraju[1]. Produkty zostały wyodrębnione zgodnie z klasyfikacją produktów i usług CPA 2002. Stosując ten sam system klasyfikacji dokonano agregacji danych tworząc symetryczne tablice przepływów międzygałęziowych o układzie 30×30 i 16×16 działów. Pozwoliło to zbadać empirycznie czy liczba wyodrębnionych gałęzi danej gospodarki (czyli wymiar tablicy input-output albo inaczej stopień ich agregacji) ma istotne znaczenie dla szybkości powrotu gospodarki na ścieżkę równowagi. Na podstawie tablic input-output obliczone zostały macierze współczynników materiałochłonności bezpośredniej, bo to o ich wartościach własnych mówi hipoteza Brody.

W tabeli 2 zaprezentowane zostały ilorazy modułów dwóch największych wartości własnych poszczególnych macierzy współczynników materiałochłonności. Nie potwierdzają one hipotezy Brody, że wraz ze wzrostem wymiaru macierzy **A** iloraz modułów dwóch największych wartości własnych maleje do zera, a tym samym gospodarka opisywana za pomocą takiej macierzy szybciej powraca na ścieżkę równowagi. W zdecydowanej większości przypadków widoczne jest coś wręcz przeciwnego – zwiększanie liczby rozważanych gałęzi produkcji powoduje wzrost wartości tego ilorazu. Jest tak w przypadku 17 spośród 22 rozważanych gospodarek. Ponadto tylko w przypadku Hiszpanii wartość ilorazu $|\lambda_2|/|\lambda_1|$ jest najmniejsza dla agregacji 59×59, podczas gdy dla 18 krajów iloraz ten przyjmuje wówczas wartość największą. Wzrost wartości rozważanego ilorazu wraz ze zwiększaniem się wymiaru tablicy input-output dobrze widoczny jest również w przypadku zarówno średniej, jak i mediany wyników uzyskanych dla poszczególnych krajów.

Dalsze zwiększanie wymiaru tablicy IO nie prowadzi do zmniejszenia wartości ilorazu. W przypadku danych dotyczących Wielkiej Brytanii, dla tablicy w układzie 108x108 działów, wartość ilorazu $|\lambda_2|/|\lambda_1|$ jest równa 0,698, czyli wciąż jest to więcej niż w agregacji 16×16 i 30×30.

Brak sugerowanej zależności pomiędzy ilorazem modułów wartości własnych a wymiarem macierzy nakładów bezpośrednich nie wydaje się czymś zaskakującym. Bowiem w rzeczywistości hipoteza w formie zaproponowanej przez Brody oznaczałaby, że wnioskowanie o szybkości powrotu do stanu równowagi danej gospodarki zależałoby istotnie od stopnia agregacji wykorzystanych danych. W zależności od liczby rozważanych gałęzi raz tempo to mogłoby być uznane za niskie, natomiast przy większej liczbie uwzględnionych gałęzi uzyskane wyniki wskazywałyby na możliwość szybkiego powrotu do stanu równowagi. Co więcej, prawdziwość tej hipotezy oznaczałaby, że stosując podział na dostatecznie dużą liczbę gałęzi, praktycznie każdą gospodarkę można by było uznać za bardzo szybko powracającą do stanu równowagi.

[1] Pierwotnie dane dotyczące gospodarki Wielkiej Brytanii uwzględniały podział na 108 grup produktów i usług, jednak dla celów porównawczych dokonano ich agregacji do 59 grup zgodnie z CPA 2002.

Tabela 2.

Ilorazy modułów dwóch największych wartości własnych macierzy współczynników nakładów bezpośrednich wybranych państw Unii Europejskiej

	Wymiar macierzy		
	n =16	*n* =30	*n* =59
Austria	0,76	0,76	0,84
Belgia	0,64	0,65	0,75
Czechy	0,55	0,64	0,96
Dania	0,49	0,77	0,73
Estonia	0,61	0,61	0,73
Finlandia	0,55	0,70	0,80
Francja	0,57	0,62	0,67
Grecja	0,42	0,65	0,77
Holandia	0,64	0,70	0,76
Hiszpania	0,73	0,74	0,71
Irlandia	0,75	0,82	0,88
Litwa	0,53	0,74	0,69
Niemcy	0,71	0,72	0,75
Polska	0,45	0,70	0,72
Portugalia	0,83	0,83	0,85
Rumunia	0,71	0,72	0,88
Słowacja	0,75	0,74	0,76
Słowenia	0,49	0,70	0,82
Szwecja	0,47	0,53	0,62
Węgry	0,52	0,70	0,71
Wielka Brytania	0,62	0,64	0,82
Włochy	0,53	0,58	0,56
średnia	0,61	0,69	0,76
Mediana	0,59	0,70	0,75

Źródło: obliczenia własne.

Jednak na kwestię szybkości powrotu gospodarki na ścieżkę równowagi można spojrzeć również z innej strony. Być może nie jest istotna liczba rozważanych gałęzi produkcji, czyli stopień agregacji tych samych danych, lecz znaczenie ma wielkość i różnorodność gałęzi samej gospodarki. Przypadek Unii Europejskiej, w której występują silne powiązania gospodarek poszczególnych krajów członkowskich, umożliwia analizę również tego aspektu hipotezy Brody. Dodatkowo więc zbadane zostały macierze materiałochłonności bezpośredniej oparte na tablicach przepływów międzygałęziowych w roku 2005 strefy Euro oraz całej Unii Europejskiej. Wyniki tych obliczeń zostały zebrane w tabeli 3.

Tabela 3.

Ilorazy modułów dwóch największych wartości własnych macierzy współczynników nakładów strefy Euro i całej Unii Europejskiej

	Wymiar macierzy		
	n =16	n =30	n =59
Strefa Euro	0,56	0,59	0,60
Unia Europejska	0,49	0,57	0,52

Źródło: obliczenia własne.

Iloraz $|\lambda_2|/|\lambda_1|$ obliczony dla całej unii Europejskiej jest dla wszystkich rozważanych agregacji mniejszy niż dla strefy Euro. Co więcej, dla n =59 jest on niższy niż w przypadku jakiegokolwiek badanego państwa członkowskiego. Podobnie jest dla bardziej zagregowanych tablic: dla n =30 iloraz $|\lambda_2|/|\lambda_1|$ osiąga mniejszą wartość tylko w przypadku Szwecji, natomiast dla n =16 jest tak w przypadku Danii, Grecji, Polski i Szwecji. Te wyniki zdają się potwierdzać hipotezę, że większa gospodarka szybciej powraca do stanu równowagi. Tak więc liczba rozważanych gałęzi produkcji czyli stopień agregacji danych dotyczących przepływów międzygałęziowych nie ma istotnego znaczenia dla liczby iteracji niezbędnych do wyznaczenia wektora Frobeniusa macierzy **A**, a pośrednio szybkości powrotu gospodarki do stanu równowagi, lecz jej wielkość.

6. WNIOSKI

Dyskusja zapoczątkowana przez artykuł Brody [3] trwa już kilkanaście lat. Z przeprowadzonych tu rozważań wynika, że sformułowana w tym artykule hipoteza może być prawdziwa tylko w pewnych szczególnych wypadkach dotyczących macierzy losowych o specjalnych własnościach. Macierze nakładów bezpośrednich nie mają jednak tych własności. Ani kolumny, ani wiersze nie są ani losowe, ani niezależne. Każda gospodarka jest „systemem naczyń połączonych”. Poszczególne kategorie jednych sektorów zależą od pozostałych sektorów. To przenosi się na powiązania pomiędzy kolumnami czy wierszami macierzy nakładów. Wyniki empiryczne zaprezentowane w tym artykule mogą być podstawą do przypuszczenia, że nie stopień agregacji decyduje o szybkości osiągnięcia stanu równowagi danej gospodarki, ale jej wielkość (mierzona np. wielkością PKB), struktura oraz siła wzajemnych powiązań pomiędzy poszczególnymi gałęziami.

AGH Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

LITERATURA

[1] Białas S., Gurgul H., (1998), On a Hypothesis about the Second Eigenvalue of the Leontief Matrix, *Economic Systems Research-Journal of International Input-Output Association*, vol.10, no.3, 285-289.
[2] Bidard C., Schatteman T., (2001), The spectrum of random matrices, *Economic Systems Research-Journal of International Input-Output Association*, vol. 13, 289-298.
[3] Brody A., (1997), The Second Eigenvalue of the Leontief Matrix, *Economic Systems Research-Journal of International Input-Output Association*, vol. 9, no. 3, 253-258.
[4] Goldberg G., Okuney P., Neumann M., Schneider H., (2000), Distribution of subdominant eigenvalues of random matrices, *Methodol. Comput. Appl. Probab.*, 2, 137-151.
[5] Goldberg G., Neumann M., (2003), Distribution of Subdominant Eigenvalues of Matrices with Random Rows, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 24, no. 3, 747-761.
[6] Gurgul H., Majdosz P., (2006), Interfund Linkages Analysis: The Case of the Polish Pension Fund Sector, *Economic Systems Research-Journal of International Input-Output Association*, vol. 18, no.1, 1-27.
[7] Leontief W. W., (1941), *The Structure of American Economy 1919-1939*; *An Empirical Application of Equilibrium Analysis*, New York.
[8] Marcus M., Minc H., (1964), *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalites*, (Boston, Allyn and Bacon).
[9] Molnar G., Simonovits A., (1998), A Note on the Subdominant Eigenvalue of a Large Stochastic Matrix, *Economic Systems Research-Journal of International Input-Output Association*, vol.10, no.1, 79-82.
[10] Plich M., (2003), Budowa i zastosowanie wielosektorowych modeli ekonomiczno-ekologicznych, Wydawnictwo Uł (rozprawa habilitacyjna).
[11] Sun G.-Z., (2008), The First Two Eigenvalues of Large Random Matrices and Brody's Hypothesis on the Stability of Large Input-Output Systems, *Economic Systems Research-Journal of International Input-Output Association*, vol. 20, no. 4, 429-432.
[12] Tomaszewicz Ł., (1994), Metody analizy input-output, Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 1994.

HIPOTEZA BRODY W ŚWIETLE WYNIKÓW BADAŃ EMPIRYCZNYCH

Streszczenie

W tym artykule została przedstawiona dyskusja hipotezy Brody sformułowanej w 1997 roku, a dotyczącej szybkości zbieżności do stanu równowagi (proporcji produkcji wyznaczonych przez wektor własny Frobeniusa) dużych systemów input-output lub systemów von Neumanna w zależności od ich wymiarów. Brody napisał, iż im większa macierz nakładów **A**, to znaczy im więcej zawiera ona elementów (sektorów i branż) tym szybciej system, w którym występuje ta macierz jest zbieżny do stanu równowagi. Od tego czasu toczy się dyskusja nad matematycznymi aspektami tej hipotezy. W tym artykule został zamieszczony przegląd prac nawiązujących do rozważanej hipotezy. Część z nich dostarcza dowodów na prawdziwość hipotezy, część zaś dowodzi, że hipoteza na ogół nie jest prawdziwa. W artykule zostały wyróżnione dwa kierunki badań stochastyczny i deterministyczny. Tylko przy bardzo wyszukanych założeniach odnośnie losowości macierzy A zachodzi hipoteza Brody. Jednakowoż w ogólnym przypadku, jak pokazaliśmy w tym artykule, hipoteza Brody nie jest prawdziwa. Jest to wniosek z obliczeń dla różnych agregacji (16, 30 i 59) wykonanych dla całej Unii Europejskiej, strefy Euro i poszczególnych krajów członkowskich.

Zwiększenie stopnia agregacji nie spowodowało na ogół wzrostu stosunku drugiej do pierwszej wartości własnej macierzy **A**. Najmniejszy stosunek obu wartości własnych miał miejsce w przypadku całej Unii Europejskiej, potem strefy Euro i dalej poszczególnych państw. Stąd wysnuto wniosek, że szybkość zbieżności danej gospodarki do stanu równowagi nie zależy od liczby wyróżnionych w niej sektorów, lecz od jej wielkości i być może stopnia współzależności tych sektorów (duże gospodarki szybciej zmierzają do stanu równowagi niż mniejsze gospodarki).

Słowa kluczowe: modele input-output, równowaga, wartości własne, hipoteza Brody

BRODY'S HYPOTHESIS VERSUS RESULTS OF EMPIRICAL RESEARCH

A b s t r a c t

This paper presents discussion about the importance of degree of aggregation in input-output systems for speed of convergence to the equilibrium. The basis is the hypothesis stated by Brody (1997) that the greater the dimension of flow coefficients matrix **A** is, the faster the economy convergences to the equilibrium because the ratio between modulus of the subdominant and dominant eigenvalue declines to zero. Since then, several papers have been published to verify mathematical aspects of the hypothesis. The development of random matrices theory provided theorems that confirm the hypothesis in the case of i.i.d. elements of flow coefficients matrix. However, in the case of deterministic input-output table, there were constructed counterexamples where the ratio between subdominant and dominant eigenvalue does not decline when the size of the matrix increases to infinity and the degree of aggregation does not influence the speed of convergence to the equilibrium.

This paper verifies how the hypothesis fits to empirical data. Analysis of different aggregation of input-output tables for European Union, Euro zone and several European countries shows that increasing the number of branches in IO table does not reduce the ratio of modulus of subdominant and dominant eigenvalues of the flow coefficients matrix A. Hence, the speed of convergence to the equilibrium does not depend on the number of sectors in IO table but rather on the size of economy and relationships between its sectors. (i.e. large economies converge faster to equilibrium than small economies).

Key words: input-output models, equlibrium, eigenvalues, Brody's conjecture