PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LIX – ZESZYT 2 – 2012

EMIL PANEK, HENRYK J. RUNKA

DWA TWIERDZENIA O MAGISTRALI W MODELU VON NEUMANNA

1. WSTĘP

W pracy [5] przedstawiono prosty dowód „słabego" twierdzenia o magistrali w modelu von Neumanna, w którym w charakterze kryterium wzrostu przyjęto wartość (mierzonej w cenach równowagi) produkcji wytworzonej w końcowym okresie ustalonego horyzontu $0,1,\ldots,t_1$. Nawiązując do niej obecnie prezentujemy dwie wersje – „słabą" i „bardzo silną" – twierdzenia o magistrali w modelu von Neumanna, w którym rolę kryterium wzrostu gra łączna wartość mierzonej w cenach równowagi produkcji wytworzonej w całym horyzoncie $0,1,\ldots,t_1$.

Specyfika dowodzonego w punkcie 4 „bardzo silnego" twierdzenia o magistrali polega na tym iż okazuje się, że optymalny proces wzrostu, który w pewnym okresie dociera do magistrali, pozostaje na niej wszędzie dalej („wejście" optymalnego procesu na magistralę jest bezpowrotne).

Obowiązują oznaczenia z pracy [5].

2. TECHNOLOGICZNA I EKONOMICZNA EFEKTYWNOŚĆ PRODUKCJI. RÓWNOWAGA VON NEUMANNA

W modelu von Neumanna o zużyciu oraz produkcji n towarów decyduje technologia produkcji utożsamiana z pewną liczbą m tzw. bazowych procesów technologicznych tworzących wiersze neumannowskich macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

nakładów (zużycia) i wyników (produkcji).

Wiersz $a_j = (a_{ji}, ..., a_{jn}) \geq 0$ macierzy A nazywamy wektorem nakładów (zużycia), a wiersz $b_j = (b_{j1}, ..., b_{jn}) \geqq 0$ wektorem wyników (produkcji) w j-tym bazowym procesie technologicznym stosowanym z jednostkową intensywnością. Model jest liniowy w tym sensie, że jeżeli przez $v = (v_1, ..., v_m)$ oznaczymy nieujemny wektor intensywności stosowania procesów technologicznych, to z nakładów $vA = \sum_{j=1}^{m} v_j a_j$

można wytworzyć produkcję $vB = \sum_{j=1}^{m} v_j b_j$. Każda para (vA, vB), gdzie $v \geqq 0$, tworzy dopuszczalny proces produkcji. Zbiór (stożek) $Z = \{(x,\ y)\,|x = vA, y = vB; v \geqq 0\}$ tworzy neumannowską przestrzeń produkcyjną.

O neumannowskich macierzach nakładów A i wyników B zakładamy, że

(I) Każdy wiersz nieujemnej macierzy A zawiera element dodatni (tzn. w każdym bazowym procesie zużywany jest co najmniej jeden towar),

(II) Każda kolumna nieujemnej macierzy B zawiera element dodatni (tzn. każdy towar jest wytwarzany w co najmniej jednym bazowym procesie).[1]

Liczbę

$$\alpha(v) = \max\{\alpha\,|\alpha vA \leqq vB\}$$

nazywamy wskaźnikiem technologicznej efektywności procesu $(x,\ y) = (vA,\ vB)$. Nietrudno wykazać, że funkcja α jest ciągła i dodatnio jednorodna stopnia 0 na

$$R^m_+ \setminus \{0\} = \{v \in R^m \mid v \geq 0\}$$

oraz ze istnieje taki określony z dokładnością do struktury wektor intensywności $\bar{v} \geq 0$, iż

$$\alpha(\bar{v}) = \alpha_N = \max_{v \geq 0} \alpha(v) > 0.$$

Nazywamy go wektorem intensywności stosowania bazowych procesów technologicznych w modelu von Neumanna. Odpowiadające mu wektory $\bar{x} = \bar{v}A$, $\bar{y} = \bar{v}B$ nazywamy optymalnymi wektorami nakładów (zużycia) i wyników (produkcji). Liczbę α_N nazywamy optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektywności. Zakładamy, że

(III) Istnieje taki optymalny wektor intensywności $\bar{v} \geq 0$, że $\bar{v}B > 0$.

Innymi słowy, istnieje optymalny proces produkcji, w którym wytwarzane są wszystkie towary. Warunek (III) nazywamy warunkiem regularności modelu. Warunek ten pociąga za sobą warunek (II), który od tej chwili staje się w związku z tym zbędny.

Weźmy dowolny wektor intensywności $v \geq 0$ i oznaczmy przez $p \geq 0$ n-wymiarowy wektor (kolumnowy) cen towarów. Liczbę $\beta(v, p) = \frac{vBp}{vAp}$ (tam gdzie jest określona) nazywamy wskaźnikiem ekonomicznej efektywności procesu $(x, y) = (vA, vB)$, natomiast liczbę

$$\beta_p = \max_{v \geq 0} \frac{vBp}{vAp}$$

(tam gdzie jest określona) nazywamy optymalnym wskaźnikiem ekonomicznej efektywności produkcji (przy cenach p).

[1] Z głębszą interpretacją ekonomiczną modelu von Neumanna można zapoznać się np. w pracy [1] oraz [4] pkt. 5.2.

□ **Twierdzenie 1.** Przy założeniach (I), (III) istnieją ceny $\bar{p} \geq 0$, przy których

$$\beta_{\bar{p}} = \max_{v \geq 0} \frac{vB\bar{p}}{vA\bar{p}} = \frac{\bar{v}B\bar{p}}{\bar{v}A\bar{p}} = \beta(\bar{v}, \bar{p}) = \alpha(\bar{v}) = \alpha_N > 0.$$

■

Nazywamy je cenami (równowagi) von Neumanna. Z dowodem można zapoznać się w pracy [5], twierdzenie 2. O trójce $\{\alpha_N, \bar{v}, \bar{p}\}$ spełniającej warunek (1) mówimy, że charakteryzuje gospodarkę von Neumanna w równowadze. Dochodzi w niej do zrównania efektywności ekonomicznej gospodarki z jej efektywnością technologiczną i jest to najwyższa efektywność, jaką może osiągnąć gospodarka, zapewniając równocześnie najszybsze tempo równomiernego wzrostu (będzie o nim mowa w punkcie 3).

Ceny $\bar{p}$ w równowadze są określone z dokładnością do struktury. Z twierdzenia 1 wynika w szczególności, że dla dowolnego wektora intensywności $v \geq 0$ spełniony jest warunek

$$vB\bar{p} - \alpha_N vA\bar{p} \leq 0, \tag{2}$$

tzn. $\beta(v, \bar{p}) = \dfrac{vB\bar{p}}{vA\bar{p}} \leq \alpha_N$ i jedynie dla $v = \bar{v}$ zachodzi $\beta(\bar{v}, \bar{p}) = \alpha_N$. Jedynie w równowadze dochodzi do zrównania ekonomicznej efektywności produkcji z jej efektywnością technologiczną. Przy cenach równowagi nigdzie efektywność ekonomiczna produkcji nie jest wyższa od efektywności technologicznej.

3. WZROST. „SŁABY” EFEKT MAGISTRALI

Zakładamy, że czas zmienia się skokowo, $t = 0,1,\ldots,t_1$. Symbolem $v(t) = (v_1(t), ..., v_n(t))$ oznaczamy wektor intensywności stosowania bazowych procesów w okresie t,

$p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix}$ jest wektorem cen towarów w okresie t. Standardowo zakładamy, że nakłady $x(t+1) = v(t+1)A$ muszą mieć (w zamkniętej gospodarce) pokrycie w produkcji z okresu poprzedniego $y(t) = v(t)B$, czyli

$$\begin{aligned} v(t+1)A &\leqq v(t)B, \quad t = 0, 1, \ldots, t_1 - 1, \\ v(t) &\geqq 0, \quad t = 0, 1, \ldots, t_1, \end{aligned} \tag{3}$$

Niech $v^0 > 0$ będzie intensywnością z jaką bazowe procesy technologiczne są stosowane w okresie początkowym $t = 0$:

$$v(0) = v^0. \tag{4}$$

Rozwiązanie $\{v(t)\}_{t=0}^{t_1}$ układu (3)-(4) nazywamy (v^0, t_1) – dopuszczalną trajektorią intensywności. Odpowiadające im ciągi $\{x(t)\}_{t=0}^{t_1}$, $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$, gdzie $x(t) = v(t)A$, $y(t) =$

$v(t)B$ nazywamy dopuszczalnymi trajektoriami nakładów i produkcji. O trójce ciągów $\{v(t), x(t), y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ mówimy, że opisuje dopuszczalny proces wzrostu w modelu von Neumanna.

Jeżeli $(v^0 t_1)$ – dopuszczalna trajektoria intensywności jest postaci

$$v(t) = \gamma^t v^0, \quad \text{gdzie } \gamma > 0, \tag{5}$$

wówczas nazywamy ją trajektorią stacjonarną z tempem wzrostu γ. Podstawiając (5) do (3) widzimy, że stacjonarna trajektoria intensywności z tempem γ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rozwiązanie układu nierówności:

$$\gamma v^0 A \leqq v^0 B,$$

$$v^0 \geq 0, \quad \gamma > 0.$$

Nietrudno zauważyć, że przy założeniach (I), (III) układ ten jest niesprzeczny. Co więcej, istnieje rozwiązanie $\bar{\gamma} > 0$, $\bar{v} \geq 0$ zadania

$$\max \gamma$$

$$\gamma v A \leqq v B \tag{6}$$

$$v \geq 0,$$

spełniające warunek $\bar{\gamma} = \alpha_N = \alpha(\bar{v})$ oraz warunek regularności $\bar{v}B > 0$ (zob. [5], twierdzenie 1). Trajektorię intensywności

$$\bar{v}(t) = \alpha_N^t \bar{v}$$

nazywamy optymalną stacjonarną trajektorią intensywności w modelu von Neumanna. Odpowiada jej optymalna stacjonarna trajektoria nakładów $\bar{x}(t) = \bar{v}(t)A = \alpha_N^t \bar{v}A$ i produkcji $\bar{y}(t) = \bar{v}(t)B = \alpha_N^t \bar{v}B$. O trójce trajektorii $\{\bar{v}(t), \bar{x}(t), \bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ mówimy, że opisują optymalny stacjonarny proces wzrostu. W optymalnym stacjonarnym procesie wzrostu

$$\frac{\bar{v}(t)}{\|\bar{v}(t)\|} = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} = \bar{s}^v = const.$$

$$\frac{\bar{y}(t)}{\|\bar{y}(t)\|} = \frac{\bar{v}B}{\|\bar{v}B\|} = \bar{s}^y = const.$$

(tutaj i wszędzie dalej $\|x\| = \sum_i |x_i|$). Wektory $\bar{s}^v, \bar{s}^x, \bar{s}^y$ charakteryzują strukturę intensywności stosowania bazowych procesów technologicznych, strukturę nakładów i strukturę produkcji w optymalnym stacjonarnym procesie wzrostu.

Półproste

$$N^v = \{\lambda \bar{s}^v \mid \lambda > 0\},$$

$$N^x = \{\lambda\bar{s}^x \mid \lambda > 0\},$$

$$N^y = \{\lambda\bar{s}^y \mid \lambda > 0\}$$

nazywamy magistralami (promieniami von Neumanna) w przestrzeni intensywności, nakładów i produkcji.

Każda optymalna stacjonarna trajektoria leży na właściwej magistrali, na której wzrost odbywa się w maksymalnym, technologicznie dopuszczalnym tempie α_N (ze stopą $\alpha_N - 1$). Wobec założenia regularności modelu (III) struktura produkcji $\bar{s}^y$ na magistrali N^y jest wektorem dodatnim. W celu zapewnienia jednoznaczności magistral dodatkowo przyjmiemy następujące założenie:

(IV) Jeżeli $v \notin N^v$**, to ekonomiczna efektywność** $\beta(v, \bar{p}) = \dfrac{vB\bar{p}}{vA\bar{p}}$ **procesu** $(x, y) = (vA, vB)$ **jest niższa od optymalnej.**

W myśl tego założenia poza magistralą ekonomiczna efektywność procesu $(x, y) = (vA, vB)$ spełnia warunek $\beta(v, \bar{p}) = \dfrac{vB\bar{p}}{vA\bar{p}} < \alpha_M$. Łatwo zauważyć, że przy założeniu (IV) warunek ten zachodzi także gdy $x = vA \notin N^x$ lub $y = vB \notin N^y$.

□ **Twierdzenie 2.** Jeżeli spełnione są założenia (I), (III), (IV), to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta_\varepsilon > 0$, że jeżeli zachodzi którykolwiek z warunków

$$\left\| \frac{v}{||v||} - \bar{s}^v \right\| \geq \varepsilon \quad , \quad \left\| \frac{x}{||x||} - \bar{s}^x \right\| \geq \varepsilon \quad , \quad \left\| \frac{y}{||y||} - \bar{s}^y \right\| \geq \varepsilon,$$

gdzie $x = vA,\ y = vB$, to

$$\beta(v, p) = \frac{vB\bar{p}}{vA\bar{p}} \leq \alpha_N - \delta_\varepsilon. \tag{7}$$

■

Z dowodem można zapoznać się w pracy [5] (twierdzenie 3).[2] W tejże pracy prześledzone zostało rozwiązanie $\{v^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ następującego dynamicznego, liniowego zadania maksymalizacji wartości produkcji, mierzonej w cenach $\bar{p} \geq 0$ równowagi von Neumanna, wytworzonej w końcowym okresie horyzontu $0,1,\ldots,t_1$:

$$\max v(t_1)B\bar{p}$$

$$p.w.(3) - (4)$$

$$\text{(wektor } v^0 \text{ ustalony).}$$

Pokazaliśmy tam, że przy założeniach (I), (III), (IV) prawie zawsze – niezależnie od długości horyzontu, czasu $0,1,\ldots,t_1$ – struktura optymalnej trajektorii intensywności

[2] Dowód nawiązuje do artykułu R. Radnera [6].

$\dfrac{v^*(t)}{\|v^*(t)\|}$ różni się dowolnie mało od struktury intensywności na magistrali N^v, struktura nakładów $\dfrac{x^*(t)}{\|x^*(t)\|}$ różni się dowolnie mało od struktury nakładów na magistrali N^x, a struktura produkcji $\dfrac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|}$ różni się dowolnie mało od struktury produkcji na magistrali N^y.

Obecnie wynik ten uogólnimy na przypadek, kiedy kryterium oceny procesów jest wyrażona w cenach równowagi wartość produkcji wytworzonej w całym horyzoncie $0,1,\ldots,t_1$.

Interesuje nas rozwiązanie następującego zadania:

$$\max \sum_{t=0}^{t_1} v(t)\, B\, \bar{p} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} v(t+1)A \leqq v(t)B, \quad t = 0, 1, ..., t_1 - 1 \\ v(t) \geqq 0, \quad t = 0, 1, ..., t_1 \\ v(0) = v^0 > 0 \\ (\text{wektor } v^0 \text{ ustalony}) \end{gathered} \tag{9}$$

Niech ciąg $\{v^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ będzie rozwiązaniem tego zadania. Tradycyjnie nazywamy go $(v^0, t_1, \bar{p})$ – optymalną trajektorią intensywności. Ciągi $\{x^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, gdzie $x^*(t) = v^*(t)A$ oraz $y^*(t) = v^*(t)B$, nazywamy optymalnymi trajektoriami nakładów i produkcji. O trójce $\{v^*(t), x^*(t), y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ mówimy, że opisuje optymalny proces wzrostu w modelu von Neumanna.

□ **Twierdzenie 3** („Słabe" twierdzenie o magistrali)

Weźmy dowolny $(v^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces $\{v^*(t), x^*(t), y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$. Jeżeli spełnione są założenia (I), (III), (IV) oraz tempo wzrostu gospodarczego na magistrali α_N jest większe od 1 (stopa wzrostu $\alpha_N - 1 > 0$), to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε, że liczba okresów, w których zachodzi którykolwiek z warunków

$$\left\| \frac{v^*(t)}{\|v^*(t)\|} - \bar{s}^v \right\| \geq \varepsilon, \quad \left\| \frac{x^*(t)}{\|x^*(t)\|} - \bar{s}^x \right\| \geq \varepsilon, \quad \left\| \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|} - \bar{s}^s \right\| \geq \varepsilon \tag{10}$$

nie przekracza k_ε. Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu(tj. od t_1).

Dowód. Weźmy $(v^0, t_1, \bar{p})$ – optymalną trajektorią intensywności $\{v^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$. Wówczas

$$v^*(t+1)\, A \leqq v^*(t)\, B\,,$$

a po przemnożeniu obu stron nierówności przez wektor cen równowagi $\bar{p}$:

$$v^*(t+1)\, A\, \bar{p} \leq v^*(t)\, B\, \bar{p}, \quad t = 0, 1, ..., t_1 - 1.$$

Zgodnie z (2)

$$v^*(t)\,B\,\bar{p} \le \alpha_N v^*(t) A\,\bar{p}, \quad t = 0, 1, ..., t_1,$$

skąd otrzymujemy układ nierówności:

$$\begin{aligned} \alpha_N^{-1} v^*(1) B\bar{p} &\le v^*(1)\,A\,\bar{p} \le v^0\,B\,\bar{p} \le \alpha_N v^0 A\,\bar{p} \\ \alpha_N^{-1} v^*(2) B\bar{p} &\le v^*(2)\,A\,\bar{p} \le v^*\,B\,\bar{p} \le \alpha_N^2 v^0 A\,\bar{p} \\ &\vdots \\ \alpha_N^{-1} v^*(t_1) B\bar{p} &\le v^*(t_1)\,A\,\bar{p} \le v^*(t_1 - 1)\,B\,\bar{p} \le \alpha_N^{t_1} v^0 A\,\bar{p}. \end{aligned} \tag{11}$$

Załóżmy, że w okresach $\tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_k \le t_1$ trajektoria $\{v^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ nie spełnia warunku (10). Wówczas, zgodnie z twierdzeniem 2 (warunek (7)), istnieje taka liczba $\delta_\varepsilon^v > 0$, że

$$v^*(t)\,B\,\bar{p} \le (\alpha_N - \delta_\varepsilon^v) v^*(t) A\,\bar{p}, \quad t = \tau_1, ..., \tau_k. \tag{12}$$

Łącząc warunki (11), (12) dochodzimy do układu nierówności:

$$\begin{gathered} v^*(1)\,B\,\bar{p} \le \alpha_N^2 v^0 A\,\bar{p} \\ v^*(2)\,B\,\bar{p} \le \alpha_N^3 v^0 A\,\bar{p} \\ \vdots \\ v^*(t_1 - k)\;B\,\bar{p} \le \alpha_N^{t_1-k+1} v^0 A\,\bar{p} \\ v^*(t_1 - k + 1)\;B\,\bar{p} \le \alpha_N^{t_1-k+1}(\alpha_N - \delta_\varepsilon^v) v^0 A\,\bar{p} \\ \vdots \\ v^*(t_1)\;B\,\bar{p} \le \alpha_N^{t_1-k+1}(\alpha_N - \delta_\varepsilon^v)^k v^0 A\,\bar{p} \end{gathered}$$

a stąd

$$\sum_{t=1}^{t_1} v^*(t)\,B\,\bar{p} \le v^0 A\,\bar{p} \sum_{t=2}^{t_1-k+1} \alpha_N^t + \alpha_N^{t_1-k+1} v^0 A\,\bar{p} \sum_{\tau=1}^{k} (\alpha_N - \delta_\varepsilon^v)^\tau. \tag{13}$$

Ponieważ $v^0 > 0$, więc przy założeniach (I), (III) istnieje taka liczba $\sigma > 0$, że $0 < \sigma\,\bar{s}^v A \leqq v^0 B$ i wobec tego istnieje $(v^0 t_1)$ – dopuszczalna trajektoria intensywności $\{\tilde{v}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci:

$$\tilde{v}(t) = \begin{cases} v^0, & \text{dla} \quad t = 0 \\ \sigma \bar{s}^v \alpha_N^{t-1}, & \text{dla} \quad t = 1, ..., t_1. \end{cases}$$

Wówczas

$$\sum_{t=1}^{t_1} v^*(t)\,B\,\bar{p} \ge \sum_{t=1}^{t_1} \tilde{v}(t)\,B\,\bar{p} = \sigma\,\bar{s}^v B\,\bar{p} \sum_{t=1}^{t_1} \alpha_N^{t-1}. \tag{14}$$

Z (13), (14) otrzymujemy nierówność

$$v^0 A\,\bar{p} \sum_{t=2}^{t_1-k+1} \alpha_N^t + \alpha_N^{t_1-k+1} v^0 A\,\bar{p} \sum_{\tau=1}^{k} (\alpha_N - \delta_\varepsilon^v)^\tau \geq \sigma\,\bar{s}^v B\,\bar{p} \sum_{t=1}^{t_1} \alpha_N^{t-1}, \tag{15}$$

a stąd

$$\sum_{t=2}^{t_1-k+1} \alpha_N^t + \alpha_N^{t_1-k+1} \sum_{\tau=1}^{k} (\alpha_N - \delta_\varepsilon^v)^\tau \geq \frac{\sigma\,\bar{s}^v B\bar{p}}{v^0 A\bar{p}} \sum_{t=1}^{t_1} \alpha_N^{t-1} > 0,$$

czyli

$$\frac{\alpha_N^2(\alpha_N^{t_1-k} - 1)}{\alpha_N - 1} + \alpha_N^{t_1-k+1} \frac{(\alpha_N - \delta_\varepsilon^v)[(\alpha_N - \delta_\varepsilon^v)^k - 1]}{\alpha_N - \delta_\varepsilon^v - 1} \geq \frac{\sigma\,\bar{s}^v B\bar{p}}{v^0 A\bar{p}} \frac{\alpha_N^{t_1} - 1}{\alpha_N - 1} > 0.$$

Biorąc liczbę $\delta_\varepsilon^v > 0$ dostatecznie małą (tak aby $\alpha_N - 1 - \delta_\varepsilon^v > 0$) otrzymujemy:

$$0 < C = \frac{\sigma\,\bar{s}^v B\bar{p}}{v^0 A\bar{p}} \leq A(t_1, k) + B(t_1, k), \tag{16}$$

gdzie

$$A(t_1, k) = \frac{\alpha_N^2(\alpha_N^{t_1-k} - 1)}{\alpha_N^{t_1} - 1} \to 0 \text{ przy } k \to +\infty, t_1 \geq k$$

oraz

$$B(t_1, k) = \frac{\alpha_N^{t_1-k+1}(\alpha_N - 1)}{\alpha_N^{t_1} - 1} \cdot \frac{(\alpha_N - \delta_\varepsilon^v)[(\alpha_N - \delta_\varepsilon^v)^k - 1]}{\alpha_N - \delta_\varepsilon^v - 1} \to 0 \text{ przy } k \to +\infty, t_1 \geq k,$$

co przeczy (16). Istnieje zatem taka, niezależna od długości horyzontu t_1 (natomiast zależna od ε) liczba naturalna k_ε, że liczba okresów czasu, w których zachodzi warunek $\left\| \frac{v^*(t)}{\|v^*(t)\|} - \bar{s}^v \right\| \geq \varepsilon$, nie przekracza k_ε. Dowód analogicznych własności optymalnych trajektorii nakładów $\{x^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ i produkcji $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ przebiega podobnie.

■

4. „BARDZO SILNE” TWIERDZENIE O MAGISTRALI

„Słabe” twierdzenia o magistrali głoszą, że optymalne procesy wzrostu prawie we wszystkich okresach ustalonego horyzontu przebiegają w bliskim otoczeniu magistral. Przez „prawie wszystkie” rozumie się wszystkie okresy horyzontu za wyjątkiem ich pewnej skończonej liczby, niezależnej od długości horyzontu (zatem liczba ta jest nieskończenie małą wyższego rzędu w stosunku do długości horyzontu). „Silne” wersje twierdzeń o magistrali precyzują czas, w którym może nastąpić wytrącenie optymalnego procesu z otoczenia magistrali. Dowodzą, że wszystkie takie zdarzenia mogą mieć miejsce tylko w początkowych i/lub końcowych okresach horyzontu, zob. np. [3] rozdz. 13, [2], [7] rozdz. 7.

Natomiast w „bardzo silnych" twierdzeniach o magistrali (termin wprowadzony chyba po raz pierwszy przez W.L. Makarowa [2]) mowa jest o optymalnych procesach, które prawie zawsze, pomijając pewien okres początkowy przebiegają po magistrali. Wersję takiego twierdzenia przytaczamy poniżej.

□ **Twierdzenie 4.** („Bardzo silne" twierdzenie o magistrali)

Jeżeli spełnione są założenia (I), (III) oraz (IV) i $(v^0, t_1, \bar{p})$ – optymalna trajektoria intensywności $\{v^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ – rozwiązanie zadania (8)-(9) – w pewnym okresie $\tau < t_1$ dochodzi do magistrali, tzn.

$$v^*(\tau) \in N^v, \tag{17}$$

wtedy $v^*(t) \in N^v$ dla każdego $t > \tau$.

Dowód. Jeżeli $(v^0, t_1, \bar{p})$ – optymalna trajektoria intensywności $\{v^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek (17), to (v^0, t_1) – dopuszczalna jest także trajektoria intensywności

$$\tilde{v}(t) = \begin{cases} v^*(t), & dla \quad t = 0, 1, ..., \tau, \\ v^*(\tau)\, \alpha_N^{t-\tau}, & dla \quad t = \tau + 1, ..., t_1 , \end{cases}$$

gdzie $v^*(\tau) = \sigma\, \bar{s}^v$ dla pewnej liczby $\sigma > 0$. Ponieważ

$$\tilde{v}(\tau) = v^*(t) \text{ dla } t = 0, 1, ..., \tau$$

oraz $\{v^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ jest procesem $(v^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnym, więc

$$\sum_{t=\tau}^{t_1} v^*(t)\, B\, \bar{p} \geq \sum_{t=\tau}^{t_1} \tilde{v}(t)\, B\, \bar{p} = \sigma\, \bar{s}^v\, B\, \bar{p} \sum_{t=\tau}^{t_1} \alpha_N^{t-\tau}. \tag{18}$$

Z drugiej strony, dla $t \geq \tau$, zważywszy na (2), (3), mamy:

$$\begin{gathered} v^*(\tau)\, B\, \bar{p} = \sigma\, \bar{s}^v\, B\, \bar{p} \\ v^*(\tau + 1)\, B\, \bar{p} \leq \alpha_N v^*(\tau + 1) A \bar{p} \leq \alpha_N v^*(\tau) B \bar{p} = \alpha_N \sigma\, \bar{s}^v\, B\, \bar{p} \\ \vdots \\ v^*(t_1)\, B\, \bar{p} \leq \alpha_N v^*(t_1) A \bar{p} \leq \alpha_N v^*(t_1 - 1) B \bar{p} \leq \alpha_N^{t_1-\tau} \sigma\, \bar{s}^v\, B\, \bar{p}. \end{gathered} \tag{19}$$

Wbrew tezie załóżmy, że istnieje taki okres $t > \tau$, w którym $v^*(t) \notin N$. Niech t_0 będzie pierwszym takim okresem, tzn. $v^*(t) \in N$ dla $t = \tau, \tau + 1, ..., t_0 - 1$ oraz

$$v^*(t_0) \notin N^v.$$

Zgodnie z twierdzeniem 1, istnieje taka liczba $\delta^v > 0$, że

$$v^*(t_0) B \bar{p} \leq (\alpha_N - \delta^v) v^*(t_0) A \bar{p} \leq (\alpha_N - \delta^v) v^*(t_0 - 1)\, B\, \bar{p} \leq \alpha_N^{t_0-\tau-1} (\alpha_N - \delta^v) \sigma\, \bar{s}^v\, B\, \bar{p},$$

co łącznie z układem (19) prowadzi do nierówności:

$$\sum_{t=\tau}^{t_1} v^*(t)B\bar{p} \leq \sigma\, \bar{s}^v\, B\, \bar{p}\left(\sum_{t=0}^{t_1-\tau} \alpha_N^t - \delta^v \alpha_N^{t_0-\tau-1}\right). \tag{20}$$

Z (18), (20) otrzymujemy warunek

$$0 < \sigma\, \bar{s}^v\, B\, \bar{p} \sum_{t=\tau}^{t_1} \alpha_N^{t-\tau} \leq \sigma\, \bar{s}^v\, B\, \bar{p}\left(\sum_{t=0}^{t_1-\tau} \alpha_N^t - \delta^v \alpha_N^{t_0-\tau-1}\right),$$

z którego wynika, że $\delta^v < 0$. Otrzymana sprzeczność zamyka dowód twierdzenia.

■

Twierdzenie pozostaje prawdziwe również wówczas, gdy w optymalnym procesie wzrostu magistralę osiąga którakolwiek z pozostałych optymalnych trajektorii (nakładów, produkcji). Przy jego dowodzie nie jest wymagana dodatnia stopa wzrostu gospodarczego na magistrali (tempo $\alpha_N > 1$). Warunek ten gra natomiast istotną rolę przy dowodzie twierdzenia 3. Efekt magistrali, o którym mowa w twierdzeniu 3 ilustruje poniższy przykład numeryczny.

5. PRZYKŁAD

Mamy 2 bazowe procesy technologiczne i 3 towary. Neumannowskie macierze nakładów i wyników mają następującą postać:

$$A = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 1 & 1,5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 1 \\ 1 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Wektor intensywności stosowania bazowych procesów ma postać $v = (v_1, v_2) \geq 0$. Rozwiązując zadanie

$$\max \alpha$$

$$\alpha v A \leqq v B$$

$$v \geq 0$$

z macierzami A, B postaci (21) otrzymujemy:

$$\alpha_N = \frac{10}{9} = 1.111, \quad \bar{s}^v = \frac{\bar{v}}{||\bar{v}||} = (0.4,\ 0.6), \quad \bar{s}^x = \frac{\bar{v}A}{||\bar{v}A||} = (0.346,\ 0.308,\ 0.346),$$
$$\bar{s}^y = \frac{\bar{v}B}{||\bar{v}B||} = (0.345,\ 0.31,\ 0.345). \tag{22}$$

Warunek (2) zachodzi dla każdego wektora intensywności $v \geq 0$, więc jest on równoważny z układem nierówności

$$B\,p - \alpha_N A p \leqq 0,$$

którego rozwiązaniem, po podstawieniu macierzy (21) i wskaźnika $\alpha_N = \dfrac{10}{9}$, jest (określony z dokładnością do struktury, wektor cen $\bar{p} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3)^T$:

$$\bar{p} = \lambda(3,\ 0,\ 2)^T, \quad \lambda > 0 \tag{23}$$

Ustalamy początkowy wektor intensywności $v^0 > 0$, np. niech

$$v^0 = (\ 250,\ 50). \tag{24}$$

Wówczas $\dfrac{v^0}{\left\|v^0\right\|} = (0.125,\ 0.25,\ 0.625)$. Przyjmując $t_1 = 10$ i rozwiązując zadanie (8)-(9) z macierzami A, B postaci (21), warunkiem początkowym (24) i cenami równowagi (23) otrzymujemy optymalną trajektorię intensywności $\{v^*(t)\ \}_{t=0}^{10}$ (tabela 1). Odpowiadają jej optymalne trajektorie nakładów $x^*(t) = v^*(t)A$ i wyników $y^*(t) = v^*(t)B$ (tabele 2, 3).

Tabela 1.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v_1^*(t)$	250	186,6667	207,4074	230,4527	256,0585	284,5095	316,1216	351,2463	390,2736	433,6374	481,8193
$v_2^*(t)$	170	280	311,1111	345,679	384,0878	426,7642	474,1825	526,8694	585,4104	650,456	722,7289

Źródło: obliczenia własne

Tabela 2.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1^*(t)$	460	420	466,6667	518,5185	576,1317	640,1463	711,2737	790,3041	878,1157	975,6841	1084,093
$x_2^*(t)$	295	373,3333	414,8148	460,9053	512,1171	569,019	632,2433	702,4925	780,5473	867,2747	963,6386
$x_3^*(t)$	255	420	466,6667	518,5185	576,1317	640,1463	711,2737	790,3041	878,1157	975,6841	1084,093

Źródło: obliczenia własne

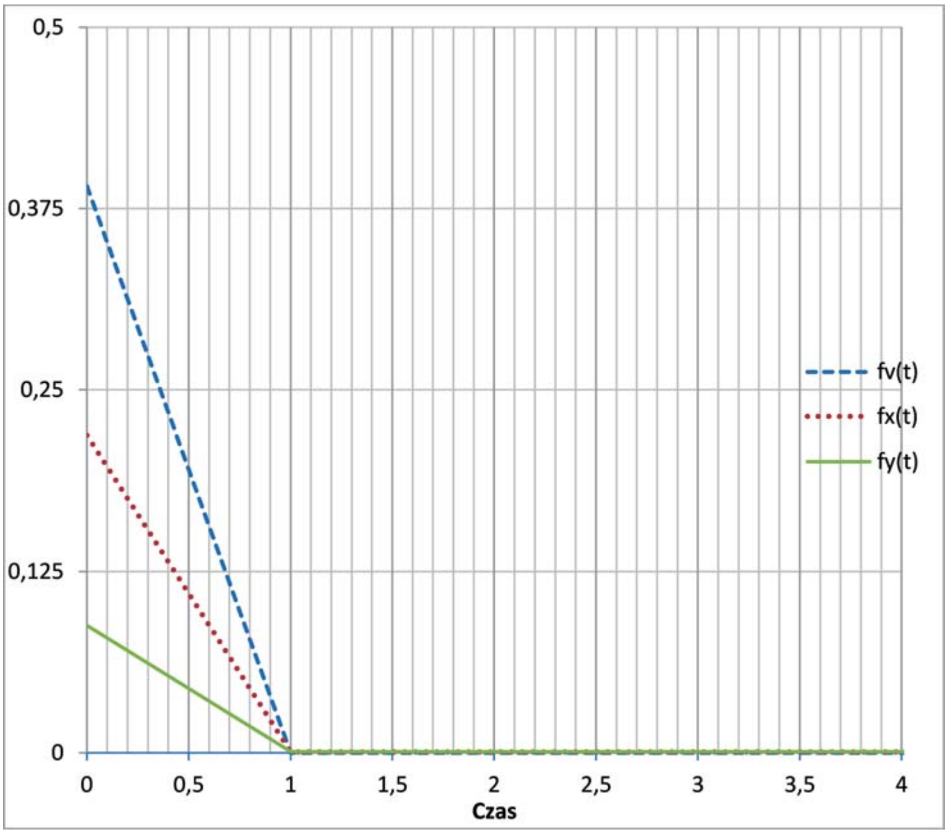
Tabela 3.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y_1^*(t)$	420	466,6667	518,5185	576,1317	640,1463	711,2737	790,3041	878,1157	975,6841	1084,093	1204,548
$y_2^*(t)$	460	420	466,6667	518,5185	576,1317	640,1463	711,2737	790,3041	878,1157	975,6841	1084,093
$y_3^*(t)$	420	466,6667	518,5185	576,1317	640,1463	711,2737	790,3041	878,1157	975,6841	1084,093	1204,548

Źródło: obliczenia własne

Zbieżności struktury intensywności stosowania procesów technologicznych $s_v^*(t) = \dfrac{v^*(t)}{\|v^*(t)\|}$, struktury nakładów $s_x^*(t) = \dfrac{x^*(t)}{\|x^*(t)\|}$ i struktury wyników (produkcji) $s_y^*(t) = \dfrac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|}$ w procesie optymalnym do odpowiednich magistral ilustruje rysunek 1.

Jak widzimy, bardzo prosta struktura zadania (2 procesy, 3 towary) sprawia, że optymalne trajektorie docierają do magistrali już po jednym okresie.



Rysunek 1. Ilustracja „efektu magistrali" w przestrzeni intensywności; $f_v(t) = \left\|s_v^*(t) - \bar{s}^v\right\|$, $f_x(t) = \left\|s_x^*(t) - \bar{s}^x\right\|$, $f_y(t) = \left\|s_y^*(t) - \bar{s}^y\right\|$.

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

LITERATURA

[1] Kasprzak T., (1976), *Analiza działalności systemów ekonomicznych*, PWE, Warszawa.
[2] Makarow W.L., (1966), *Asimptoticzieskoje powiedienije optymalnych trajektorii niniejszych modeliej ekonomiki*, Sibirskij Matiematiczieskij Żurnał, Nr 4.
[3] Nikaido H., (1968), *Convex Structers and Economic Theory*, Acad. Press, New York.
[4] Panek E., (2003), *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo AEP, Poznań.
[5] Panek E., (2011), *O pewnej prostej wersji „słabego" twierdzenia o magistrali w modelu von Neumanna*, Przegląd Statystyczny, Nr 1-2 (tom 58).
[6] Radner R., (1961), *Path of Economic Growth that are Optimal with Regard only to Final States: A Turnpike Theorem*, Review of Econ. Studies, XXVIII, 1961.
[7] Takayama A., (1985), *Mathematical Economics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

DWA TWIERDZENIA O MAGISTRALI W MODELU VON NEUMANNA

S t r e s z c z e n i e

Artykuł nawiązuje do pracy [5], w której przedstawiono prosty dowód „słabego” twierdzenia o magistrali w modelu von Neumanna, w którym w charakterze kryterium wzrostu przyjęto wartość (mierzonej w cenach równowagi) produkcji wytworzonej w końcowym okresie ustalonego horyzontu gospodarki $0,1,\ldots,t_1$. Prezentujemy w nim dwie wersje – „słabą” oraz „bardzo silną” – twierdzenie o magistrali w modelu von Neumanna, w którym rolę kryterium wzrostu gra łączna wartość produkcji, mierzonej w cenach równowagi, wytworzonej w całym horyzoncie $0,1,\ldots,t_1$.

Słowa kluczowe: model von Neumanna, „słabe” i „bardzo silne” twierdzenie o magistrali

TWO TURNPIKE THEOREMS IN THE VON NEUMANN GROWTH MODEL

A b s t r a c t

The article refers to the paper [5], in which a simple proof of the “weak” turnpike theorem in the von Neumann Growth Model was presented. In that paper we accepted as the growth criterion the output value (measured in the equilibrium price) produced in the finite stage of the established horizon of the economy. Whereas in this article we present two versions – “weak” and “very strong” – of the turnpike theorem in the von Neumann Growth Model, in which the part of the growth criterion is assigned to the cumulative output value, measured in the equilibrium price, produced in the entire horizon.

Key words: von Neumann Growth Model, “weak” and “very strong” turnpike theorem