PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LIX – ZESZYT 3 – 2012

ARTUR PRĘDKI

WYBRANE METODY ESTYMACJI W SEMIPARAMETRYCZNYM MODELU GRANICZNYM[1]

1. WSTĘP

Niniejsza praca poświęcona jest metodom CNLS (z ang. *Convex Nonparametric Least Squares*) oraz StoNED[2] (z ang. *Stochastic Non-smooth Envelopment of Data*) będących analogonami odpowiednio MNK i zmodyfikowanej MNK. Celem głównym pracy jest omówienie i ilustracja empiryczna wspomnianych metod w ramach modelu regresji semiparametrycznej, służącemu analizie procesu produkcyjnego. Model ów różni się od stochastycznego modelu granicznego jedynie brakiem założenia o analitycznej postaci funkcji produkcji. Początki metody CNLS, zmodyfikowanej MNK i stochastycznych modeli granicznych sięgają lat 70-tych[3]. Jednak dopiero w roku 2006 pojawiły się pewne nowe rezultaty dotyczące metody CNLS oraz powstała jej modyfikacja zwana metodą StoNED (praca Kuosmanen, 2006). W pracy zawarta jest również krytyczna ocena własności statystycznych estymanty funkcji produkcji oraz możliwości wnioskowania statystycznego na podstawie skonstruowanego modelu. W części empirycznej porównano oceny nieefektywności technicznej, uzyskane za pomocą metody StoNED z ich odpowiednikami, otrzymanymi za pomocą metod SMNK i DEA, zastosowanymi na bazie odpowiednich modeli[4].

2. MODEL REGRESJI SEMIPARAMETRYCZNEJ

Zaczniemy od konstrukcji modelu regresyjnego w ramach, którego stosowane są obecnie metody CNLS i StoNED.

---

[1] Praca wykonana w ramach Badań Statutowych finansowanych przez Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie. Autor chciałby w tym miejscu podziękować za cenne uwagi merytoryczne pracownikom Katedry Ekonometrii i Badań Operacyjnych UEK, w szczególności: prof. dr hab. Jackowi Osiewalskiemu, dr hab. Jerzemu Marcowi, dr hab. Annie Pajor oraz dr Błażejowi Mazurowi.

[2] Do roku 2011 w nazwie metody funkcjonowało słowo „*nonparametric”* jednak, ze względu na semiparametryczny charakter modelu, zastąpiono je słowem „*non-smooth*" (zob. Kuosmanen i Kortelainen, 2012, przypis 1).

[3] Przykładowe prace źródłowe: Hanson i Pledger (1976) – metoda CNLS, Richmond (1974) – zmodyfikowana MNK (nie mylić ze skorygowaną MNK), Aigner, Lovell i Schmidt (1977) – stochastyczny model graniczny.

[4] Szczegóły w części empirycznej pracy. DEA – *Data Envelopment Analysis*, SMNK – skorygowana MNK.

Założenie 1

$$y_i = g(x_i) + \varepsilon_i = g(x_i) - u_i + v_i,\ i = 1,\ldots,n,$$

gdzie: n – liczba obserwacji,
g – nieznana funkcja regresji,
$y_i \in R$ – zmienna objaśniana, dla i – tej obserwacji,
$x_i = [x_{i1},\ldots,x_{iK}] \in R^K$ – wektor zmiennych objaśniających, odpowiadający i-tej obserwacji,
$\varepsilon_i = v_i - u_i$ - i-ty, złożony składnik losowy, gdzie $u_i > 0$.

Opisywany model jest stosowany do analizy procesu produkcyjnego, stąd rolę funkcji regresji pełni tu funkcja produkcji, indeks „i" numeruje jednostki produkcyjne, zmienną objaśnianą jest obserwowana produkcja jednostek gospodarczych, zaś rolę zmiennych objaśniających pełnią nakłady potrzebne dla jej wytworzenia. Mamy tu do czynienia z tzw. złożonym składnikiem losowym ε_i, charakterystycznym dla stochastycznych modeli granicznych. Składa się on z elementu v_i, który odzwierciedla czynniki losowe (tzw. szoki) wpływające na wielkość produkcji oraz elementu u_i, który jest miernikiem nieefektywności technicznej i-tej jednostki produkcyjnej. W przeciwieństwie jednak do wspomnianych modeli, nie przyjmujemy tu arbitralnie analitycznej postaci funkcji produkcji, lecz jedynie nakładamy na nią pewne warunki regularności zawarte w kolejnym założeniu.

Założenie 2 Funkcja g jest ciągła, niemalejąca i globalnie wklęsła[5]. Rodzinę wszystkich takich funkcji oznaczymy przez G.

Definiowany model ma stanowić teoretyczną podstawę umożliwiającą zgodną estymację w punkcie nieznanej funkcji produkcji g oraz miernika nieefektywności technicznej u_i. Ma także umożliwić wnioskowanie statystyczne związane z tymi wielkościami (np. przedziały ufności dla miernika nieefektywności technicznej[6]). Stąd konieczność narzucenia pewnych założeń na elementy złożonego składnika losowego.

Założenie 3 $\{v_i\}_{i=1}^n \sim \text{iid}(0, \sigma_v^2)$, o rozkładzie symetrycznym.

Założenie 4 $\{u_i\}_{i=1}^n \sim \text{iid}(\mu, \sigma_u^2)$, gdzie $\mu > 0$ oraz rozkład jest asymetryczny.

Założenie 5 v_i, u_j są stochastycznie niezależne od siebie oraz od regresorów x_{mk}, dla dowolnych i, j, m = 1,... n, k = 1,...,K.

W praktyce, przy realizacji danej metody estymacji, konieczne staje się również przyjęcie bardziej szczegółowych założeń o postaci rozkładów składowych v_i, u_i. W literaturze przedmiotu istnieje wiele propozycji w tym zakresie (zob. np. Kumbhakar

[5] Globalna wklęsłość jest własnością dość restrykcyjną, co podkreślają sami autorzy metody StoNED w pracy Kuosmanen i Kortelainen (2012, str. 14). Jest ona zakładana ze względu na wykazane przez nich związki metody CNLS z metodą DEA, gdzie obowiązuje założenie wypukłości zbioru możliwości produkcyjnych. Z tego samego powodu nie wymaga się tu również różniczkowalności funkcji produkcji.

[6] Zaznaczmy wyraźnie, że mówimy tu o zgodnej estymacji i przedziale ufności dla zmiennej losowej u_i, a nie parametru. Sytuacja jest więc analogiczna jak w prognozie, gdzie estymujemy przyszłą wartość zmiennej objaśnianej będącej zmienną losową. Definicja zgodności nie ulega zmianie, ponieważ w dalszym ciągu badamy zbieżność wg prawdopodobieństwa różnicy $\hat{u}_i$ - u_i (zob. np. Serfling, 1991, str. 16 i 56).

i Lovell, 2000, str. 74 – 90). Za pracą Kuosmanen i Kortelainen (2012) przyjmiemy w tej kwestii następujące założenie.

Założenie 6 v_i – zmienna losowa o rozkładzie normalnym, u_i – zmienna losowa o rozkładzie półnormalnym[7].

Przy powyższych założeniach $E(\varepsilon_i) = -E(u_i) = -\mu < 0$, wprowadza się więc tzw. „przeciętną” funkcję produkcji $f(x) = g(x) - \mu$, zapisując założenie 1 w postaci:

$$y_i = [g(x_i) - \mu] + [\varepsilon_i + \mu] = f(x_i) + \upsilon_i.$$

„Nowy” składnik losowy υ_i spełnia już standardowe założenia twierdzenia Gaussa-Markowa, tzn. $\{\upsilon_i\}_{i=1}^{n} \sim \mathrm{iid}(0, \sigma_\upsilon^2)$. Z drugiej strony funkcja f „dziedziczy” po g własności niemalejącości oraz globalnej wypukłości, ze względu na to, iż μ jest stałą. Na gruncie stochastycznych modeli granicznych, z liniową lub sprowadzalną do liniowej funkcją produkcji[8], założenia te pozwalają dowieść zgodność estymatora MNK współczynników stojących przy regresorach. Czy w przypadku nieparametrycznej funkcji produkcji możliwa jest zgodna estymacja? Pytanie to pozostaje jak na razie bez odpowiedzi, przynajmniej dla metod estymacji rozważanych w tej pracy. Powrócimy do tego problemu w kolejnych częściach opracowania.

3. METODA CNLS

Estymacji będzie więc podlegać funkcja f (a nie wyjściowa funkcja g). Zgodnie z wprowadzonymi wcześniej oznaczeniami, reszty $y_i - \hat{y}_i$ oznaczymy przez $\hat{\upsilon}_i$. Na początek przedmiotem rozważań stanie się tzw. metoda CNLS. Autor niniejszego opracowania nie znalazł w polskiej literaturze tłumaczenia nazwy metody (stąd użycie angielskojęzycznego skrótu). Nazwa wypukła, nieparametryczna MNK, wynikająca z dosłownego tłumaczenia, wydaje się autorowi właściwa, oddaje bowiem istotę metody oraz określa założenia leżące u jej podstaw. Jest to metoda estymacji nieznanej funkcji regresji stosowana w modelach, w których jej postać analityczna nie jest z góry przyjmowana. Przykładem takiego modelu jest ten opisany w części drugiej pracy, gdzie metoda ta stanowi jedynie pierwszy etap estymacji w ramach szerszej metody StoNED (zob. część czwarta pracy). W nieparametrycznych lub semiparametrycznych modelach regresji z białoszumowym składnikiem losowym jest ona jednak często w pełni „samodzielną” metodą estymacji.

O możliwości jej zastosowania wspomina się już w połowie lat 50-tych (zob. Hildreth, 1954, str. 602), jednak dopiero w roku 1976 dowiedziono zgodność estymatora uzyskanego tą metodą. Dokonano tego jednak tylko dla jednego regresora, za to przy dużo słabszych i ogólniejszych założeniach stochastycznych[9]. Idea estymacji, za

[7] Tzn. $u_i = |U_i|$, gdzie $U_i \sim N(0, \sigma^2)$.

[8] Np. funkcja Cobba i Douglasa czy Translog.

[9] Nie wprowadza się tam explicite pojęcia składnika losowego. Założenia dotyczą rozkładu wyrażonego dystrybuantą ze średnią pełniącą rolę funkcji regresji (szczegóły Hanson i Pledger, 1976).

pomocą CNLS, polega na tym, że szukamy funkcji $\hat{f}$, takiej, że:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{f}(x_i)\right)^2 = \min_{f\in G}\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2.$$

Jest to więc swoisty odpowiednik metody najmniejszych kwadratów o charakterze nieparametrycznym. W latach 80-tych (m.in. prace Fraser i Massam, 1989 oraz Wu, 1982) stworzono efektywne algorytmy poszukiwania $\hat{f}$, lecz ponownie jedynie dla jednego regresora[10]. Kwestia odpowiedniej implementacji CNLS dla wielu regresorów pozostawała nierozstrzygnięta przez wiele lat, aż do roku 2008. W pracy Kuosmanen, (2008, str. 311) dowiedziono następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1

$$\min_{f\in G}\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2 = \min_{l\in L}\sum_{i=1}^{n}(y_i - l(x_i))^2,$$

gdzie L jest rodziną funkcji niemalejących, „kawałkami liniowych"[11].

Implikacją tego twierdzenia jest możliwość zapisania CNLS, jako zadania kwadratowego postaci:

Z.1 $$\min_{\upsilon,\alpha,\beta}\sum_{i=1}^{n}\upsilon_i^2$$

$$\mathrm{y}_i = \alpha_i + \beta_i^T \mathrm{x}_i + \upsilon_i,\ \beta_i = [\beta_{i1},\ldots,\beta_{iK}] \geq \mathbf{0},$$

$$\alpha_i + \beta_i^T \mathrm{x}_i \leq \alpha_h + \beta_h^T \mathrm{x}_i \quad \forall\ \mathrm{h,\ i = 1,\ldots,n}.$$

Powyższe zadanie można rozwiązać za pomocą ogólno dostępnych pakietów (zob. Kuosmanen, 2008, przypis 1). Ze względu jednak na liczbę zmiennych i warunków ograniczających w programie oraz osobliwość macierzy formy kwadratowej tworzącej funkcję celu nie jest to zadanie standardowe[12].

[10] Istnieje wtedy możliwość posortowania obserwacji ze względu na jego wartości, co ma duże znaczenie przy konstrukcji odpowiedniego algorytmu.

[11] Formalna definicja rodziny L znajduje się w pracy (Kuosmanen, 2008, str. 311). Dowiedziono ponadto, że L ⊂ G. Pomysły estymacji dowolnych funkcji za pomocą funkcji „kawałkami liniowych" oraz zapisu wklęsłości, przy użyciu liniowych warunków ograniczających były oczywiście znane wcześniej (zob. np. prace Afriat, 1967, Varian, 1982 czy Yatchew i Bos, 1997).

[12] Problemy te są dokładnie omówione w innym opracowaniu autora Prędki (2011) i w związku z tym nie będą przedmiotem szczegółowej analizy w niniejszej pracy.

Szczególny problem, z punktu widzenia statystycznej estymacji, stanowi wielość rozwiązań optymalnych tego programu. Oznaczmy takie przykładowe rozwiązanie przez[13] $[\hat{\alpha}, \text{vec}(\hat{\beta})', \hat{\upsilon}]$, gdzie:

$$\hat{\alpha} = [\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_n], \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{11} & \ldots & \hat{\beta}_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\beta}_{n1} & \ldots & \hat{\beta}_{nK} \end{bmatrix}, \hat{\upsilon} = [\hat{\upsilon}_1, \ldots, \hat{\upsilon}_n].$$

Wartości $\hat{\upsilon}_i = \mathrm{y}_i - \hat{y}_i = \mathrm{y}_i - (\hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i^T \mathrm{x}_i)$, czyli tzw. reszty, są jednoznacznie wyznaczone[14]. Nie dotyczy to jednak wartości $\hat{\alpha}_i$ oraz $\hat{\beta}_i$. Prowadzi to do problemu identyfikowalności estymanty oraz ocen charakterystyk przeciętnej funkcji produkcji (zob. Kuosmanen, 2008, str. 314). Zaproponowano początkowo dość naturalną definicję estymanty:

$$\hat{f}(\mathrm{x}) = \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} \left\{ \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i^T x \right\}$$

oraz oceny charakterystyk f w punkcie x_i:

$\hat{\beta}_{ik}$– ocena produkcyjności krańcowej k-tego nakładu,

$\hat{\beta}_{ik}\mathrm{x}_{ik}/\hat{f}(\mathrm{x}_i)$ – ocena elastyczności k-tego nakładu,

$\hat{\beta}_{ik}/\hat{\beta}_{im}$– ocena krańcowej stopy substytucji między nakładem k-tym, a m-tym, gdzie k, m = 1,. . . ,K i k ≠ m.

Jednak dla wektora wartości x różnego od x_i definicja tej estymanty nie jest jednoznaczna[15], właśnie ze względu na częstą „wielość" optymalnych wartości $\hat{\alpha}_i$ i $\hat{\beta}_i$. Stąd inna propozycja:

$$\hat{f}_{\min}(x) = \min_{\alpha \in R,\, \beta \in R_+^K} \{\alpha + \beta^T \mathrm{x}\colon \alpha + \beta^T \mathrm{x}_i \geq \hat{y}_i \ \ \forall \mathrm{i} = 1,\ldots,\mathrm{n}\},$$

gdzie $\hat{y}_i = \mathrm{y}_i - \hat{\upsilon}_i$. Estymanta ta jest jednoznacznie zdefiniowana dla dowolnego wektora[16] x, ponadto $\hat{f}_{\min} \in \mathrm{L}$ oraz:

$$\hat{f}_{\min}(\mathrm{x}_i) = \hat{f}(\mathrm{x}_i), \text{ dla i} = 1,\ldots,\mathrm{n}.$$

Twierdzenie 3.1 pozwala więc zastosować metodę CNLS w modelu dla wielu regresorów, w wyniku czego otrzymujemy jednoznaczną estymantę $\hat{f}_{\min}$ przeciętnej funkcji produkcji f. Jednak jakie własności ma ten estymator? Czy, przy założeniach opisanych w części drugiej pracy, jest on zgodny? Na dzień dzisiejszy nie znamy niestety odpowiedzi na to fundamentalne pytanie, co przyznają również Kuosmanen

[13] vec(·) jest operatorem ustawiającym kolumny macierzy jedna pod drugą.

[14] Dowód tego faktu w pracy Prędki (2011), zob. również Kuosmanen (2008, str. 314).

[15] Dla $\mathrm{x} = \mathrm{x}_i$ uzyskujemy wartości $\hat{f}(\mathrm{x}_i) = \hat{y}_i$, których jednoznaczność wynika z jednoznaczności reszt.

[16] Zob. Kuosmanen i Kortelainen (2012, str. 17). Dla zainteresowanych, w tym samym miejscu podano również związek łączący estymantę $\hat{f}_{\min}$ z tzw. estymatorem DEA. W dalszym ciągu pozostaje jednak problem zdefiniowania jednoznacznych ocen charakterystyk przeciętnej funkcji produkcji.

i Kortelainen (2012, str. 16). Problem przekłada się oczywiście także na inne metody estymacji[17], których składową jest CNLS. Oznacza to, że wyniki w części empirycznej pracy należy traktować wyłącznie jako ilustrację zastosowania odpowiednich metod, a wszelkie interpretacje muszą być traktowane z dużą ostrożnością. Metody te są jednak już stosowane w praktyce do analizy efektywności technicznej jednostek gospodarczych[18]. Wynika stąd konieczność rzetelnego ich opisu oraz wskazania problemów teoretycznych i praktycznych związanych ze stosowaniem tychże metod.

Podsumowując, dla jednego regresora dowiedziono już zgodność estymatora CNLS w pracy Hanson i Pledger (1976). Wykazano również, iż tempo zbieżności tej estymanty wynosi $n^{-2/5}$ i przedstawiono postać jej asymptotycznego rozkładu[19]. Brak jest jednak jakichkolwiek wyników teoretycznych dotyczących własności statystycznych estymatora CNLS w modelu z wieloma regresorami.

4. METODA STONED

Jak wspomniano we wstępie, metoda StoNED jest odpowiednikiem zmodyfikowanej MNK, stosowanym na gruncie modelu semiparametrycznego, opisanego w części drugiej tej pracy. Zmodyfikowana MNK była początkowo wykorzystywana w tzw. deterministycznych modelach granicznych dla uzyskania oceny $\hat{u}_i$ miernika nieefektywności technicznej i-tej jednostki produkcyjnej[20]. Modele te nie zawierały składnika białoszumowego v_i, zaś związany z nieefektywnością techniczną, składnik u_i był wielkością deterministyczną, bądź zmienną losową o jednostronnym rozkładzie[21]. Przyjęcie złożonej postaci składnika losowego powoduje dodatkowe trudności z wyodrębnieniem jego części u_i. Procedura obliczenia oceny tego miernika jest wtedy dalej oparta na zmodyfikowanej MNK, lecz nieco się komplikuje i składa się z kilku etapów[22]. Została ona przeniesiona praktycznie w całości, poza jedną modyfikacją, na grunt naszego modelu semiparametrycznego i nazwana metodą StoNED. Jej celem jest więc głównie uzyskanie oceny miernika nieefektywności technicznej $\hat{u}_i$. Prócz tego uzyskujemy ponownie estymantę przeciętnej funkcji produkcji f, a także wyjściowej funkcji produkcji g.

Pierwszym etapem metody StoNED jest użycie metody CNLS dla uzyskania reszt $\hat{\upsilon}_i$ oraz estymanty $\hat{f}_{\min}$. W analogicznej procedurze używanej na gruncie stochastycz-

[17] W naszym przypadku chodzi przede wszystkim o metodę StoNED. Dotyczy to jednak również tzw. metody C^2NLS będącej analogonem metody COLS (opis tej metody w Kuosmanen i Johnson, 2010).

[18] Zob. praca Kuosmanen i Kuosmanen (2009) dotycząca sektora farm mlecznych w Finlandii, czy informacja na stronie źródłowej www.nomepre.net/stoned/ odnośnie współpracy z sektorem energetycznym w tymże kraju.

[19] Zob. praca Groeneboom (2001). Jest to jednak mało użyteczny wynik, ponieważ w rozkładzie tym występują nieznane stałe, dla których brak jest propozycji zgodnej estymacji.

[20] Zob. np. praca źródłowa Richmond (1974).

[21] Zmodyfikowaną MNK stosowano w tym drugim przypadku.

[22] Zob. np. Kumbhakar i Lovell (2000, str. 72-93).

nych modeli granicznych stosuje się tu MNK[23]. W drugim etapie estymujemy wariancje σ_u^2, σ_v^2 składowych złożonego składnika losowego używając metody momentów lub pseudowiarygodności[24]. Jest to etap pośredni umożliwiający estymację miernika nieefektywności technicznej w etapie 3.

Etap pierwszy został już dokładnie opisany w części trzeciej pracy, przejdźmy więc do etapu drugiego. Przedstawimy tu przykładowo metodę momentów, która jest mniej złożona obliczeniowo. Korzystając z założeń 3-6 można dowieść[25], iż momenty centralne złożonego składnika losowego ε_i mają postać:

$$\mathrm{M}_1 = \mathrm{E}(\varepsilon_i) = -\,\mathrm{E}(\mathrm{u}_i) = -\mu = -\sigma_u\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right),$$

$$\mathrm{M}_2 = \mathrm{E}(\varepsilon_i - \mathrm{M}_1)^2 = \left[\frac{\pi - 2}{\pi}\right]\sigma_u^2 + \sigma_v^2,$$

$$\mathrm{M}_3 = \mathrm{E}(\varepsilon_i - \mathrm{M}_1)^3 = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)(1 - 4/\pi)\sigma_u^3.$$

Ze stałości μ wynika, iż wzory na drugi i trzeci moment υ_i są analogiczne. Stąd estymatorami tych wielkości będą odpowiednie momenty obliczone z rozkładu empirycznego reszt $\hat{\upsilon}_i$, uzyskanych w etapie I:

$$\hat{M}_2 = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\upsilon}_i - \hat{E}(\upsilon_i)\right)^2\right]/n,$$

$$\hat{M}_3 = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\upsilon}_i - \hat{E}(\upsilon_i)\right)^3\right]/n,$$

gdzie $\hat{E}(\upsilon_i) = \left[\sum_{i=1}^{n}\hat{\upsilon}_i\right]/n$. Interesujące nas oceny wariancji możemy więc obliczyć z układu równań:

$$\hat{M}_2 = \left[\frac{\pi - 2}{\pi}\right]\hat{\sigma}_u^2 + \hat{\sigma}_v^2,$$

$$\hat{M}_3 = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)(1 - 4/\pi)\hat{\sigma}_u^3.$$

[23] Jest to właśnie owa jedyna modyfikacja wprowadzona przez autorów metody StoNED. W sposób naturalny, wobec braku analitycznej specyfikacji f, unikamy też problemu zgodnej estymacji stałej (zob. Kumbhakar i Lovell, 2000, str. 71 lub 92).

[24] Z ang. *pseudolikelihood method* (zob. praca źródłowa Fan i Weersink, 1996).

[25] Zob. np. praca źródłowa Aigner, Lovell i Schmidt (1977).

Po jego rozwiązaniu otrzymujemy ostatecznie:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \left(\frac{\hat{M}_3}{\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\left(1 - \frac{4}{\pi}\right)} \right)^{2/3},$$

$$\hat{\sigma}_v^2 = \hat{M}_2 - \left(\frac{\pi - 2}{\pi}\right)\hat{\sigma}_u^2.$$

W etapie trzecim, uzyskane oceny wariancji wykorzystujemy do estymacji miernika nieefektywności technicznej i-tej jednostki. W pracy Jondrow, Lovell, Materov i Schmidt (1982) dowiedziono, iż przy założeniach 3-6 otrzymujemy:

$$\mathrm{E}(\mathrm{u}_i|\varepsilon_i) = \mu_{*i} + \sigma_* \left(\frac{\varphi\left(-\mu_{*i}/\sigma_*\right)}{1 - \Phi\left(-\mu_{*i}/\sigma_*\right)} \right),$$

gdzie $\mu_{*i} = -\varepsilon_i \left(\frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} \right)$, $\sigma_* = \left(\frac{\sigma_u^2 \sigma_v^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} \right)^{1/2}$, zaś φ, Φ oznaczają odpowiednio gęstość i dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego. W literaturze przedmiotu zmienna losowa $\mathrm{E}(\mathrm{u}_i|\varepsilon_i)$ jest jedną z propozycji[26] estymatora punktowego u_i. Jednak wartość ta zależy od nieznanych wielkości wymagających dodatkowej, zgodnej estymacji. Przypomnijmy, iż:

$$\upsilon_i = \varepsilon_i + \mu, \; \mu = \sigma_u \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right),$$

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{g(x)} - \mu, \; \hat{f}(\mathrm{x}) = \hat{f}_{\min}(\mathrm{x}).$$

Stąd, korzystając z ocen wariancji otrzymanych w etapie drugim, naturalnym estymatorem ε_i jest $\hat{\varepsilon}_i = \hat{\upsilon}_i - \hat{\sigma}_u \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)$, zaś estymantą wyjściowej funkcji produkcji $\hat{g}(\mathrm{x}) = \hat{f}_{\min}(\mathrm{x}) + \hat{\sigma}_u \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)$. W następnej kolejności uzyskujemy ostateczną wersję estymatora miernika nieefektywności technicznej postaci[27]:

$$\hat{E}\left(u_i \,|\hat{\varepsilon}_i\right) = \hat{\mu}_{*i} + \hat{\sigma}_* \left(\frac{\varphi\left(-\hat{\mu}_{*i}/\hat{\sigma}_*\right)}{1 - \Phi\left(-\hat{\mu}_{*i}/\hat{\sigma}_*\right)} \right),$$

gdzie $\hat{\mu}_{*i} = -\hat{\varepsilon}_i \left(\frac{\hat{\sigma}_u^2}{\hat{\sigma}_u^2 + \hat{\sigma}_v^2} \right)$, $\hat{\sigma}_* = \left(\frac{\hat{\sigma}_u^2 \hat{\sigma}_v^2}{\hat{\sigma}_u^2 + \hat{\sigma}_v^2} \right)^{1/2}$.

[26] Inną propozycją jest modalna rozkładu warunkowego $\mathrm{u}_i|\varepsilon_i$ (zob. np. Kumbhakar i Lovell, 2000, str. 78).

[27] Jest to poprawiona wersja z pracy Kuosmanen i Kortelainen (2012, str. 18). We wcześniejszych pracach z tego zakresu postuluje się obliczenie ocen nieznanych wartości za pomocą algorytmów opartych na metodzie MNW (zob. np. Kumbhakar i Lovell, 2000, str. 77 lub Fan i Weersink, 1996).

5. UWAGI KRYTYCZNE

Jak widać metoda StoNED jest stosunkowo prosta w aplikacji w wersji przedstawionej powyżej[28]. Ma ona jednak swoje wady oraz ograniczenia. Po pierwsze może się zdarzyć, że realizacja $\hat{M}_3$ jest dodatnia[29], co powoduje z kolei ujemny znak $\hat{\sigma}_u^2$. Przyjmuje się wtedy arbitralnie, iż $\hat{\sigma}_u^2 = 0$ (zakładamy tym samym pełną efektywność wszystkich jednostek produkcyjnych w grupie) albo podejrzewa się błędną specyfikację modelu[30]. Po drugie może zaistnieć sytuacja, iż realizacja $\hat{M}_3$ jest wprawdzie ujemna, lecz w takim stopniu, że powoduje to z kolei ujemny znak $\hat{\sigma}_v^2$. W takiej sytuacji naturalnym wyjściem jest przyjęcie $\hat{\sigma}_v^2 = 0$, czyli braku składnika „białoszumowego" w danych. Oznacza to, że zakładamy, iż jedynym źródłem odstępstwa zrealizowanej wielkości produkcji od produkcji maksymalnej jest nieefektywność techniczna jednostki produkcyjnej.

Trzecim problemem jest kwestia własności statystycznych wprowadzonych estymatorów. Wobec braku dowodu zgodności[31] estymanty $\hat{f}_{\min}$ uzyskanej za pomocą metody CNLS w etapie pierwszym, nie mamy pewności, czy zgodna jest również estymanta $\hat{g}$. Co do własności estymatorów związanych z parametrami rozkładów zmiennych losowych u_i, v_i oraz rozkładem u_i warunkowym względem ε_i, to najistotniejsze byłoby dowiedzenie choćby zgodności $\hat{\sigma}_u^2$, $\hat{\sigma}_v^2$. Są one bowiem podstawą do definiowania innych estymatorów przedstawionych w tym opracowaniu. W pracy Kuosmanen i Kortelainen (2012, str. 18) stwierdza się, iż są one nie tylko zgodnymi, ale także nieobciążonymi estymatorami odpowiednio σ_u^2, σ_v^2. Następuje jednak odwołanie do prac Aigner, Lovell i Schmidt (1977) oraz Greene (2008), które dotyczą rezultatów uzyskanych dla modeli, gdzie granica produkcyjna zadana jest parametrycznie. W naszej sytuacji, wobec braku analitycznej postaci f oraz nie udowodnionej zgodności jej estymanty $\hat{f}_{\min}$, mocno wątpliwe jest bezkrytyczne przełożenie tych wyników na grunt modelu semiparametrycznego przedstawionego w części drugiej pracy. Na koniec warto zaznaczyć, że wprowadzony estymator miernika nieefektywności technicznej jest niezgodny i to z powodów niezależnych od tych opisanych przed chwilą[32].

Problemem czwartym, wynikającym po części z trzeciego, jest brak możliwości wnioskowania statystycznego oraz weryfikowania hipotez dotyczących np. miernika nieefektywności, czy wartości funkcji produkcji w punkcie. Wspominają o tym sami

[28] Przypomnijmy, że możliwe są różne jej warianty zależne od typu rozkładu nałożonego na składową u_i oraz wybranej metody szacowania parametrów σ_u^2, σ_v^2.

[29] Tzw. błędny kierunek skośności reszt.

[30] Sugerowana jest wtedy zmiana zestawu regresorów lub postaci f (dla modeli parametrycznych) – zob. Kumbhakar i Lovell (2000, str. 92). Wydaje się także, iż warto by wtedy narzucić multiplikatywną specyfikację składnika losowego w tym modelu, używaną zresztą częściej w stochastycznych modelach granicznych.

[31] Przypomnijmy, że chodzi o zgodność do wartości punktowej $f(x_o)$ dla przypadku wielu regresorów.

[32] Wynika to ze stałości wariancji rozkładu u_i pod warunkiem ε_i (zob. Kumbhakar i Lovell, 2000, str. 78). Niestety, jak do tej pory, nie zaproponowano w literaturze przedmiotu zgodnego estymatora wielkości u_i.

autorzy metody w pracy Kuosmanen i Kortelainen (2012, str. 22). W nieopublikowanej pracy Kuosmanen (2006, str. 9) pojawia się jednak konstrukcja przedziału ufności dla miernika nieefektywności u_i. Jest to ponownie propozycja wzięta z literatury dotyczącej modeli parametrycznych (praca Horrace i Schmidt, 1996, str. 262), bazująca na postaci rozkładu warunkowego u_i względem ε_i. Przedziały ufności mają następującą postać:

$$[\mu_{*i}+ z_U\sigma_*,\ \mu_{*i}+ z_L\sigma_*],$$

gdzie:

$$z_U = \Phi^{-1}[1 - (1\text{-}\alpha/2)\Phi(\mu_{*i}/\ \sigma_*)],\ z_L = \Phi^{-1}[1 - (\alpha/2)\Phi(\mu_{*i}/\ \sigma_*)],$$

oraz α – zadany poziom istotności i Φ – dystrybuanta N(0,1).
W pracy Kuosmanen i Kortelainen (2012, str. 22) stwierdza się jednak, iż przedziały te nie biorą pod uwagę rozkładu próbkowego estymatora miernika nieefektywności i w związku z tym wykazują słabe własności pokrycia (zob. Simar i Wilson, 2010).

6. PRZYKŁAD EMPIRYCZNY

Wykorzystano standardowy zestaw danych używany już wielokrotnie przez autora w jego poprzednich pracach[33]. Są to dane rzeczywiste z roku 1995 dotyczące 32 polskich elektrowni i elektrociepłowni, których efektywność techniczną będziemy analizować. Za nakłady przyjęto:
– kapitał (wartość brutto środków trwałych liczona w zł.);
– pracę (liczba pracowników);
– energię wsadu (liczoną w TJ).
Produktem działalności jednostek jest wytworzona energia (liczona w TJ[34]).

Odpowiednie wyniki zastosowania metody CNLS zestawiono w tabeli 1. Za pomocą autorskiego programu w języku R, przy wykorzystaniu gotowej procedury „solve.QP”, rozwiązano program kwadratowy Z.1. i uzyskano jego przykładowe rozwiązanie optymalne $[\hat{\alpha}, \mathrm{vec}(\hat{\beta})', \hat{\upsilon}]$ (kolumny 2, 8-11 w tabeli 1). Następnie, na podstawie wektora reszt $\hat{\upsilon}$, obliczono wartości $\hat{y}_i = y_i - \hat{\upsilon}_i$, dla i = 1,. . . ,n (kolumna 3). Posłużyły one do rozwiązania, za pomocą Solvera w Excelu, n programów liniowych związanych z definicją wartości:

$$\hat{f}_{\min}\left(x_j\right) = \min_{\alpha\in R,\ \beta\in R_+^K}\{\alpha + \beta^T \mathrm{x}\colon \alpha+ \beta^T \mathrm{x}_i \geq \hat{y}_i\ \ \forall \mathrm{i} = 1,\ldots,\mathrm{n}\},\ \text{dla j} = 1,\ldots \mathrm{n}.$$

Wartości tej estymanty w punkcie, zgodnie z oczekiwaniami[35], okazały się być równe wartościom niejednoznacznej estymanty $\hat{f}(\mathrm{x}_j) = \min_{i\in\{1,\ldots,n\}}\left\{\hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i^T x_j\right\}$. Następnie uzyskano wartości optymalne odpowiednich współczynników (kolumny 4-7). Okazały się

[33] Zob. np. Prędki (2003). Źródło danych: praca Osiewalski i Wróbel-Rotter (2002).
[34] 1GWh = 3,6TJ (teradżul).
[35] Zachodzi równość $\hat{y}_i = \hat{f}(\mathrm{x}_j) = \hat{f}_{\min}(\mathrm{x}_j)$, dla j = 1,. . . ,n.

Tabela 1.

Wyniki związane z realizacją metody CNLS

			współczynniki dla estymanty $\hat{f}_{\min}$				współczynniki dla estymanty $\hat{f}$			
i	$\hat{v}_i$	$\hat{y}_i$	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\beta}_{i1}$	$\hat{\beta}_{i2}$	$\hat{\beta}_{i3}$	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\beta}_{i1}$	$\hat{\beta}_{i2}$	$\hat{\beta}_{i3}$
1	3560,89	97188,11	1604,33	5,85	-0,000056	0,2234	444,47	8,20	0,000000	0,1764
2	250,43	54426,57	2026,37	5,38	0,004297	0,1614	-13,94	10,12	0,013368	0,0000
3	3702,96	47796,54	1604,33	5,85	-0,000056	0,2234	822,00	5,78	0,001805	0,2007
4	5949,63	28407,07	426,94	8,34	-0,000122	0,1753	2618,36	16,61	0,000000	0,0000
5	-8543,68	42535,38	1136,76	6,01	-0,000005	0,2211	1127,04	6,01	0,000000	0,2210
6	-3500,78	37232,18	2026,30	5,38	0,004297	0,1614	2026,35	5,38	0,004297	0,1614
7	-3963,23	36127,63	2026,36	5,38	0,004297	0,1614	2026,37	5,38	0,004297	0,1614
8	1049,93	28354,37	1604,33	5,85	-0,000056	0,2234	362,69	3,70	0,000000	0,4731
9	3768,16	24847,54	1138,16	6,00	-0,000005	0,2211	1127,04	6,01	0,000000	0,2210
10	-4820,62	33357,32	879,74	5,78	0,002285	0,1897	879,75	5,78	0,002285	0,1897
11	643,59	19516,81	822,69	5,79	0,001781	0,2011	-83,58	2,94	0,003550	0,4829
12	-2533,70	22265,30	1604,33	5,85	-0,000056	0,2234	1009,01	6,15	0,000000	0,2184
13	-2883,34	20757,54	879,74	5,78	0,002285	0,1897	879,74	5,78	0,002285	0,1897
14	3080,18	13540,53	1125,00	6,01	-0,000003	0,2210	765,76	5,80	0,001609	0,2060
15	5400,04	11028,67	879,75	6,03	0,000905	0,2066	92,61	6,26	0,003843	0,1780
16	-553,65	15872,35	-807,66	6,75	0,008849	0,1194	-807,86	6,75	0,008850	0,1194
17	-388,57	15029,67	-807,87	6,75	0,008850	0,1194	-807,87	6,75	0,008850	0,1194
18	1371,65	11381,25	765,76	5,80	0,001609	0,2060	168,13	6,24	0,004260	0,1679
19	0,00	10185,10	502,14	5,12	0,000000	0,3280	-151,32	0,34	0,000000	0,8320
20	614,79	9504,41	-807,87	6,75	0,008850	0,1194	-807,86	6,75	0,008850	0,1194
21	-2027,64	11434,14	765,76	5,80	0,001609	0,2060	765,76	5,80	0,001609	0,2060
22	-1974,08	10938,08	-1060,84	7,05	0,007670	0,1301	-1060,84	7,05	0,007670	0,1301
23	2028,84	5893,26	1009,01	6,15	0,000000	0,2184	-8,35	9,56	0,000000	0,1572
24	430,16	6099,84	910,64	5,81	-0,000154	0,2511	-61,67	5,96	0,000000	0,3433
25	-405,53	5306,23	-1060,84	7,05	0,007670	0,1301	-1060,84	7,05	0,007670	0,1301
26	-655,74	5189,64	-1082,13	7,03	0,007681	0,1329	-1082,13	7,03	0,007681	0,1329
27	-628,77	5101,27	-997,20	5,65	0,004951	0,2893	-997,20	5,65	0,004951	0,2893
28	-9,58	4434,28	-1082,12	7,03	0,007681	0,1329	-1082,13	7,03	0,007681	0,1329
29	695,90	3230,70	-1082,13	7,03	0,007681	0,1329	-997,20	5,65	0,004951	0,2893
30	319,26	3001,64	-4127,38	22,67	-0,001618	0,0000	-1044,65	7,32	0,009924	0,1002
31	0,00	3153,10	-1526,10	3,59	0,030198	0,1108	-96,38	0,00	0,041969	0,1400
32	22,59	1916	-997,20	5,65	0,004951	0,2893	-541,46	0,00	0,017276	0,5560

Źródło: Opracowanie własne.

one różne od tych zestawionych w wektorach $\hat{\alpha}$ i vec$(\hat{\beta})'$. Mimo to, na mocy definicji obu estymant i jednoznaczności reszt, stanowią one, wraz z wektorem $\hat{\upsilon}$, rozwiązanie optymalne programu Z.1. Potwierdza to empirycznie możliwość istnienia dwóch, różnych rozwiązań optymalnych tego zadania, a tym samym niejednoznaczność ocen charakterystyk w punkcie podanych w części trzeciej pracy.

Po zastosowaniu metody CNLS (etap pierwszy metody StoNED), przystąpiono do obliczeń związanych z kolejnymi etapami. Uzyskane wyniki zestawiono w tabeli 2. W pierwszej kolejności obliczono oceny składowych wariancji złożonego składnika losowego (dół tabeli 2). Następnie za ich pomocą, wykorzystując również reszty i wartości estymanty $\hat{f}_{\min}(\mathrm{x}_i)$, obliczono ocenę punktową złożonego składnika losowego, dla każdej obserwacji (kolumna 3). Otrzymano także wartości punktowe estymanty maksymalnej produkcji (kolumna 2), ze wzoru:

$$\hat{g}(\mathrm{x}) = \hat{f}_{\min}(\mathrm{x}) + \hat{\sigma}_u\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right).$$

Wykorzystując te rezultaty otrzymano ostatecznie oceny miernika nieefektywności technicznej (kolumna 4) oraz aproksymację 95% przedziałów ufności dla tego miernika (kolumny 5 i 6). Przedziały te zawierają wprawdzie oceny z kolumny 4, lecz są dość szerokie i niosą niewielką informację o rzeczywistej wartości u_i. Zwróćmy uwagę, że środki tych przedziałów (kolumna 7) leżą zawsze powyżej oceny punktowej odpowiedniego miernika. Wyjątek stanowi jednostka nr 5, o największej nieefektywności, gdzie środek przedziału pokrywa się z oceną miernika. Potwierdza to empirycznie związki tej metody uzyskiwania przedziałów ufności ze skorygowaną MNK sygnalizowane w źródłowej pracy Horrace i Schmidt (1996, str. 259-261).

Własności statystyczne metody StoNED nie są znane, procedura ta jest już jednak stosowana w praktyce gospodarczej (zob. przypis 18). Autor niniejszego opracowania przedstawia więc przykład empiryczny jej zastosowania w celach ilustracyjnych, bez szerszej interpretacji uzyskanych rezultatów. Wobec braku dowodów formalnych na zgodność procedury przeprowadza się badania o charakterze symulacyjnym, których celem jest wykazanie zbieżności wyników otrzymanych przy wykorzystaniu innych metod estymacji, z tymi uzyskanymi za pomocą metody StoNED (zob. Kuosmanen i Kortelainen, 2012, str. 22-25). W niniejszej pracy dokonano również porównania wyników uzyskanych różnymi metodami zastosowanych dla tego samego zestawu danych.

W tabeli 3, w kolumnach 2-4, znajdują się oceny miernika nieefektywności u_i obliczone odpowiednio za pomocą metody StoNED (por. tabela 2, kolumna 4), DEA i skorygowanej MNK (SMNK). Należy jednak wyraźnie zaznaczyć, iż zgodność dwóch ostatnich procedur warunkowana jest ich zastosowaniem w odpowiednio zdefiniowanym modelu. Można przyjąć w szczególności[36] model opisany w części drugiej pracy, ale bez składnika białoszumowego v_i. Dodatkowo, w przypadku skorygowanej MNK,

[36] Ogólniejsza klasa modeli których estymatory DEA zachowują własność zgodności jest opisana np. w pracach Banker (1993), czy Simar i Wilson (2008).

Tabela 2.

Wyniki związane z realizacją drugiego i trzeciego etapu metody StoNED

i	$\hat{g}(x_i)$	$\hat{\varepsilon}_i$	$\hat{E}(u_i \mid \hat{\varepsilon}_i)$	L	P	(L+P)/2
1	100097,21	651,79	1182,11	42,55	3460,66	1751,61
2	57335,67	-2658,67	2440,56	188,49	5488,48	2838,49
3	50705,64	793,86	1149,04	40,70	3391,57	1716,13
4	31316,17	3040,53	767,46	22,99	2494,61	1258,80
5	45444,47	-11452,77	8979,46	5658,60	12300,32	8979,46
6	40141,28	-6409,88	5033,94	1746,37	8347,57	5046,97
7	39036,73	-6872,33	5392,51	2087,90	8709,59	5398,75
8	31263,47	-1859,17	2037,49	120,15	4932,90	2526,52
9	27756,64	859,06	1134,30	39,89	3360,38	1700,14
10	36266,41	-7729,71	6061,55	2744,47	9381,41	6062,94
11	22425,91	-2265,51	2233,80	149,90	5211,10	2680,50
12	25174,40	-5442,80	4295,90	1099,00	7592,52	4345,76
13	23666,64	-5792,44	4560,20	1318,85	7865,04	4591,95
14	16449,62	171,08	1304,29	49,96	3706,06	1878,01
15	13937,76	2490,94	840,49	25,92	2682,10	1354,01
16	18781,45	-3462,75	2912,97	313,28	6076,26	3194,77
17	17938,77	-3297,67	2810,82	281,27	5953,68	3117,47
18	14290,34	-1537,44	1894,52	102,00	4719,49	2410,74
19	13094,20	-2909,10	2580,74	219,69	5668,87	2944,28
20	12413,51	-2294,31	2248,39	152,36	5231,16	2691,76
21	14343,24	-4936,74	3920,91	820,00	7199,61	4009,80
22	13847,18	-4883,18	3881,87	793,56	7158,16	3975,86
23	8802,36	-880,26	1635,48	75,26	4304,59	2189,93
24	9008,94	-2478,94	2344,00	169,45	5360,75	2765,10
25	8215,33	-3314,63	2821,19	284,38	5966,23	3125,31
26	8098,74	-3564,84	2977,40	335,09	6152,49	3243,79
27	8010,37	-3537,87	2960,29	329,17	6132,33	3230,75
28	7343,38	-2918,68	2586,23	221,00	5675,82	2948,41
29	6139,80	-2213,20	2207,54	145,56	5174,78	2660,17
30	5910,74	-2589,84	2403,18	180,90	5439,39	2810,14
31	6062,20	-2909,10	2580,74	219,69	5668,87	2944,28
32	4825,50	-2886,50	2567,83	216,63	5652,49	2934,56
		$\hat{\sigma}_u^2 =$	13293414,28	$\hat{\sigma}_v^2 =$	3661555,50	

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 3.

Oceny nieefektywności technicznej uzyskane za pomocą metod StoNED, DEA i skorygowanej MNK oraz współczynniki korelacji liniowej i rang Spearmana

Lp.	StoNED	DEA	SMNK
1	1182,11	0,00	48135,59
2	2440,56	0,00	30495,11
3	1149,04	0,00	21127,74
4	767,46	0,00	6560,22
5	8979,46	12891,67	35704,52
6	5033,94	8403,69	25261,00
7	5392,51	8986,77	24751,14
8	2037,49	0,00	12662,66
9	1134,30	815,43	12773,90
10	6061,55	9752,29	23958,49
11	2233,80	0,00	8079,03
12	4295,90	7481,62	23318,36
13	4560,20	8063,59	14186,72
14	1304,29	387,25	4179,13
15	840,49	0,00	0,00
16	2912,97	3302,32	8873,66
17	2810,82	3333,69	8811,24
18	1894,52	0,00	3141,37
19	2580,74	342,38	4452,23
20	2248,39	474,32	5312,29
21	3920,91	4260,55	7636,98
22	3881,87	6267,13	7749,96
23	1635,48	0,00	515,33
24	2344,00	1360,61	2228,35
25	2821,19	1359,38	4171,53
26	2977,40	1953,60	3460,43
27	2960,29	1658,23	3392,66
28	2586,23	739,73	2840,93
29	2207,54	0,00	1512,54
30	2403,18	0,00	2624,93
31	2580,74	0,00	3486,62
32	2567,83	0,00	1642,82

r(DEA,StoNED)=	0,9285
r_rang(DEA,StoNED)=	0,8399
r(SMNK,StoNED)=	0,4362
r_rang(SMNK,StoNED)=	0,3581

Źródło: Opracowanie własne.

zakładamy parametryczną postać Cobba i Douglasa granicy produkcyjnej oraz multiplikatywną postać składnika u_i. W metodzie DEA za ocenę u_i przyjmujemy (za pracą Kuosmanen i Kortelainen, 2012, str. 23) wyrażenie $(\theta_{DEA} - 1)y_i$, gdzie θ_{DEA} tzw. miara efektywności technicznej zorientowana na produkty[37]. Natomiast w SMNK oceną miernika nieefektywności jest $y_i[\exp(e_i^*) - 1]$, gdzie $e_i^* = \max\limits_{i \in \{1,\ldots,n\}} e_i - e_i$ oraz e_i oznaczają reszty MNK uzyskane dla wersji zlogarytmowanej modelu.

W celu określenia stopnia zbieżności wyników uzyskanych tymi, trzema metodami obliczono współczynniki korelacji liniowej między ocenami nieefektywności technicznej oraz współczynniki rang Spearmana, zestawione w prawej części tabeli 3. Wskazują one na silną korelację zarówno ocen miar nieefektywności, jak i rankingów jednostek produkcyjnych otrzymanych za pomocą metod StoNED i DEA. Zatem, mimo że własności metody StoNED nie są poznane (formalnie udowodnione), to jej zastosowanie prowadzi w tym przypadku do bardzo podobnych wyników, jak te uzyskane za pomocą metody DEA.

Dużo słabsza zależność, która jednak wydaje się być dodatnia i istotnie różna od zera, występuje pomiędzy odpowiednimi rezultatami uzyskanymi przy wykorzystaniu metod StoNED i SMNK. Różnice w ocenie nieefektywności technicznej wynikają zapewne z różnych struktur modeli, w ramach których te metody były stosowane, a nie własności statystycznych metody StoNED.

7. ZAKOŃCZENIE

Oprócz problemów fundamentalnych, opisanych w części trzeciej i piątej pracy, występują również inne, o charakterze technicznym, których rozwiązanie mogłoby rozszerzyć zakres stosowania metody StoNED. Chodzi m.in. o przystosowanie metody do multiplikatywnej specyfikacji składników losowych w modelu, stosowanej bardzo często, szczególnie w modelach parametrycznych (zob. przypis 30). Inne, interesujące zagadnienia to:

- zbadanie możliwości rozszerzenia tej metody na dane panelowe,
- uwzględnienie w jej ramach określonego typu globalnego efektu skali,
- zastosowanie metody StoNED dla tzw. funkcji kosztów będących alternatywnym, w stosunku do funkcji produkcji, sposobem modelowania technologii produkcji,
- zbadanie możliwości i konsekwencji uchylenia założenia o stałości wariancji elementów złożonego składnika losowego,
- uchylenie założenia o globalnej wklęsłości funkcji produkcji (np. założenie tzw. quasi-wklęsłości),
- rozszerzenie metody na przypadek wieloproduktowy (np. za pomocą tzw. funkcji odległości).

[37] Liczona dla każdego obiektu za pomocą odpowiedniego programu liniowego, szczegóły np. w pracy Kuosmanen i Johnson (2010, str. 152).

Pewne, wstępne podejście do niektórych z powyższych zagadnień zostało już zasygnalizowane w pracy Kuosmanen i Kortelainen (2012, rozdział 4). W opracowaniu tym wymienia się ponadto dużo więcej potencjalnych kierunków przyszłych badań (zob. Kuosmanen i Kortelainen, 2012, str. 26). Jednak ich podjęcie jest uwarunkowane rozwiązaniem w pierwszej kolejności problemów podstawowych opisanych wcześniej. Dotyczy to również ewentualnych zastosowań metody w praktyce gospodarczej (zob. przypis 18).

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

LITERATURA

[1] Afriat S.N., (1967), *The construction of a utility function from expenditure data*, "International Economic Review" Vol. 8, 67-77.

[2] Aigner D., Lovell C.A.K., Schmidt P., (1977), *Formulation and estimation of stochastic frontier models*, "Journal of Econometrics" Vol. 6, 21-37.

[3] Banker R.D., (1993), *Maximum Likelihood, Consistency and Data Envelopment Analysis: A Statistical Foundation*, "Management Science" Vol. 39 (No. 10), 1265-1273.

[4] Fan Y., Li Q., Weersink A., (1996), *Semiparametric estimation of stochastic production frontier models*, "Journal of Business and Economic Statistics" Vol. 14 (No 4), 460-468.

[5] Fraser D.A.S., Massam H., (1989), *A mixed primal-dual bases algorithm for regression under inequality constraints: Application to concave regression*, "Scandinavian Journal of Statistics" Vol. 16, 65-74.

[6] Greene W.H., (2008), *The econometric approach to efficiency analysis*, rozdział 2 w: Fried H., Lovell K., Schmidt S. (eds) "The measurement of productive efficiency and productivity growth", Oxford University Press, New York.

[7] Groeneboom P., Jongbloed G., Wellner J.A., (2001), *Estimation of a convex function: characterizations and asymptotic theory*, "Annals of Statistics" Vol. 29, 1653-1698.

[8] Hanson D.L., Pledger G., (1976), *Consistency in concave regression*, "Annals of Statistics" Vol. 4 (No 6), 1038-1050.

[9] Hildreth C., (1954), *Point estimates of ordinates of concave functions*, "Journal of the American Statistical Association" Vol. 49, 598-619.

[10] Horrace W.C., Schmidt P., (1996), *Confidence statements for efficiency estimates from stochastic frontier models*, "Journal of Productivity Analysis" Vol. 7, 257-282.

[11] Jondrow J., Lovell C.A.K., Materov I.S., Schmidt P., (1982), *On estimation of technical inefficiency in the stochastic frontier production function model*, "Journal of Econometrics" Vol. 19, 233-238.

[12] Kumbhakar S.C., Lovell C.A.K., (2000), *Stochastic frontier analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.

[13] Kuosmanen T., (2006), *Stochastic nonparametric envelopment of data: combining virtues of SFA and DEA in a unified framework*, MTT Discussion Paper 3/2006 (dostępny na stronie: www.nomepre.net/stoned/).

[14] Kuosmanen T., (2008), *Representation theorem for convex nonparametric least squares*, "Journal of Econometrics" Vol. 11, 308-325.

[15] Kuosmanen T., Johnson A., (2010), *Data envelopment analysis as nonparametric least squares regression*, "Operations Research" Vol. 58 (No 1), 149-160.

[16] Kuosmanen T., Kortelainen M., (2012), *Stochastic non-smooth envelopment of data: semi-parametric frontier estimation subject to shape constraints*, "Journal of Productivity Analysis" Vol. 38, 11-28.
[17] Kuosmanen T., Kuosmanen N., (2009), *Role of benchmark technology in sustainable value analysis: an application to Finnish dairy farms*, "Agricultural and Food Science" Vol. 18, 302-316.
[18] Osiewalski J., Wróbel-Rotter R., (2002), *Bayesowski model efektów losowych w analizie efektywności kosztowej (na przykładzie elektrowni i elektrociepłowni polskich)*, „Przegląd Statystyczny" Vol. 50 (No 2), 47-68.
[19] Prędki A., (2003), *Analiza efektywności za pomocą metody DEA: podstawy formalne i ilustracja ekonomiczna*, „Przegląd Statystyczny" Vol. 50 (No 1), 87-100.
[20] Prędki A., (2011), *Spojrzenie na metody estymacji w modelach regresyjnych przez pryzmat programowania matematycznego*, wysłane do druku w Wyd. UE we Wrocławiu.
[21] Richmond J., (1974), *Estimating the efficiency of production*, "International Economic Review" Vol. 15 (No 2), 515-521.
[22] Serfling R.J., (1991), *Twierdzenia graniczne statystyki matematycznej*, PWN Warszawa.
[23] Simar L., Wilson P.W., (2008), *Statistical Inference in Nonparametric Frontier Models: Recent Developments and Perspectives*, rozdział 4 w: Fried H., Lovell K., Schmidt S. (eds) "The measurement of productive efficiency and productivity growth", Oxford University Press, New York.
[24] Simar L., Wilson P.W., (2010), *Estimation and inference in crosssectional stochastic frontier models*, "Econometric Reviews" Vol. 29 (No 1), 62-98.
[25] Varian H., (1982), *The nonparametric approach to demand analysis*, "Econometrica" Vol. 50, 945-973.
[26] Wu C.F., (1982), *Some algorithms for concave and isotonic regression*, "TIMS Studies in Management Science" Vol. 19, 105-116.
[27] Yatchew A.J., Bos L., (1997), *Nonparametric regression and testing in economic models*, "Journal of Quantitative Economics" Vol. 13, 81-131.

WYBRANE METODY ESTYMACJI W SEMIPARAMETRYCZNYM MODELU GRANICZNYM

S t r e s z c z e n i e

W artykule przedstawiono metody estymacji funkcji produkcji używane w ramach szczególnego modelu granicznego. Ma on semiparametryczny charakter, co wynika z faktu, iż sama granica produkcyjna nie jest zadana analitycznie. Założenia dotyczące składnika losowego mają jednak charakter parametryczny. W celu estymacji granicy stosuje się procedurę wieloetapową zwaną StoNED (z ang. *Stochastic Non-smooth Envelopment of Data*). Jej pierwszą część stanowi tzw. metoda CNLS (z ang. *Convex Nonparametric Least Squares*) będąca nieparametrycznym odpowiednikiem MNK. Kolejne etapy przebiegają wg schematu używanego, od wielu lat, na gruncie stochastycznych modeli granicznych. W wyniku uzyskuje się nie tylko estymantę funkcji produkcji w punkcie, lecz także ocenę miernika nieefektywności technicznej dla danej jednostki produkcyjnej. W pracy przedstawiono również pewne uwagi krytyczne dotyczące wad i ograniczeń stosowanej metodologii oraz zilustrowano działanie procedury na przykładzie empirycznym. Na koniec przedstawiono potencjalne kierunki badań w tym zakresie.

Słowa kluczowe: semiparametryczny model graniczny, funkcja produkcji, metoda CNLS, metoda StoNED

SELECTED ESTIMATION METHODS IN THE SEMIPARAMETRIC FRONTIER MODEL

A b s t r a c t

In the paper estimation methods of the production function which are used in the special frontier model are described. The frontier model is of a semiparametric nature, as the production frontier is not given analytically. However, assumptions related to the model errors have parametric character. In order to estimate the frontier, the so-called StoNED (Stochastic Non-smooth Envelopment of Data) multi-stage procedure is used. The first step forms the CNLS method (Convex Nonparametric Least Squares), which is a nonparametric counterpart of OLS. Next stages run according to a scheme, which has been used on the ground of the stochastic frontier models for many years. As a result not only the estimator of the production function is received, but also the estimator of the inefficiency term for a given production unit. In the paper some critical remarks are presented. They are related to faults and limitations of the research methodology. Next, the procedure is illustrated with an empirical study. Finally, potential directions for further research in the area are presented.

Key words: semiparametric frontier model, production function, CNLS method, StoNED method