PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LIX – ZESZYT 4 – 2012

ANNA ŚLESZYŃSKA-POŁOMSKA

O ANALIZIE PORTFELOWEJ WARTOŚĆ ŚREDNIA – WARTOŚĆ ZAGROŻONA[1]

1. WPROWADZENIE

Klasyczne podejście do analizy portfelowej – analiza wartość średnia-ryzyko – zostało zapoczątkowane przez Markowitza (1952, 1959). Jego prace były pierwszym uporządkowanym opisem problemu inwestora – dążenia do jak najwyższego zysku przy możliwie niskim ryzyku. Podejście to jest obecnie powszechnie stosowane w finansach – przede wszystkim ze względu na intuicyjność rozumowania. W kolejnych latach doczekało się ono wielu rozszerzeń i dodatkowych analiz. W niniejszym artykule omówiono pewną modyfikację modeli rynku opisanych przez Blacka (1972) oraz Tobina (1958, 1965). Obydwa modele dopuszczają nieograniczoną krótką sprzedaż. W modelu Blacka zakłada się ponadto brak walorów pozbawionych ryzyka, zmodyfikowany model Tobina przyjmuje natomiast występowanie jednego waloru pozbawionego ryzyka.

Do rozwoju powyższych modeli w znaczący sposób przyczynił się Merton (1972). Przeprowadził on dokładne matematyczne rozumowanie, które doprowadziło do otrzymania wzorów opisujących portfele minimalnego ryzyka i portfele efektywne w każdym z tych modeli. Ponadto scharakteryzował granice minimalne i efektywne w modelach. Analogiczną analizę przeprowadził Marc C. Steinbach (2001).

Jak sugerował Markowitz (1959), w miejsce odchylenia standardowego można stosować inne miary. W swojej pracy porównał podejście oparte na odchyleniu standardowym z szeregiem miar (semiwariancją, oczekiwaną stratą, oczekiwanym absolutnym odchyleniem, prawdopodobieństwem straty, maksymalną stratą), wskazał na istotnie lepsze rezultaty uzyskiwane przy stosowaniu odchylenia standardowego.

W niniejszym artykule jako alternatywną miarę do odchylenia standardowego stosuję VaR. Koncepcja wykorzystania takiej miary ryzyka do analizy wartość średnia-ryzyko po raz pierwszy została zaproponowana przez Baumola (1963). Zwrócił on uwagę na fakt, że stosowanie odchylenia standardowego jako miary ryzyka może prowadzić do odrzucania inwestycji o bardzo wysokich stopach zwrotu a jednocześnie wysokim ryzyku. Zauważył jednocześnie, że inwestycje te mogą być stosunkowo bezpieczne, gdy stopa zwrotu jest odpowiednio duża. Skonstruował więc nową miarę wyznaczaną jako $E - K\sigma$ (nie nazywając jej jednak Value at Risk), zwracając uwagę

[1] Praca powstała na podstawie (Śleszyńska-Połomska, 2008).

na jej zalety w porównaniu z odchyleniem standardowym. Tak skonstruowana miara znacznie ogranicza zbiór portfeli efektywnych, a co za tym idzie upraszcza decyzję, jaką musi podjąć inwestor. Oczywistą wadą jest natomiast konieczność podjęcia już na początku decyzji o wartości stałej K, która odzwierciedla stosunek inwestora do ryzyka. W kolejnych latach wykorzystanie Value at Risk jako miary ryzyka stało się dość popularne. Pojawiły się też kolejne miary, będące modyfikacją Value at Risk (por. Rockafellar, Uryasev, 1999).

Porównanie szeregu modeli analizy portfelowej zbudowanych w oparciu o VaR jako miarę ryzyka przeprowadzili Alexander i Baptista (2002) oraz Giorgi (2002). Skupili się na matematycznych własnościach tych modeli. Porównanie zbioru portfeli efektywnych dla ryzyka mierzonego przy pomocy VaR, $CVaR$ oraz σ przeprowadzili także Gaivoronski i Pflug (2004-2005). Nie zajmowali się jednak matematyczną analizą mającą na celu wyznaczenie granicy efektywnej. Skupili się na wykorzystaniu danych historycznych do wyznaczenia efektywnych portfeli minimalnego ryzyka. Podobne analizy zawierają również prace innych autorów, jak na przykład Consigli (2002), Charpentier i Oulidi (2007).

Niniejszy artykuł różni się od dotychczasowych prac badawczych podejmowanych w tym temacie przede wszystkim tym, że wszystkie pojęcia zostały precyzyjnie zdefiniowane, a wszystkie lematy i twierdzenia udowodnione. Pozwoliło to na analizę rezultatów oraz porównanie portfeli minimalnego ryzyka i portfeli efektywnych przy podejściu E–σ i E–VaR. Wyznaczono ponadto wzory opisujące granicę minimalną przy stosowaniu podejścia E–VaR oraz zwrócono uwagę na jej związek z granicą minimalną modelu E–σ.

Dokładna analiza modelu E–VaR została przeprowadzona dla stóp zwrotu o rozkładzie normalnym. Wykorzystano i poszerzono rezultaty prac Mertona (1972), De Giorgi (2002) oraz Alexander, Baptista (2002). W odróżnieniu od pracy Alexander, Baptista (2002) zwrócono dodatkowo uwagę na powiązania pomiędzy modelami E–σ i E–VaR wynikające z analitycznych właściwości krzywych opisujących granice minimalne. Rozpatrzono ponadto model, którego nie omówili Alexander, Baptista (2002) – zmodyfikowany model Tobina. Inaczej niż De Giorgi (2002) i Alexander, Baptista (2002) zwrócono uwagę na geometryczny aspekt modeli oraz powiązań między nimi. Duże znaczenie ma tutaj fakt, że granica minimalna w modelu standardowym jest hiperbolą, a wektor (E, VaR) dla stóp zwrotu o rozkładzie normalnym jest obrazem przy przekształceniu afinicznym wektora (E, σ).

W całej analizie przyjęto, że stopy zwrotu mają wielowymiarowy rozkład normalny. Również Rockafellar, Uryasev (1999), Alexander, Baptista (2002) i De Giorgi (2002) przyjmowali takie założenie. Jak zauważają Alexander i Baptista (2002), szereg analiz potwierdza, że estymacja VaR przy założeniu normalności daje dobrą aproksymację historycznego VaR.

W dalszej części artykułu omówiono kolejno model E-VaR bez walorów pozbawionych ryzyka oraz z jednym walorem pozbawionym ryzyka. Ponadto w załącznikach zostały sformułowane twierdzenia dla modeli E–σ bez walorów pozbawionych ryzyka oraz z jednym takim walorem, które są wykorzystywane w czasie analizy modelu $E–VaR$.

2. MODEL $E–VaR$ BEZ WALORÓW POZBAWIONYCH RYZYKA

Załóżmy, że na rynku dostępnych jest $k > 2$ walorów ryzykownych i nie występują walory pozbawione ryzyka, a wektor stóp zwrotu z dostępnych walorów ma wielowymiarowy rozkład normalny o wartości oczekiwanej μ oraz wariancji Σ. Macierz Σ jest dodatnio określona, natomiast wektor μ nie jest równoległy do wektora jednostkowego.

$$R = (R_1, ..., R_k), \quad R \sim N(\mu, \Sigma), \tag{1}$$

$$\mu = (\mu_1, ..., \mu_k)^T, \quad \mu \nparallel e = (1, ..., 1)^T, \tag{2}$$

$$\Sigma = \left(\sigma_{ij}\right)_{1 \le i, j \le k}, \quad \Sigma > 0. \tag{3}$$

Niech:

$$P = \left\{x \in R^k; e^T x = 1\right\} \tag{4}$$

będzie zbiorem portfeli dopuszczalnych, gdzie:

$$x = (x_1, ..., x_k), \tag{5}$$

(x_i oznacza udział w portfelu i-tego waloru). Przyjmujemy, że na rynku jest dopuszczalna nieograniczona krótka sprzedaż, dlatego x_i może przyjmować wartości ujemne. Dla każdego portfela dopuszczalnego x można wyznaczyć wartość średnią:

$$E(x) = E(R^T x) = \mu^T x \tag{6}$$

oraz odchylenie standardowe:

$$\sigma(x) = \sigma(R^T x) = \sqrt{x^T \Sigma x}. \tag{7}$$

Przy powyższych założeniach mamy:

$$\sup_{x \in P} E(x) = +\infty, \qquad \inf_{x \in P} E(x) = -\infty. \tag{8}$$

Dla potrzeb modelu $E–VaR$, w oparciu o wartość średnią i odchylenie standardowe, wyznaczymy Value at Risk portfela przy poziomie ufności c, określające jego ryzyko. W tym celu przyjmujemy oznaczenia:

L – zmienna losowa określająca stratę wartości instrumentu finansowego lub portfela instrumentów, jaka może nastąpić na końcu okresu inwestycyjnego,

c – liczba z przedziału (0,1) określająca poziom ufności inwestora.

Wtedy zgodnie z definicją Value ar Risk:

$$VaR_c(L) = \inf\{x \in R; P(L \le x) \ge c\} = q_c^-(L),$$

gdzie $q_c^-(L)$ jest dolnym c-kwantylem zmiennej L[2]. Dla $L \sim N(\mu, \sigma)$ zachodzi zatem:

$$VaR_c(L) = -E(L) + t\sigma(L).$$

Niech teraz $L = Y_0 - Y$, gdzie $Y_0 > 0$ jest kapitałem początkowym, a Y kapitałem końcowym inwestora. Wtedy $L = -RY_0$. Przyjmując teraz, że $R \sim N(\mu, \Sigma)$ i korzystając z własności VaR dostaniemy:

$$VaR_c(L) = q_c^-(-RY_0) = Y_0 q_c^-(-R) = Y_0\left(-\mu + \sigma\Phi^{-1}(c)\right).$$

Nie tracąc ogólności dalszych rozważań można przyjąć, że $Y_0 = 1$. Zatem VaR dla stóp zwrotu o rozkładzie $N(\mu, \Sigma)$ jest zadany równaniem $VaR_c(R) = -\mu + \sigma\Phi^{-1}(c)$.

Dla modelu opartego na założeniach (1) – (8) można więc zapisać VaR jako:

$$V(x) = VaR_c(x) = -E(x) + t\sigma(x), \tag{9}$$

gdzie:

$$t = \Phi^{-1}(c) \in (0, \infty) \text{ dla } c \in \left(\frac{1}{2}, 1\right). \tag{10}$$

Przy tak zdefiniowanym ryzyku dla modelu można wprowadzić szereg definicji analogicznych do definicji z podejścia standardowego (załącznik 1).

Definicja 2.1. Odwzorowaniem Markowitza w płaszczyznę (V, E) nazywamy przekształcenie:

$$M^V : P \to R \times R \tag{11}$$

takie, że:

$$\underset{x \in P}{\forall}\ M^V(x) = (V(x), E(x))^T. \tag{12}$$

Definicja 2.2. Zbiorem możliwości na płaszczyźnie (V, E) nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych (wartość zagrożona, oczekiwana stopa zwrotu), jakie można otrzymać, wybierając dowolny portfel dopuszczalny. Możemy zatem zapisać:

$$O^V = M^V(P). \tag{13}$$

Definicja 2.3. Portfel x jest efektywny w sensie E–VaR wtedy, gdy nie istnieje $x' \in P$ taki, że:

$$\begin{cases} E(x') \geq E(x) \\ V(x') < V(x) \end{cases} \vee \begin{cases} E(x') > E(x) \\ V(x') \leq V(x) \end{cases}, \tag{14}$$

Definicja 2.4. Granicą efektywną w sensie E–VaR zbioru możliwości P nazwiemy zbiór wszystkich punktów zbioru możliwości na płaszczyźnie (V, E) reprezentujących portfele efektywne. Będziemy ją oznaczać jako F_e^V.

---

[2] Przypominamy, że dolny α-kwantyl zmiennej X jest to liczba q_α^- taka, że $q_\alpha^- = \inf\{x \in R; P(X \leq x) \geq \alpha\}$.

Definicja 2.5. Niech $\tilde{E} \in R$.
1. Portfelem minimalnego VaR nazwiemy portfel x_0^V minimalizujący VaR.
2. Każdy portfel x minimalizujący VaR dla pewnej oczekiwanej stopy zwrotu $\tilde{E}$ nazywamy portfelem względnie minimalnego VaR.

Definicja 2.6. Obraz wszystkich portfeli względnie minimalnego VaR przy odwzorowaniu Markowitza nazywamy granicą minimalną $F_{\min}^V$. Obraz portfela $x \in P$ należy do granicy minimalnej E–VaR wtedy, gdy dla pewnego $E \in R$ x jest rozwiązaniem problemu:

$$\begin{cases} \min\limits_{x \in P} V(x) \\ E(x) = E. \end{cases} \tag{15}$$

Lemat 2.1. Dla każdego $E \in R$ portfel x jest portfelem minimalnego VaR dla oczekiwanej stopy zwrotu E wtedy i tylko wtedy, gdy x jest portfelem minimalnego σ dla tej oczekiwanej stopy zwrotu. To uzasadnia nazwanie prostej krytycznej w modelu E–σ bez walorów pozbawionych ryzyka prostą krytyczną w modelu E–VaR bez walorów pozbawionych ryzyka.

Dowód.

Zgodnie z definicją 2.6 oraz wzorem (9) szukamy portfeli rozwiązujących problem:

$$\min_{\substack{x \in P \\ E(x) = E}} \left(-E(x) + t\sigma(x)\right) \overset{t>0}{=} -E + t \min_{\substack{x \in P \\ E(x) = E}} \left(\sigma(x)\right),$$

czyli poszukujemy portfeli o minimalnym odchyleniu standardowym, a zatem minimalnym ryzyku w sensie E–σ.

□

Warto zauważyć, że VaR zadany równaniem (9) jest liniową funkcją E oraz σ. Granica minimalna na płaszczyźnie (V, E) jest zatem obrazem przy przekształceniu afinicznym granicy minimalnej na płaszczyźnie (σ, E). Z twierdzenia Mertona [por. twierdzenie 1 w załączniku 1] wynika, że granica minimalna w modelu E–σ bez walorów pozbawionych ryzyka jest hiperbolą o równaniu:[3]

$$\sigma^2 = \frac{CE^2 - 2AE + B}{D}. \tag{16}$$

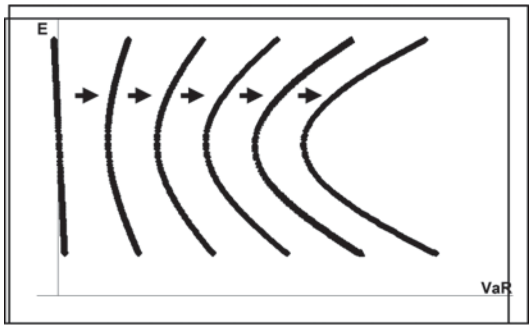
Podstawiając do wzoru (16) wartość σ wyznaczoną ze wzoru (9) w zależności od V otrzymujemy równanie gałęzi hiperboli, która stanowi granicę minimalną dla modelu E-VaR:

$$\frac{(V + E)^2}{\frac{t^2}{C}} - \frac{\left(E - \frac{A}{C}\right)^2}{\frac{D}{C^2}} = 1. \tag{17}$$

[3] Warto tutaj zwrócić uwagę, że $D>0$. Z dodatniej określoności macierzy Σ^{-1} oraz założenia (2) mamy: $(\mu A - eB)^T \Sigma^{-1} (\mu A - eB) > 0$, co po przemnożeniu daje: $BD > 0$. $B > 0$ (z dodatniej określoności Σ^{-1}) zatem $D > 0$.

W analogiczny sposób otrzymujemy równania asymptot (korzystając ze wzoru (6) z załącznika 1):

$$E\left(t \mp \sqrt{\frac{D}{C}}\right) = tE_0 \pm V\sqrt{\frac{D}{C}}. \tag{18}$$



Rysunek 1. Granice minimalne w modelu *E-VaR* dla różnych wartości c. Krzywa przecinająca oś E (linia prosta) odpowiada przypadkowi, gdy $c \to \frac{1}{2}$. Strzałki wskazują kierunek wzrostu c

Źródło: Opracowanie własne.

Warto zwrócić uwagę na kilka faktów związanych z Value at Risk portfela przy różnych poziomach ufności (por. Alexander, Baptista, 2002). Dla c dążącego do $\frac{1}{2}$ mamy:

$$\underset{x \in P}{\forall} \lim_{c \to \frac{1}{2}} V(x) = \lim_{t \to 0} V(x) = -E(x). \tag{19}$$

Poszukiwanie portfeli minimalnego ryzyka w modelu *E-VaR* jest zatem przy poziomie ufności dążącym do $\frac{1}{2}$ równoważne maksymalizowaniu oczekiwanej stopy zwrotu z portfela. Granica minimalna na płaszczyźnie (V, E) będzie natomiast linią prostą o nachyleniu -1.

Inaczej wygląda minimalizacja ryzyka dla c dążącego do 1:

$$\underset{x \in P}{\forall} \lim_{c \to 1} V(x) = \lim_{t \to +\infty} V(x) = +\infty, \tag{20}$$

$$\underset{x \in P}{\forall} \lim_{c \to 1} \frac{V(x)}{t} = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{-E(x)}{t} + \sigma(x)\right) = \sigma(x). \tag{21}$$

W przypadku bardzo wysokiego poziomu ufności wpływ wartości oczekiwanej stopy zwrotu portfela na wartość ryzyka maleje. Granice minimalne dla różnych poziomów ufności przedstawia rysunek 1.

Zgodnie z lematem 2.1, portfele względnie minimalnego ryzyka w sensie *E-VaR* są identyczne z portfelami względnie minimalnego ryzyka w sensie E–σ. Nie ma natomiast takiego powiązania pomiędzy portfelami minimalnego ryzyka, można jednak zauważyć inną prawidłowość (por. Alexander, Baptista, 2002). Niech x_0^V oznacza portfel minimalnego VaR, o ile taki istnieje. Prawdziwy jest następujący lemat.

Lemat 2.2. Jeśli portfel x_0^V istnieje, to jest on efektywny w sensie E–σ.
Dowód

Przypuśćmy, że x_0^V istnieje i nie jest E–σ efektywny. Zgodnie z definicją portfela efektywnego w sensie E–σ mamy wtedy:

$$\begin{cases} E(x) \geq E\left(x_0^V\right) \\ \sigma(x) < \sigma\left(x_0^V\right) \end{cases} \vee \begin{cases} E(x) > E\left(x_0^V\right) \\ \sigma(x) \leq \sigma\left(x_0^V\right) \end{cases}.$$

Mnożąc pierwszą nierówność przez (-1), a drugą przez t, a następnie dodając stronami, otrzymujemy:

$$-E(x) + t\sigma(x) < -E\left(x_0^V\right) + t\sigma\left(x_0^V\right),$$

co oznacza $V(x) < V\left(x_0^V\right)$, zatem x_0^V nie jest portfelem minimalnego VaR.

□

W przypadku modelu stosującego odchylenie standardowe jako miarę ryzyka, portfel minimalnego ryzyka zawsze istnieje [por. twierdzenie 2 w załączniku 1]. Na rysunku 1, przedstawiającym przykładowe granice minimalne dla modelu E-VaR, widać natomiast, że dla pewnych wartości c taki portfel może nie istnieć. Wynika to z konstrukcji miary ryzyka, jaką jest VaR. Gdy poruszamy się wzdłuż granicy minimalnej E–σ, napotykamy na dwa efekty oddziałujące na wartość VaR. Pierwszy efekt, to wpływ wartości σ, a drugi to wpływ wartości E. Gdy wartość poziomu ufności c jest zbyt niska, efekt wartości średniej ma na tyle duży wpływ na wartość VaR, że problem minimalizacji ryzyka może nie mieć rozwiązania. Poniższe twierdzenie (por. Alexander, Baptista, 2002) opisuje warunki, dla których x_0^V istnieje.

Twierdzenie 2.1. Niech A, B, C, D, g, h zadane tak jak w twierdzeniu Mertona (załącznik 1, równania (2), (4), (5)). Wtedy:

1. Portfel minimalnego VaR istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$c > \Phi\left(\sqrt{\frac{D}{C}}\right). \tag{22}$$

2. Jeśli portfel minimalnego VaR istnieje, to jego wartość oczekiwana wynosi:

$$E_0 = E\left(x_0^V\right) = \frac{A}{C} + \frac{D}{C\sqrt{Ct^2 - D}}. \tag{23}$$

3. VaR portfela minimalnego VaR wynosi:

$$V_0 = V\left(x_0^V\right) = t\sqrt{\frac{t^2}{Ct^2 - D}} - \left(\frac{A}{C} + \frac{D}{C\sqrt{Ct^2 - D}}\right). \tag{24}$$

4. Portfel minimalnego VaR jest zadany równaniem:

$$x_0^V = g + h\left(\frac{A}{C} + \frac{D}{C\sqrt{Ct^2 - D}}\right). \tag{25}$$

Dowód

1. Pokażemy, że warunek (22) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na istnienie portfela minimalnego VaR. Wykażmy najpierw poniższą uwagę:

(*) Jeżeli $x \in P$, to x jest portfelem minimalnego VaR wtedy i tylko wtedy, gdy x minimalizuje funkcję V obciętą do zbioru portfeli E–σ efektywnych.

Wynika ona bezpośrednio z lematu 2.2 oraz faktu, że dla każdego $z \in P$ istnieje portfel E–σ efektywny taki, że:

$$V(z') \leq V(z). \tag{26}$$

Możliwe są dwa przypadki. Załóżmy najpierw, że dla portfela $z \in P$ istnieje portfel efektywny z' taki, że $E(z) = E(z')$. Oczywiście portfel z' ma wtedy niższe odchylenie standardowe niż portfel z, zatem zachodzi (26). Przyjmijmy teraz, że dla portfela $z \in P$ istnieje portfel nieefektywny z'' taki, że $E(z) = E(z'')$. Portfel z'' ma niższe odchylenie standardowe niż portfel z, zatem zachodzi:

$$V(z'') \leq V(z). \tag{27}$$

Dla portfela z'' istnieje portfel efektywny z' taki, że $\sigma(z'') = \sigma(z')$ oraz $E(z'') = E(z')$, zatem:

$$V(z') \leq V(z''). \tag{28}$$

Z nierówności (27) i (28) mamy zatem (26).

Niech x będzie dowolnym portfelem E–σ efektywnym. Zatem x spełnia [por. lemat 1 w załączniku 1]:

$$\frac{\sigma^2(x)}{\frac{1}{C}} - \frac{\left(E(x) - \frac{A}{C}\right)^2}{\frac{D}{C^2}} = 1. \tag{29}$$

$$E(x) \geq \frac{A}{C}. \tag{30}$$

$$\sigma^2(x) \geq \frac{1}{C}. \tag{31}$$

Przekształcając równanie (29) otrzymujemy:

$$\frac{D}{C^2}\left(C\sigma^2(x) - 1\right) = \left(E(x) - \frac{A}{C}\right)^2.$$

Z nierówności (31) wynika, że $C\sigma^2(x) - 1 \geq 0$, natomiast z lematu 2.2 $E(x) \geq \frac{A}{C}$, zatem pierwiastkując obie strony powyższej nierówności mamy:

$$\sqrt{\frac{D}{C}\left(\sigma^2(x) - \frac{1}{C}\right)} + \frac{A}{C} = E(x). \tag{32}$$

Szukamy portfela minimalnego ryzyka, zatem zgodnie z uwagą (*) chcemy rozwiązać problem:

$$\min_{x \in P} V(x) = \min_{\substack{x \in P \\ O(x) \in F_e}} \left[-\left(\sqrt{\frac{D}{C}\left(\sigma^2(x) - \frac{1}{C}\right)} + \frac{A}{C}\right) + t\sigma(x)\right].$$

Zauważmy najpierw, że zgodnie z nierównością (31), wartość liczby podpierwiastkowej we wzorze opisującym $V(x)$ nie jest ujemna, zatem pochodna $\frac{dV}{d\sigma}$ jest dobrze określona dla $\sigma \neq \frac{1}{\sqrt{C}}$:

$$\frac{dV}{d\sigma} = t - \frac{\sigma\sqrt{\frac{D}{C}}}{\sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{C}}}.$$

Sprawdźmy, czy portfel minimalnego ryzyka w sensie E–σ (x_0) może być portfelem minimalnego ryzyka w sensie E-VaR. Zauważmy, że:

$$\lim_{\sigma \to \frac{1}{\sqrt{C}}} \frac{dV}{d\sigma} = \lim_{\sigma \to \frac{1}{\sqrt{C}}} \left(t - \frac{\sigma\sqrt{\frac{D}{C}}}{\sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{C}}}\right) = -\infty,$$

zatem x_0 nie rozwiązuje problemu minimalizacyjnego. Zachodzi więc:

$$\sigma^2 - \frac{1}{C} \neq 0. \tag{33}$$

W celu znalezienia punktu minimalnego V, znajdźmy punkt zerowania pochodnej.

$$\frac{dV}{d\sigma} = t - \frac{\sigma\sqrt{\frac{D}{C}}}{\sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{C}}} = 0 \;\Leftrightarrow\; \sigma^2\left(t^2 - \frac{D}{C}\right) = \frac{t^2}{C}.$$

Aby rozwiązanie istniało konieczne jest zatem, aby $t > \sqrt{\frac{D}{C}}$, co jest równoważne temu, że $c > \Phi\left(\sqrt{\frac{D}{C}}\right)$. Wtedy:

$$\sigma_0^V = \sigma\left(x_0^V\right) = \sqrt{\frac{t^2}{Ct^2 - D}}, \tag{34}$$

pod warunkiem, że: $c > \Phi\left(\sqrt{\frac{D}{C}}\right)$.

Kolejnym krokiem dowodu będzie pokazanie, że powyższy warunek jest także warunkiem dostatecznym. W tym celu, wyznaczmy drugą pochodną $\frac{d^2V}{d\sigma^2}$, gdy $t > \sqrt{\frac{D}{C}}$ oraz $\sigma > \sqrt{\frac{1}{C}}$. Mamy:

$$\frac{d^2V}{d\sigma^2} = \frac{\frac{1}{C}\sqrt{\frac{D}{C}}}{\left(\sigma^2 - \frac{1}{C}\right)^{\frac{3}{2}}} > 0. \tag{35}$$

Minimalizowana funkcja jest zatem wypukła, gdy spełniony jest warunek (22). Posiada więc jedno minimum w punkcie zerowania się pierwszej pochodnej. Co kończy dowód punktu pierwszego.

2. Korzystając z dowodu punktu 1. wiemy, że odchylenie standardowe dla portfela minimalnego VaR jest zadane równaniem (34). Wtedy wartość oczekiwana wynosi (zgodnie z (32)):

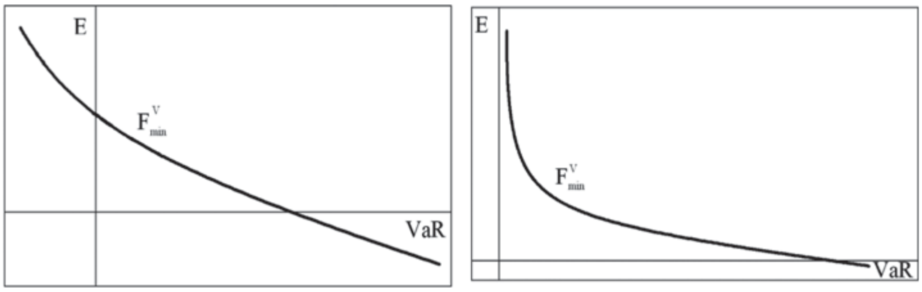
$$E_0^V = E\left(x_0^V\right) = \frac{A}{C} + \frac{D}{C\sqrt{Ct^2 - D}}. \tag{36}$$

3. Korzystając z (34) i (36) otrzymujemy VaR portfela minimalnego VaR zadany równaniem (24).
4. Portfel minimalnego VaR należy do granicy minimalnej w sensie $E - \sigma$, zatem zgodnie z twierdzeniem Mertona spełnia $x_0^V = g + hE_0^V$. Podstawiając (36), otrzymamy tezę.

□

Twierdzenie 2.1 pokazuje, że w przypadku stosowania podejścia E-VaR, należy być ostrożnym przy wyborze poziomu ufności. Dla zbyt małych c portfel minimalizujący VaR może w ogóle nie istnieć. Wynika to z tego, że przekształcenie afiniczne $F_{\min}$ w $F_{\min}^V$ dla zbyt niskich wartości c powoduje, że górna gałąź hiperboli staje się wypukła.

Kolejnym etapem analizy będzie wyznaczenie warunków gwarantujących istnienie portfeli efektywnych w sensie E-VaR (por. Alexander, Baptista, 2002).



Rysunek 2. Pewne przypadki postaci granicy minimalnej w modelu *E-VaR* bez walorów pozbawionych ryzyka dla $c \le \Phi\left(\sqrt{\frac{D}{C}}\right)$

Źródło: Opracowanie własne.

Twierdzenie 2.2.

1. Jeśli $c > \Phi\left(\sqrt{\frac{D}{C}}\right)$, to $x \in P$ jest *E-VaR* efektywny wtedy i tylko wtedy, gdy jego obraz należy do $F^{V}_{\min}$ i $E(x) \ge E\left(x^{V}_{0}\right)$.
2. Jeśli $c \le \Phi\left(\sqrt{\frac{D}{C}}\right)$, to portfel *E-VaR* efektywny nie istnieje.

Dowód

1. Niech $M^{V}(x) \in F^{V}_{\min}$. Wtedy z lematu 2.1, twierdzenia Mertona oraz wzoru (9) wynika, że:

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{1}{C} + \frac{C\left(E(x) - \frac{A}{C}\right)^2}{D}},$$

zatem:

$$V(x) = t\sqrt{\frac{1}{C} + \frac{C\left(E(x) - \frac{A}{C}\right)^2}{D}} - E(x).$$

Granica minimalna jest wykresem funkcji:

$$V(E) = t\sqrt{\frac{1}{C} + \frac{C\left(E - \frac{A}{C}\right)^2}{D}} - E, \quad E \in R. \tag{37}$$

Zauważmy, że:

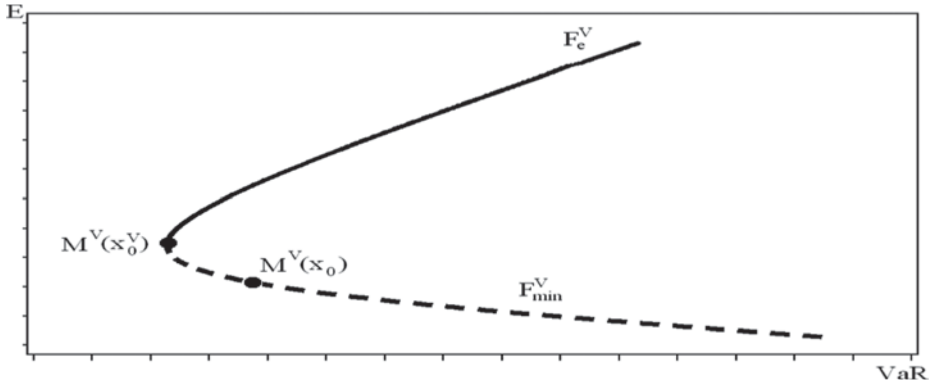
$$\frac{dV}{dE} = t\frac{\left(E - \frac{A}{C}\right)\frac{C}{D}}{\sqrt{\frac{1}{C} + \frac{C\left(E-\frac{A}{C}\right)^2}{D}}} - 1, \quad E \in R. \tag{38}$$

To i twierdzenie 2.1 dają $\frac{dV}{dE}\Big|_{E=E_o^V} = 0$. Ponadto dla $E \in R$ ma miejsce $\frac{d^2V}{dE^2} > 0$. Stąd wynika, że V jest ściśle wypukłą funkcją E, osiągającą minimum dla E_0^V, co daje tezę (rysunek 3).

2. Z założenia wynika, że $t \leq \sqrt{\frac{D}{C}}$. Wtedy przy oznaczeniach z dowodu punktu 1. oraz z (37) i (38) otrzymujemy $\frac{dV}{dE}(E) < 0, \quad E \in R$. Przeto V jest ściśle malejącą funkcją E, więc nie istnieje portfel efektywny (rysunek 2).

□

Warunek konieczny istnienia portfeli E-VaR efektywnych jest zatem taki sam, jak warunek konieczny istnienia portfela minimalnego VaR. Warto jeszcze zwrócić uwagę, że:
Uwaga 2.1. Jeśli portfel minimalnego VaR istnieje, to jego obraz przy odwzorowaniu M i M^V na krzywych F_e i F_e^V leży powyżej (σ_0, E_0) i $(V(x_0), E_0)$ (co wynika bezpośrednio z twierdzenia 2.1). Oznacza to, że portfel x_0 nie jest efektywny w sensie E-VaR (rysunek 3).



Rysunek 3. Granica minimalna (ozn. linią ciągłą i przerywaną) i granica efektywna (ozn. linią ciągłą) w modelu E-VaR bez walorów pozbawionych ryzyka dla $c > \Phi\left(\sqrt{\frac{D}{C}}\right)$ i $V_0 > 0$

Źródło: Opracowanie własne.

Warto zauważyć, że wraz ze zwiększaniem poziomu ufności c, x_0^V będzie zbiegał do portfela x_0, ponieważ:

$$\lim_{c\to 1} E\left(x_0^V\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{A}{C} + \frac{D}{C\sqrt{Ct^2 - D}}\right) = \frac{A}{C} = E_0. \tag{39}$$

Natychmiastowym wnioskiem jest następujący lemat (por. Alexander, Baptista, 2002):

Lemat 2.3. Zbiór portfeli $E\text{-}VaR$ efektywnych jest podzbiorem właściwym zbioru portfeli $E-\sigma$ efektywnych dla $c < 1$. Natomiast w granicy, gdy $c \to 1$, zbiory te pokrywają się.

Dowód

Zgodnie z twierdzeniem 2.2 dla $c \leq \Phi\left(\frac{D}{C}\right)$ portfele $E\text{-}VaR$ efektywne nie istnieją. Zbiór portfeli $E\text{-}VaR$ efektywnych, jako zbiór pusty, jest zatem podzbiorem zbioru portfeli $E\text{–}\sigma$ efektywnych. Dla $c > \Phi\left(\frac{D}{C}\right)$ (zgodnie z twierdzeniem 2.2) wiemy, że portfel jest efektywny w sensie $E\text{-}VaR$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M^V(x) \in F^V_{\min}$ oraz $E(x) \geq E\left(x_0^V\right)$.

Na mocy uwagi 2.1 x_0 nie jest $E\text{-}VaR$ efektywny. Zbiór portfeli $E\text{-}VaR$ efektywnych jest zatem podzbiorem zbioru portfeli $E-\sigma$ efektywnych. Dla $c \to 1$ zachodzi natomiast równość (39), zatem zbiory te pokryją się w granicy. □

Zastosowanie VaR jako miary ryzyka prowadzi zatem do zmniejszania zbioru portfeli efektywnych w porównaniu z kryterium $E-\sigma$. Ponadto ma miejsce:

$$\lim_{c\to\Phi\left(\sqrt{\frac{D}{C}}\right)^-} E\left(x_0^V\right) = +\infty. \tag{40}$$

Należy być ostrożnym przy wyborze poziomu ufności. Zbyt niski poziom c sprawia, że wartość oczekiwana ma znacząco większy wpływ na wartość VaR niż σ. Minimalizując VaR wybieramy wtedy portfel z wysoką wartością oczekiwaną oraz wysokim σ.

3. MODEL $E\text{-}VaR$ Z WALOREM POZBAWIONYM RYZYKA

Utrzymując oznaczenia i definicje z części 1 przyjmijmy, że poza walorami ryzykownymi dostępny jest jeden walor pozbawiony ryzyka (tzn. taki, dla którego $\sigma = 0$). Mamy wtedy:

$$\bar{R} = (\mu_0, R), \qquad R \sim N(\mu, \Sigma), \tag{41}$$

$$\bar{\mu} = (\mu_0, \mu^T)^T, \quad \mu \nparallel e, \tag{42}$$

$$\bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma \end{pmatrix} \tag{43}$$

Przyjmijmy ponadto rozszerzoną definicję zbioru dopuszczalnego, x_b to udział w portfelu waloru pozbawionego ryzyka.

$$\bar{P} = \left\{\bar{x} \in R^{k+1}; e^T\bar{x} = 1\right\}, \tag{44}$$

gdzie:

$$\bar{x} = \left(x_b, x^T\right)^T. \tag{45}$$

Dla każdego portfela dopuszczalnego x możemy wyznaczyć odpowiednio wartość średnią, odchylenie standardowe oraz Value at Risk:

$$E(\bar{x}) = E\left(\bar{R}^T \bar{x}\right) = \bar{\mu}^T \bar{x} \tag{46}$$

$$\sigma(\bar{x}) = \sigma\left(\bar{R}^T \bar{x}\right) = \sqrt{\bar{x}^T \bar{\Sigma} \bar{x}} = \sqrt{x^T \Sigma x} \tag{47}$$

$$V(\bar{x}) = -E(\bar{x}) + t\sigma(\bar{x}) = -E(\bar{x}) + t\sigma(x). \tag{48}$$

Główne pojęcia w modelu *E-VaR* z walorem pozbawionym ryzyka są zdefiniowanie dla $\bar{x} \in \bar{P}$ analogicznie, jak w modelu z części 2:

- odwzorowanie Markowitza $\bar{M}^V : \bar{P} \to R_+ \times R$ odpowiada definicji 2.1,
- zbiór możliwości $\bar{O}^V$- definicji 2.2,
- portfel efektywny w sensie *E-VaR* – definicji 2.3,
- granica efektywna $\bar{F}_e^V$ – definicji 2.4,
- portfel względnie minimalnego ryzyka w sensie *E-VaR* – definicji 2.5,
- granica minimalna $\bar{F}_{\min}^V$ – definicji 2.6.

Ponadto mamy:

$$\sup_{\bar{x} \in \bar{P}} E(\bar{x}) = +\infty, \qquad \inf_{\bar{x} \in \bar{P}} E(\bar{x}) = -\infty.$$

W przypadku występowania na rynku waloru pozbawionego ryzyka, granica minimalna *E-VaR* jest wyznaczana w analogiczny sposób jak w modelu bez waloru pozbawionego ryzyka. Zachodzi zatem analogiczny lemat do lematu 2.1.

Lemat 3.1. Dla każdego $E \in R$ portfel x jest portfelem minimalnego *VaR* dla danej oczekiwanej stopy zwrotu E wtedy i tylko wtedy, gdy x jest portfelem minimalnego σ dla tej oczekiwanej stopy zwrotu E. To uzasadnia nazwanie prostej krytycznej w modelu E–σ z walorem pozbawionym ryzyka prostą krytyczną w modelu *E-VaR* z walorem pozbawionym ryzyka.

Korzystając z tego, że *VaR* portfela wyznaczamy jako liniowe przekształcenie E i σ, granica minimalna $\bar{F}_{\min}^V$ na płaszczyźnie (V, E) będzie obrazem przy przekształceniu afinicznym granicy $\bar{F}_{\min}$ na płaszczyźnie (σ, E). Zgodnie z lematem 1.4 oraz wzorem opisującym granicę minimalną $\bar{F}_{\min}$ [por. twierdzenie 4 w załączniku 2], obraz portfela należy do granicy minimalnej $\bar{F}_{\min}^V$ wtedy i tylko wtedy, gdy jego odchylenie standardowe spełnia równanie:

$$\bar{\sigma}(E) = \frac{|E - \mu_0|}{\sqrt{B - 2A\mu_0 + C\mu_0^2}}, \quad E \in R. \tag{49}$$

Podstawiając w miejsce σ wartość wyznaczoną w oparciu o V (ze wzoru (9)), mamy (gdzie $\bar{x}$ jest portfelem względnie minimalnego ryzyka w modelu E-VaR z walorem pozbawionym ryzyka):

$$V(\bar{x}) = \frac{t\,|E(\bar{x}) - \mu_0| - E(\bar{x})\sqrt{B - 2A\mu_0 + C\mu_0^2}}{\sqrt{B - 2A\mu_0 + C\mu_0^2}}.$$

Granica minimalna w płaszczyźnie (VaR, E) dla modelu z walorem pozbawionym ryzyka jest obrazem przy odwzorowaniu afinicznym granicy minimalnej $F_{\min}$ w płaszczyźnie (σ, E). Prawdziwe jest zatem następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.1. Obraz portfela x przy odwzorowaniu Markowitza należy do granicy minimalnej $\bar{F}^V_{\min}$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$V(\bar{x}) = \begin{cases} \dfrac{E(\bar{x})\left(t - \sqrt{B - 2A\mu_0 + C\mu_0^2}\right) - t\mu_0}{\sqrt{B - 2A\mu_0 + C\mu_0^2}}, & gdy\ E(\bar{x}) \geq \mu_0 \\ \dfrac{E(\bar{x})\left(-t - \sqrt{B - 2A\mu_0 + C\mu_0^2}\right) + t\mu_0}{\sqrt{B - 2A\mu_0 + C\mu_0^2}}, & gdy\ E(\bar{x}) < \mu_0. \end{cases} \tag{50}$$

Uwaga 3.1. W modelu bez walorów pozbawionych ryzyka portfele efektywne istniały tylko wtedy, gdy $c > \Phi\left(\sqrt{\dfrac{D}{C}}\right)$. Również dla modelu z walorem pozbawionym ryzyka warunkiem koniecznym do istnienia portfeli efektywnych jest odpowiednio duże c.

Twierdzenie 3.2.

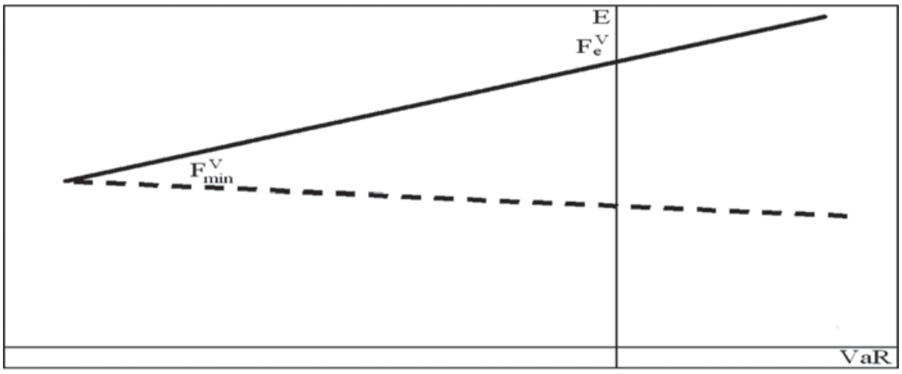
1. Dla $t > \sqrt{B - 2A\mu_0 + C\mu_0^2}$ portfel jest E-VaR efektywny w modelu z walorem pozbawionym ryzyka wtedy i tylko wtedy, gdy jest $E - \sigma$ efektywny w modelu z walorem pozbawionym ryzyka (rysunek 4).
2. Dla $t \leq \sqrt{B - 2A\mu_0 + C\mu_0^2}$ nie istnieją portfele E-VaR efektywne w modelu z walorem pozbawionym ryzyka (rysunek 5).

Dowód

1. Niech $t > \sqrt{B - 2A\mu_0 + C\mu_0^2}$, wtedy górna półprosta z $\bar{F}^V_{\min}$ ma nachylenie dodatnie do osi E, a dolna ujemne (z twierdzenia 3.1). Zatem górna dominuje dolną, przeto $\bar{F}^V_e$ jest górną półprostą z $\bar{F}^V_{\min}$. Zgodnie z lematem 3.1 – obraz portfela przy odwzorowaniu $\bar{M}^V(x)$ leży na górnej półprostej $\bar{F}^V_{\min}$ wtedy i tylko wtedy, gdy przy odwzorowaniu $\bar{M}(x)$ należy do górnej półprostej $\bar{F}_{\min}$, a zatem granicy efektywnej $\bar{F}_e$.

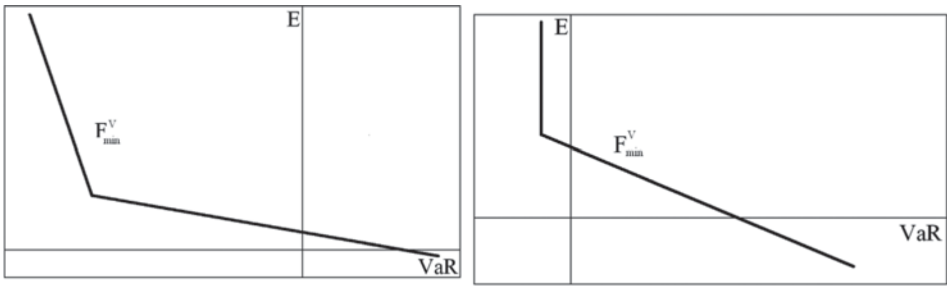
2. Z założenia i twierdzenia 3.1 wynika, że obie półproste z $\bar{F}^{V}_{\min}$ mają nachylenie niedodatnie do osi E. Możliwe jest zatem ciągłe niezwiększanie ryzyka przy jednoczesnym zwiększaniu stopy zwrotu. Nie istnieje więc portfel efektywny.

□



Rysunek 4. Granica minimalna (ozn. linią ciągłą i przerywaną) i granica efektywna (ozn. linią ciągłą) w modelu *E-VaR* z walorem pozbawionym ryzyka dla $t > \sqrt{B - 2A\mu_0 + C\mu_0^2}$ i $\mu_0 > 0$

Źródło: Opracowanie własne.



Rysunek 5. Pewne przypadki postaci granicy minimalnej w modelu *E-VaR* z walorem pozbawionym ryzyka dla $t \leq \sqrt{B - 2A\mu_0 + C\mu_0^2}$ i $\mu_0 > 0$

Źródło: Opracowanie własne.

Kolejnym etapem analizy w modelu z walorem pozbawionym ryzyka jest wyznaczenie portfela stycznego. W przypadku modelu *E-VaR* zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.3 Niech A, B, C, D zadane wzorami (2), E_0- wartość oczekiwana portfela minimalnego σ w modelu bez walorów pozbawionych ryzyka (zadane wzorem (9)). Wtedy:

1. Jeżeli $\mu_0 = E_0$, to prosta krytyczna w modelu *E-VaR* z walorem pozbawionym ryzyka nie zawiera portfeli dopuszczalnych w modelu *E-VaR* bez walorów po-

zbawionych ryzyka. Półproste wyznaczające $\bar{F}_{\min}^{V}$ są asymptotami gałęzi hiperboli $F_{\min}^{V}$:

$$E = \frac{At}{C\left(t \mp \sqrt{D}\right)} \pm \frac{V}{t \mp \sqrt{D}}\sqrt{\frac{D}{C}}. \tag{51}$$

2. Jeżeli $\mu_0 \neq E_0$, to:
   a) Prosta krytyczna w modelu E-VaR z walorem pozbawionym ryzyka przecina zbiór P w dokładnie jednym punkcie. Nazywamy go punktem stycznym w modelu E-VaR i oznaczamy przez x_t^V.
   b) $M^V\left(x_t^V\right)$ spełnia:

$$E\left(x_t^V\right) = \frac{B - A\mu_0}{A - C\mu_0}, \tag{52}$$

$$V\left(x_t^V\right) = \frac{t\sqrt{B - 2A\mu_0 + C\mu_0^2} - E\left(x_t^V\right)|A - C\mu_0|}{|A - C\mu_0|}. \tag{53}$$

   c) Ta z półprostych $\bar{F}_{\min}^{V}$, która zawiera $\bar{M}^V\left(x_t^V\right)$ jest w tym punkcie styczna do $F_{\min}^{V}$.
   d) Jeśli $\mu_0 < E_0$ oraz $t > \sqrt{B - 2A\mu_0 + C\mu_0^2}$, to x_t^V jest portfelem efektywnym w modelu E-VaR z walorem pozbawionym ryzyka oraz bez waloru pozbawionego ryzyka.

Dowód

1. oraz 2a. Wynika bezpośrednio z uwagi, że prosta krytyczna w modelu E-VaR bez walorów pozbawionych ryzyka (z walorem pozbawionym ryzyka) jest identyczna z prostą krytyczną w modelu E–σ bez walorów pozbawionych ryzyka (z walorem pozbawionym ryzyka).

2b. Zgodnie z twierdzeniem 7 [załącznik 2] oraz punktem 2a niniejszego twierdzenia, wartość oczekiwana oraz wariancja portfela x_t^V spełniają:

$$E\left(x_t^V\right) = \frac{B - A\mu_0}{A - C\mu_0},$$

$$\sigma\left(x_t^V\right) = \frac{\sqrt{B - 2A\mu_0 + C\mu_0^2}}{|A - C\mu_0|}. \tag{54}$$

Podstawiając do równania (54) σ wyznaczone w zależności od V otrzymamy punkt 2b. niniejszego twierdzenia.

2c. Wynika z twierdzenia 7 [załącznik 2] i z uwagi, że styczność zachowuje się przy wzajemnie jednoznacznych przekształceniach afinicznych.

2d. Efektywność portfela x_t^V w modelu E-VaR z walorem pozbawionym ryzyka wynika z twierdzenia 3.2.1 i twierdzenia 7 [załącznik 2]. Portfel ten będzie natomiast efektywny w modelu E-VaR bez waloru pozbawionego ryzyka, gdy jego oczekiwana stopa zwrotu spełnia nierówność:

$$E(x) \geq E_0^V = \frac{A}{C} + \frac{D}{C\sqrt{Ct^2 - D}}. \tag{55}$$

Korzystając ze wzoru (52) i wyznaczając różnicę $E(x_t) - E_0^V$ otrzymamy po krótkich przekształceniach:

$$E(x_t) - E_0^V = \frac{B - A\mu_0}{A - C\mu_0} - \frac{A}{C} - \frac{D}{C\sqrt{Ct^2 - D}} > 0.$$

Zatem portfel x_t^V jest efektywny w sensie E-VaR bez waloru pozbawionego ryzyka.

□

4. PODSUMOWANIE

W pracy porównano standardowe podejście do problemu alokacji, opierające się na odchyleniu standardowym jako mierze ryzyka, z podejściem nowym, stosującym Value at Risk. Szereg wprowadzonych definicji oraz twierdzeń pozwolił zauważyć związki pomiędzy modelami E–σ i E-VaR. Zauważono, że stosowanie VaR jako miary ryzyka zmniejsza zbiór portfeli efektywnych. Przyjęcie zbyt niskiego poziomu ufności do wyznaczania VaR może nawet prowadzić do braku rozwiązania problemu alokacji. Ponadto wykorzystanie Value at Risk w przypadku modeli bez walorów pozbawionych ryzyka prowadzi do wyboru portfela o nieznacznie wyższym odchyleniu standardowym oraz znacząco wyższej oczekiwanej stopie zwrotu.

Wybór pomiędzy VaR a σ nie ma natomiast wpływu na rozwiązanie problemu alokacji w przypadku występowania waloru pozbawionego ryzyka, pod warunkiem przyjęcia odpowiednio dużego poziomu ufności. Portfel styczny w modelu E–σ i E-VaR jest taki sam. W przypadku, gdy oczekiwana stopa zwrotu dla portfela minimalnego ryzyka w modelu E–σ bez walorów pozbawionych ryzyka jest wyższa od oczekiwanej stopy zwrotu waloru pozbawionego ryzyka, portfel styczny jest efektywny w modelu E–σ. Będzie on także efektywny w modelu E-VaR, przy odpowiednio dużej wartości c. Przyjęcie zbyt niskiego poziomu ufności może natomiast doprowadzić do sytuacji, w której portfel efektywny w modelu E-VaR z walorem pozbawionym ryzyka nie będzie istniał. Portfel styczny w modelu E–σ będzie wtedy efektywny, natomiast w modelu E-VaR nieefektywny. W przypadku, gdy oczekiwana stopa zwrotu dla waloru pozbawionego ryzyka będzie wyższa od oczekiwanej stopy zwrotu w modelu E–σ bez walorów pozbawionych ryzyka, portfel styczny będzie nieefektywny zarówno dla modelu opartego na VaR, jak i na σ. Gdy stopy te będą równe, portfel styczny w obu modelach nie będzie istniał.

Przedmiotem dalszej analizy może być porównanie modeli E–σ i E-VaR dla stóp zwrotu o rozkładzie innym niż normalny. Interesujące jest zbadanie jaki wpływ na rozwiązanie problemu alokacji ma przyjmowanie stałości wariancji w czasie i szacowanie jej na podstawie danych historycznych. Analizy przeprowadzane dla WGPW (Egert, Koubaa, 2004; Fiszeder, 2003; Fiszeder, Bruzda, 2001; Shields, 1997; Śleszyńska, 2006, 2007) wskazują na występowanie dla niej zarówno efektów grupowania wariancji, efektów asymetrii, jak i szerokich efektów przenikania wariancji, informacji i stóp zwrotu. Przyjmowanie stałości wariancji w czasie pomija te efekty, co z kolei ma znaczący wpływ na wartość oczekiwanej stopy zwrotu z wybranego w procesie analizy portfela. Warto zbadać, jakie są skutki zastosowania do wyznaczania macierzy kowariancji modeli ekonometrii finansowej.

Ipsos Research Sp. z o.o.

LITERATURA

[1] Alexander G.J., Baptista A.M., (2002), *Economic Implications of Using a Mean-Var Model For Portfolio Selection: A Comparison With Mean-Variance Analysis*, Journal of Economic Dynamics & Control, 26 (7-8), 1159-1193.

[2] Alexander G.J., Francis J.C., (1986), *Portfolio Analysis*, PRENTICE-HALL, 1159-1193.

[3] Baumol W.J., (1963), *An Expected Gain-Confidence Limit Criterion For Portfolio Selection*, Management Science, 10 (1), 174-182.

[4] Black F., (1972), *Capital Market Equilibrium With Restricted Borrowing*, The Journal of Business 45 (3), 444-455.

[5] Charpentier A., Oulidi A., (2009), *Estimating Allocations For Value-At-Risk Portfolio Optimization*, Mathematical Methods of Operations Research.

[6] Consigli G., (2002), *Tail Estimation And Mean-VaR Portfolio Selection In Markets Subject To Financial Instability*, Journal of Banking & Finance, 26, 1355-1382.

[7] Egert B., Koubaa Y., (2004), *Modeling Stock Returns In The G-7 And In Selected CEE Economies: A Non-linear GARCH Approach*, William Davidson Institute Working Paper Number 663.

[8] Fiszeder P., Bruzda J., (2001), *Badanie zależności pomiędzy indeksami giełdowymi na GPW w Warszawie – analiza wielorównaniowych modeli GARCH*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, 890, 110-122.

[9] Fiszeder P., (2003), *Zastosowanie modeli GARCH w analizie procesów obserwowanych na GPW w Warszawie oraz wybranych rynkach akcji na świecie*. Metody ilościowe w naukach ekonomicznych, Trzecie Warsztaty Doktorskie z Zakresu Ekonometrii i Statystyki, 11-33.

[10] Gaivoronski A.A., Pflug G., (2004-2005), *Value-at-Risk in Portfolio Optimization: Properties and Computational Approach*, Journal of Risk, 7, 1-31.

[11] De Giorgi E., (2002), A *Note on Portfolio Selection under Various Risk Measures*, Institute for Empirical Research in Economics – IEW Working Papers, 122.

[12] Markowitz H., (1952), *Portfolio Selection*, The Journal of Finance, 7, 77-91.

[13] Markowitz H., (1959), *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley, New York.

[14] Merton R.C., (1972), *An Analytic Derivation Of The Efficient Portfolio Frontier*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 7 (4), 1851-1872.

[15] Rockafellar R.T., Uryasev S., (1999), *Optimization of Conditional Value-at-Risk*, Working Paper. University of Washington and University of Florida.

[16] Shields K.K., (1997), *Stock Return Volatility On Emerging Eastern European Markets*, University of Leicester. The Manchester School Supplement, 118-138.
[17] Steinbach M.C., (2001), *Markowitz Revisited: Mean-Variance Models in Financial Portfolio Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 43 (1), 31-85.
[18] Śleszyńska A., (2006), *Asymetryczne modele GARCH dla stóp zwrotu indeksu WIG w latach 1995-2005*, Praca licencjacka pod kierunkiem dr Wojciecha Grabowskiego. WNE UW.
[19] Śleszyńska A., (2007), *Wykorzystanie wielorównaniowych modeli GARCH-BEKK do analizy efektów przenikania występujących pomiędzy polskimi indeksami giełdowymi*, Praca magisterska pod kierunkiem dr Wojciecha Grabowskiego. WNE UW.
[20] Śleszyńska-Połomska A., (2008), *O analizie portfelowej wartość średnia – wartość zagrożona*, Praca magisterska pod kierunkiem dr hab. Karola Krzyżewskiego. WMIM UW.
[21] Tobin J.E., (1958), *Liquidity Preference as Behaviour Towards Risk*, Review of Economic Studies, 25, 65-86.
[22] Tobin J.E., (1965), *The Theory of Portfolio Selection w Hahn F.H. and Brechling F. P. R.*, The Theory of Interest Rates, Macmillan, Londyn, 3-51.

ZAŁĄCZNIK 1. MODEL E–σ BEZ WALORÓW POZBAWIONYCH RYZYKA

Tak jak w części 2 zakładamy, że na rynku dostępnych jest $k > 2$ walorów ryzykownych i nie występują walory pozbawione ryzyka. Przyjmujemy ponadto, że na rynku dopuszczalna jest nieograniczona krótka sprzedaż. Dodatkowo spełnione są założenia (1) – (8). Model z takimi założeniami, w którym za miarę ryzyka przyjmuje się odchylenie standardowe, nazywany jest w literaturze modelem Blacka (Black, 1972). Dokładny opis modelu, wraz z dowodami zamieszczonych poniżej twierdzeń znajduje się w pracy Śleszyńskiej-Połomskiej (2008). Definicje odwzorowania Markowitza M w płaszczyznę (σ, E), zbioru możliwości O na płaszczyźnie (σ, E), portfela efektywnego w sensie E–σ, granicy efektywnej F_e w sensie E–σ, portfela minimalnego σx_0, portfeli względnie minimalnego σ, granicy minimalnej $F_{\min}$ w sensie E–σ są analogiczne do definicji 2.1 – 2.6 z części 2.
Twierdzenie 1. (Mertona). (por. Rockafellar, Uryasev, 1999) Obraz portfela x przy odwzorowaniu Markowitza należy do granicy minimalnej wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\frac{\sigma^2(x)}{\frac{1}{C}} - \frac{\left(E(x) - \frac{A}{C}\right)^2}{\frac{D}{C^2}} = 1, \tag{1}$$

gdzie:

$$A = e^T\Sigma^{-1}\mu, \quad B = \mu^T\Sigma^{-1}\mu, \quad C = e^T\Sigma^{-1}e, \quad D = BC - A^2. \tag{2}$$

Ponadto x dane jest wzorem:

$$x = hE + g, \tag{3}$$

gdzie:

$$g = \frac{1}{D}\left(B\left(\Sigma^{-1}e\right) - A\left(\Sigma^{-1}\mu\right)\right), \tag{4}$$

$$h = \frac{1}{D}\left(C\left(\Sigma^{-1}\mu\right) - A\left(\Sigma^{-1}e\right)\right). \tag{5}$$

Jest to tak zwana prosta krytyczna.
Uwaga 1. Warto zauważyć, że wzór (1) charakteryzujący pary (σ, E) należące do granicy minimalnej jest równaniem gałęzi hiperboli. Asymptoty tej hiperboli zadane są równaniem:

$$E = E_0 \pm \sigma \sqrt{\frac{D}{C}}. \tag{6}$$

Lemat 1. Granica efektywna F_e jest górną gałęzią hiperboli o równaniu

$$\frac{\sigma^2(x)}{\frac{1}{C}} - \frac{\left(E(x) - \frac{A}{C}\right)^2}{\frac{D}{C^2}} = 1, \quad E \geq E_0, \tag{7}$$

A jedynymi portfelami efektywnymi są x zadane równaniem (3), gdzie $E \geq E_0$. Jest to tak zwana półprosta krytyczna.
Twierdzenie 2. W modelu $E - \sigma$ bez walorów pozbawionych ryzyka portfel:

$$x_0 = \frac{\Sigma^{-1} e}{e^T \Sigma^{-1} e} \tag{8}$$

jest jedynym portfelem minimalnego ryzyka. Ponadto:

$$E(x_0) = E_0 = \frac{e^* \Sigma^{-1} \mu}{e^* \Sigma^{-1} e}, \tag{9}$$

$$\sigma(x_0) = \sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{e^T \Sigma^{-1} e}}. \tag{10}$$

ZAŁĄCZNIK 2. MODEL E–σ Z WALOREM POZBAWIONYM RYZYKA

Model Blacka rozszerzony o założenie o występowaniu jednego waloru pozbawionego ryzyka nazywany jest często w literaturze zmodyfikowanym modelem Tobina (Tobin, 1958, 1965; Alexander, Francis, 1986). Dokładny opis tego modelu wraz z dowodami zamieszczonych poniżej twierdzeń można znaleźć w pracy Śleszyńskiej-Połomskiej (2008). Definicje odwzorowania Markowitza $\bar{M} : \bar{P} \to R_+ \times R$, zbioru możliwości $\bar{O}$, portfela efektywnego w sensie E–σ, granicy efektywnej $\bar{F}_e$, portfela względnie minimalnego ryzyka w sensie E–σ, granicy minimalnej $\bar{F}_{\min}$ są analogiczne do definicji tych pojęć dla modelu E-VaR.
Twierdzenie 3. Portfel $\bar{x} = \left(x_b, x^T\right)^T$ jest portfelem względnie minimalnego ryzyka wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$x = \frac{(E(\bar{x}) - \mu_0) \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0 e)}{(\mu - \mu_0 e)^T \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0 e)}, \tag{11}$$

$$x_b = \frac{B - A\mu_0 - (A - C\mu_0)\, E(\bar{x})}{B - 2\mu_0 A + C\mu_0^2}, \tag{12}$$

gdzie A, B, C zadane jak w twierdzeniu 1. Jest to tak zwana prosta krytyczna.
Twierdzenie 4. Obraz portfeli minimalnego ryzyka z twierdzenia 3 przy odwzorowaniu Markowitza daje granicę minimalną $\bar{F}_{\min}$ taką, że:

$$\bar{\sigma}(E) = \frac{|E - \mu_0|}{\sqrt{B - 2A\mu_0 + C\mu_0^2}}, \quad E \in R. \tag{13}$$

Twierdzenie 5. Granica efektywna $\bar{F}_e$ jest górną z półprostych wyznaczających $\bar{F}_{\min}$, a jedynymi portfelami efektywnymi są x zadane równaniem (11), gdzie $E \geq \mu_0$. Jest to tak zwana półprosta krytyczna.
Twierdzenie 6. Zbiór możliwości na płaszczyźnie (σ, E) można opisać jako:

$$\bar{O} = \{(\sigma, E) \in (R_+ \times R)\,; E \in R \wedge \bar{\sigma}_{\min}(E) \leq \sigma\}. \tag{14}$$

Twierdzenie 7. Niech E_0 będzie wartością oczekiwaną portfela minimalnego ryzyka w modelu E–σ bez walorów pozbawionych ryzyka.

1. Jeżeli $\mu_0 = E_0$, to prosta krytyczna w modelu E–σ z walorem pozbawionym ryzyka nie zawiera portfeli dopuszczalnych z modelu E–σ bez walorów pozbawionych ryzyka. Półproste wyznaczające $\bar{F}_{\min}$ są asymptotami gałęzi hiperboli $F_{\min}$:

$$E = \frac{A}{C} \pm \sigma \sqrt{\frac{D}{C}}. \tag{15}$$

2. Jeżeli $\mu_0 \neq E_0$, to prosta krytyczna w modelu E–σ z walorem pozbawionym ryzyka przecina zbiór P w dokładnie jednym punkcie:

$$x_t = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - \mu_0 e)}{A - C\mu_0}. \tag{16}$$

Jest to tak zwany portfel styczny. Jego obraz przy odwzorowaniu Markowitza spełnia:

$$E(x_t) = \frac{B - A\mu_0}{A - C\mu_0}, \tag{17}$$

$$\sigma(x_t) = \frac{\sqrt{B - 2A\mu_0 + C\mu_0^2}}{|A - C\mu_0|}. \tag{18}$$

Ta z półprostych z $\bar{F}_{\min}$, która zawiera $\bar{M}(x_t)$ jest w tym punkcie styczna do $F_{\min}$. Ponadto, jeśli $\mu_0 < E_0$, to x_t jest portfelem efektywnym względem μ_0 w modelu E–σ bez walorów pozbawionych ryzyka.

O ANALIZIE PORTFELOWEJ WARTOŚĆ ŚREDNIA – WARTOŚĆ ZAGROŻONA

Streszczenie

Praca dotyczy analizy portfelowej, w której ryzyko jest mierzone wartością zagrożoną (*VaR*), a wektor stóp zwrotu walorów ryzykownych ma rozkład normalny. Przy założeniu, że krótka sprzedaż walorów ryzykownych jest dopuszczalna zbadano przypadki, gdy nie ma waloru pozbawionego ryzyka i gdy taki walor istnieje. Przeanalizowano model Blacka i zmodyfikowany model Tobina, stosując *VaR* jako miarę ryzyka. Omówiono podobieństwa i różnice między modelami stosującymi odchylenie standardowe jako miarę ryzyka, a tymi stosującymi *VaR*. Zwrócono uwagę na fakt, że od poziomu ufności przyjmowanego do wyznaczania *VaR* zależy istnienie portfeli efektywnych. Wyniki uzyskane dla modelu z walorem bezryzykownym i miarą ryzyka *VaR* nie występują w literaturze.

Słowa kluczowe: wartość zagrożona (*VaR*), analiza portfelowa, model *E-VaR* bez walorów bezryzykownych, model *E-VaR* z walorem bezryzykownym

ON MEAN – VALUE AT RISK PORTFOLIO ANALYSIS

Abstract

The article concerns portfolio analysis where risk is measured by value at risk (*VaR*) assuming that the returns are normally distributed and short-selling of risky securities has no limitations. Two models have been analysed: one with the assumption that no risk-free security exists in the economy, another assuming just one risk-free security. An analysis of Black Model and Modified Tobin Model has been carried out using *VaR* as the measure of risk. Models with *VaR* as a measure of risk and standard deviation as measure of risk have been compared. It is shown that, depending on the confidence level used to calculate *VaR,* an efficient portfolio might not exist. The results for the model with one risk-free asset and *VaR* as a measure of risk have not been published before and are the original contribution of this paper.

Key words: Value at Risk (*VaR*), portfolio analysis, *E-VaR* model with no risk-free assets, *E-VaR* model with risk-free asset