

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET STATYSTYKI I EKONOMETRII

PRZEGLĄD STATYSTYCZNY

STATISTICAL REVIEW

TOM 59

2

2012

WARSZAWA 2012

WYDAWCA

Komitet Statystyki i Ekonometrii Polskiej Akademii Nauk

RADA REDAKCYJNA

Andrzej S. Barczak, Marek Gruszczyński, Krzysztof Jajuga, Stanisław M. Kot, Tadeusz Kufel,
Władysław Milo (Przewodniczący), Jacek Osiewalski, Aleksander Welfe, Janusz Wywiał

KOMITET REDAKCYJNY

Magdalena Osińska (Redaktor Naczelny)
Marek Walesiak (Zastępca Redaktora Naczelnego)
Piotr Fiszeder (Sekretarz Naukowy)
Michał Majsterek (Redaktor)
Anna Pajor (Redaktor)

Wydanie publikacji dofinansowane przez Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego

© Copyright by Komitet Statystyki i Ekonometrii PAN

Strona WWW „Przegląd Statystyczny”:
<http://www.przegladstatystyczny.pan.pl>

Nakład: 250 egz.

PAN Warszawska Drukarnia Naukowa
00-056 Warszawa, ul. Śniadeckich 8
Tel./fax: +48 22 628 76 14

EMIL PANEK, HENRYK J. RUNKA

DWA TWIERDZENIA O MAGISTRALI W MODELU VON NEUMANNA

1. WSTĘP

W pracy [5] przedstawiono prosty dowód „słabego” twierdzenia o magistrali w modelu von Neumanna, w którym w charakterze kryterium wzrostu przyjęto wartość (mierzonej w cenach równowagi) produkcji wytworzonej w końcowym okresie ustalonego horyzontu $0,1,\dots,t_1$. Nawiązując do niej obecnie prezentujemy dwie wersje – „słabą” i „bardzo silną” – twierdzenia o magistrali w modelu von Neumanna, w którym rolę kryterium wzrostu gra łączna wartość mierzonej w cenach równowagi produkcji wytworzonej w całym horyzoncie $0,1,\dots,t_1$.

Specyfika dowodzonego w punkcie 4 „bardzo silnego” twierdzenia o magistrali polega na tym iż okazuje się, że optymalny proces wzrostu, który w pewnym okresie dociera do magistrali, pozostaje na niej wszędzie dalej („wejście” optymalnego procesu na magistralę jest bezpowrotne).

Obowiązują oznaczenia z pracy [5].

2. TECHNOLOGICZNA I EKONOMICZNA EFEKTYWNOŚĆ PRODUKCJI. RÓWNOWAGA VON NEUMANNA

W modelu von Neumanna o zużyciu oraz produkcji n towarów decyduje technologia produkcji utożsamiana z pewną liczbą m tzw. bazowych procesów technologicznych tworzących wiersze neumannowskich macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

nakładów (zużycia) i wyników (produkcji).

Wiersz $a_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn}) \geq 0$ macierzy A nazywamy wektorem nakładów (zużycia), a wiersz $b_j = (b_{j1}, \dots, b_{jn}) \geq 0$ wektorem wyników (produkcji) w j -tym bazowym procesie technologicznym stosowanym z jednostkową intensywnością. Model jest liniowy w tym sensie, że jeżeli przez $v = (v_1, \dots, v_m)$ oznaczymy nieujemny wektor intensywności stosowania procesów technologicznych, to z nakładów $vA = \sum_{j=1}^m v_j a_j$

można wytworzyć produkcję $vB = \sum_{j=1}^m v_j b_j$. Każda para (vA, vB) , gdzie $v \geq 0$, tworzy dopuszczalny proces produkcji. Zbiór (stożek) $Z = \{(x, y) | x = vA, y = vB; v \geq 0\}$ tworzy neumannowską przestrzeń produkcyjną.

O neumannowskich macierzach nakładów A i wyników B zakładamy, że

- (I) **Każdy wiersz nieujemnej macierzy A zawiera element dodatni** (tzn. w każdym bazowym procesie zużywany jest co najmniej jeden towar),
 (II) **Każda kolumna nieujemnej macierzy B zawiera element dodatni** (tzn. każdy towar jest wytwarzany w co najmniej jednym bazowym procesie).¹

Liczbę

$$\alpha(v) = \max\{\alpha | \alpha vA \leq vB\}$$

nazywamy wskaźnikiem technologicznej efektywności procesu $(x, y) = (vA, vB)$. Nietrudno wykazać, że funkcja α jest ciągła i dodatnio jednorodna stopnia 0 na

$$R_+^m \setminus \{0\} = \{v \in R^m | v \geq 0\}$$

oraz że istnieje taki określony z dokładnością do struktury wektor intensywności $\bar{v} \geq 0$, iż

$$\alpha(\bar{v}) = \alpha_N = \max_{v \geq 0} \alpha(v) > 0.$$

Nazywamy go wektorem intensywności stosowania bazowych procesów technologicznych w modelu von Neumanna. Odpowiadające mu wektory $\bar{x} = \bar{v}A$, $\bar{y} = \bar{v}B$ nazywamy optymalnymi wektorami nakładów (zużycia) i wyników (produkcji). Liczbę α_N nazywamy optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektywności. Zakładamy, że

- (III) **Istnieje taki optymalny wektor intensywności $\bar{v} \geq 0$, że $\bar{v}B > 0$.**

Innymi słowy, istnieje optymalny proces produkcji, w którym wytwarzane są wszystkie towary. Warunek (III) nazywamy warunkiem regularności modelu. Warunek ten pociąga za sobą warunek (II), który od tej chwili staje się w związku z tym zbędny.

Weźmy dowolny wektor intensywności $v \geq 0$ i oznaczmy przez $p \geq 0$ n -wymiarowy wektor (kolumnowy) cen towarów. Liczbę $\beta(v, p) = \frac{vBp}{vAp}$ (tam gdzie jest określona) nazywamy wskaźnikiem ekonomicznej efektywności procesu $(x, y) = (vA, vB)$, natomiast liczbę

$$\beta_p = \max_{v \geq 0} \frac{vBp}{vAp}$$

(tam gdzie jest określona) nazywamy optymalnym wskaźnikiem ekonomicznej efektywności produkcji (przy cenach p).

¹ Z głębszą interpretacją ekonomiczną modelu von Neumanna można zapoznać się np. w pracy [1] oraz [4] pkt. 5.2.

□ **Twierdzenie 1.** Przy założeniach (I), (III) istnieją ceny $\bar{p} \geq 0$, przy których

$$\beta_{\bar{p}} = \max_{v \geq 0} \frac{vB\bar{p}}{vA\bar{p}} = \frac{\bar{v}B\bar{p}}{\bar{v}A\bar{p}} = \beta(\bar{v}, \bar{p}) = \alpha(\bar{v}) = \alpha_N > 0.$$

■

Nazywamy je cenami (równowagi) von Neumanna. Z dowodem można zapoznać się w pracy [5], twierdzenie 2. O trójce $\{\alpha_N, \bar{v}, \bar{p}\}$ spełniającej warunek (1) mówimy, że charakteryzuje gospodarkę von Neumanna w równowadze. Dochodzi w niej do zrównania efektywności ekonomicznej gospodarki z jej efektywnością technologiczną i jest to najwyższa efektywność, jaką może osiągnąć gospodarka, zapewniając równocześnie najszybsze tempo równomiernego wzrostu (będzie o nim mowa w punkcie 3).

Ceny $\bar{p}$ w równowadze są określone z dokładnością do struktury. Z twierdzenia 1 wynika w szczególności, że dla dowolnego wektora intensywności $v \geq 0$ spełniony jest warunek

$$vB\bar{p} - \alpha_N vA\bar{p} \leq 0, \quad (2)$$

tzn. $\beta(v, \bar{p}) = \frac{vB\bar{p}}{vA\bar{p}} \leq \alpha_N$ i jedynie dla $v = \bar{v}$ zachodzi $\beta(\bar{v}, \bar{p}) = \alpha_N$. Jedynie w równowadze dochodzi do zrównania ekonomicznej efektywności produkcji z jej efektywnością technologiczną. Przy cenach równowagi nigdzie efektywność ekonomiczna produkcji nie jest wyższa od efektywności technologicznej.

3. WZROST. „SŁABY” EFEKT MAGISTRALI

Zakładamy, że czas zmienia się skokowo, $t = 0, 1, \dots, t_1$. Symbolem $v(t) = (v_1(t), \dots, v_n(t))$ oznaczamy wektor intensywności stosowania bazowych procesów w okresie t ,

$$p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix} \text{ jest wektorem cen towarów w okresie } t. \text{ Standardowo zakładamy,}$$

że nakłady $x(t+1) = v(t+1)A$ muszą mieć (w zamkniętej gospodarce) pokrycie w produkcji z okresu poprzedniego $y(t) = v(t)B$, czyli

$$\begin{aligned} v(t+1)A &\leq v(t)B, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1, \\ v(t) &\geq 0, \quad t = 0, 1, \dots, t_1, \end{aligned} \quad (3)$$

Niech $v^0 > 0$ będzie intensywnością z jaką bazowe procesy technologiczne są stosowane w okresie początkowym $t = 0$:

$$v(0) = v^0. \quad (4)$$

Rozwiązanie $\{v(t)\}_{t=0}^{t_1}$ układu (3)-(4) nazywamy (v^0, t_1) – dopuszczalną trajektorią intensywności. Odpowiadające im ciągi $\{x(t)\}_{t=0}^{t_1}$, $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$, gdzie $x(t) = v(t)A$, $y(t) =$

$v(t)B$ nazywamy dopuszczalnymi trajektoriami nakładów i produkcji. O trójce ciągów $\{v(t), x(t), y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ mówimy, że opisuje dopuszczalny proces wzrostu w modelu von Neumanna.

Jeżeli $(v^0 t_1)$ – dopuszczalna trajektoria intensywności jest postaci

$$v(t) = \gamma^t v^0, \quad \text{gdzie } \gamma > 0, \quad (5)$$

wówczas nazywamy ją trajektorią stacjonarną z tempem wzrostu γ . Podstawiając (5) do (3) widzimy, że stacjonarna trajektoria intensywności z tempem γ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rozwiązanie układu nierówności:

$$\gamma v^0 A \leq v^0 B,$$

$$v^0 \geq 0, \quad \gamma > 0.$$

Nietrudno zauważyć, że przy założeniach (I), (III) układ ten jest niesprzeczny. Co więcej, istnieje rozwiązanie $\bar{\gamma} > 0$, $\bar{v} \geq 0$ zadania

$$\max \gamma$$

$$\gamma v A \leq v B \quad (6)$$

$$v \geq 0,$$

spełniające warunek $\bar{\gamma} = \alpha_N = \alpha(\bar{v})$ oraz warunek regularności $\bar{v}B > 0$ (zob. [5], twierdzenie 1). Trajektorię intensywności

$$\bar{v}(t) = \alpha_N^t \bar{v}$$

nazywamy optymalną stacjonarną trajektorią intensywności w modelu von Neumanna. Odpowiada jej optymalna stacjonarna trajektoria nakładów $\bar{x}(t) = \bar{v}(t)A = \alpha_N^t \bar{v}A$ i produkcji $\bar{y}(t) = \bar{v}(t)B = \alpha_N^t \bar{v}B$. O trójce trajektorii $\{\bar{v}(t), \bar{x}(t), \bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ mówimy, że opisują optymalny stacjonarny proces wzrostu. W optymalnym stacjonarnym procesie wzrostu

$$\frac{\bar{v}(t)}{\|\bar{v}(t)\|} = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} = \bar{s}^v = \text{const.}$$

$$\frac{\bar{y}(t)}{\|\bar{y}(t)\|} = \frac{\bar{v}B}{\|\bar{v}B\|} = \bar{s}^y = \text{const.}$$

(tutaj i wszędzie dalej $\|x\| = \sum_i |x_i|$). Wektory $\bar{s}^v, \bar{s}^x, \bar{s}^y$ charakteryzują strukturę intensywności stosowania bazowych procesów technologicznych, strukturę nakładów i strukturę produkcji w optymalnym stacjonarnym procesie wzrostu.

Półproste

$$N^v = \{\lambda \bar{s}^v \mid \lambda > 0\},$$

$$N^x = \{\lambda \bar{s}^x \mid \lambda > 0\},$$

$$N^y = \{\lambda \bar{s}^y \mid \lambda > 0\}$$

nazywamy magistralami (promieniami von Neumanna) w przestrzeni intensywności, nakładów i produkcji.

Każda optymalna stacjonarna trajektoria leży na właściwej magistrali, na której wzrost odbywa się w maksymalnym, technologicznie dopuszczalnym tempie α_N (ze stopą $\alpha_N - 1$). Wobec założenia regularności modelu (III) struktura produkcji $\bar{s}^y$ na magistrali N^y jest wektorem dodatnim. W celu zapewnienia jednoznaczności magistral dodatkowo przyjmujemy następujące założenie:

(IV) Jeżeli $v \notin N^v$, to ekonomiczna efektywność $\beta(v, \bar{p}) = \frac{vB\bar{p}}{vA\bar{p}}$ procesu $(x, y) = (vA, vB)$ jest niższa od optymalnej.

W myśl tego założenia poza magistralą ekonomiczna efektywność procesu $(x, y) = (vA, vB)$ spełnia warunek $\beta(v, \bar{p}) = \frac{vB\bar{p}}{vA\bar{p}} < \alpha_M$. Łatwo zauważyć, że przy założeniu (IV) warunek ten zachodzi także gdy $x = vA \notin N^x$ lub $y = vB \notin N^y$.

□ **Twierdzenie 2.** Jeżeli spełnione są założenia (I), (III), (IV), to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta_\varepsilon > 0$, że jeżeli zachodzi którykolwiek z warunków

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} - \bar{s}^v \right\| \geq \varepsilon, \quad \left\| \frac{x}{\|x\|} - \bar{s}^x \right\| \geq \varepsilon, \quad \left\| \frac{y}{\|y\|} - \bar{s}^y \right\| \geq \varepsilon,$$

gdzie $x = vA$, $y = vB$, to

$$\beta(v, p) = \frac{vB\bar{p}}{vA\bar{p}} \leq \alpha_N - \delta_\varepsilon. \quad (7)$$

■

Z dowodem można zapoznać się w pracy [5] (twierdzenie 3).² W tejże pracy prześledzone zostało rozwiązanie $\{v^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ następującego dynamicznego, liniowego zadania maksymalizacji wartości produkcji, mierzonej w cenach $\bar{p} \geq 0$ równowagi von Neumanna, wytworzonej w końcowym okresie horyzontu $0, 1, \dots, t_1$:

$$\max v(t_1)B\bar{p}$$

$$p.w.(3) - (4)$$

(wektor v^0 ustalony).

Pokazaliśmy tam, że przy założeniach (I), (III), (IV) prawie zawsze – niezależnie od długości horyzontu, czasu $0, 1, \dots, t_1$ – struktura optymalnej trajektorii intensywności

² Dowód nawiązuje do artykułu R. Radnera [6].

$\frac{v^*(t)}{\|v^*(t)\|}$ różni się dowolnie mało od struktury intensywności na magistrali N^v , struktura nakładów $\frac{x^*(t)}{\|x^*(t)\|}$ różni się dowolnie mało od struktury nakładów na magistrali N^x , a struktura produkcji $\frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|}$ różni się dowolnie mało od struktury produkcji na magistrali N^y .

Obecnie wynik ten uogólnimy na przypadek, kiedy kryterium oceny procesów jest wyrażona w cenach równowagi wartość produkcji wytworzonej w całym horyzoncie $0, 1, \dots, t_1$.

Interesuje nas rozwiązanie następującego zadania:

$$\max \sum_{t=0}^{t_1} v(t) B \bar{p} \quad (8)$$

$$v(t+1)A \leq v(t)B, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1$$

$$v(t) \geq 0, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 \quad (9)$$

$$v(0) = v^0 > 0$$

(wektor v^0 ustalony)

Niech ciąg $\{v^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ będzie rozwiązaniem tego zadania. Tradycyjnie nazywamy go $(v^0, t_1, \bar{p})$ – optymalną trajektorią intensywności. Ciągi $\{x^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, gdzie $x^*(t) = v^*(t)A$ oraz $y^*(t) = v^*(t)B$, nazywamy optymalnymi trajektoriami nakładów i produkcji. O trójce $\{v^*(t), x^*(t), y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ mówimy, że opisuje optymalny proces wzrostu w modelu von Neumanna.

□ **Twierdzenie 3** („Słabe” twierdzenie o magistrali)

Weźmy dowolny $(v^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces $\{v^*(t), x^*(t), y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$. Jeżeli spełnione są założenia (I), (III), (IV) oraz tempo wzrostu gospodarczego na magistrali α_N jest większe od 1 (stopa wzrostu $\alpha_N - 1 > 0$), to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε , że liczba okresów, w których zachodzi którykolwiek z warunków

$$\left\| \frac{v^*(t)}{\|v^*(t)\|} - \bar{s}^v \right\| \geq \varepsilon, \quad \left\| \frac{x^*(t)}{\|x^*(t)\|} - \bar{s}^x \right\| \geq \varepsilon, \quad \left\| \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|} - \bar{s}^y \right\| \geq \varepsilon \quad (10)$$

nie przekracza k_ε . Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu (tj. od t_1).

Dowód. Weźmy $(v^0, t_1, \bar{p})$ – optymalną trajektorią intensywności $\{v^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$. Wówczas

$$v^*(t+1)A \leq v^*(t)B,$$

a po przemnożeniu obu stron nierówności przez wektor cen równowagi $\bar{p}$:

$$v^*(t+1)A\bar{p} \leq v^*(t)B\bar{p}, \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1.$$

Zgodnie z (2)

$$v^*(t) B \bar{p} \leq \alpha_N v^*(t) A \bar{p}, \quad t = 0, 1, \dots, t_1,$$

skąd otrzymujemy układ nierówności:

$$\begin{aligned} \alpha_N^{-1} v^*(1) B \bar{p} &\leq v^*(1) A \bar{p} \leq v^0 B \bar{p} \leq \alpha_N v^0 A \bar{p} \\ \alpha_N^{-1} v^*(2) B \bar{p} &\leq v^*(2) A \bar{p} \leq v^* B \bar{p} \leq \alpha_N^2 v^0 A \bar{p} \\ &\vdots \\ \alpha_N^{-1} v^*(t_1) B \bar{p} &\leq v^*(t_1) A \bar{p} \leq v^*(t_1 - 1) B \bar{p} \leq \alpha_N^{t_1} v^0 A \bar{p}. \end{aligned} \quad (11)$$

Założmy, że w okresach $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k \leq t_1$ trajektoria $\{v^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ nie spełnia warunku (10). Wówczas, zgodnie z twierdzeniem 2 (warunek (7)), istnieje taka liczba $\delta_\varepsilon^v > 0$, że

$$v^*(t) B \bar{p} \leq (\alpha_N - \delta_\varepsilon^v) v^*(t) A \bar{p}, \quad t = \tau_1, \dots, \tau_k. \quad (12)$$

Łącząc warunki (11), (12) dochodzimy do układu nierówności:

$$\begin{aligned} v^*(1) B \bar{p} &\leq \alpha_N^2 v^0 A \bar{p} \\ v^*(2) B \bar{p} &\leq \alpha_N^3 v^0 A \bar{p} \\ &\vdots \\ v^*(t_1 - k) B \bar{p} &\leq \alpha_N^{t_1 - k + 1} v^0 A \bar{p} \\ v^*(t_1 - k + 1) B \bar{p} &\leq \alpha_N^{t_1 - k + 1} (\alpha_N - \delta_\varepsilon^v) v^0 A \bar{p} \\ &\vdots \\ v^*(t_1) B \bar{p} &\leq \alpha_N^{t_1 - k + 1} (\alpha_N - \delta_\varepsilon^v)^k v^0 A \bar{p} \end{aligned}$$

a stąd

$$\sum_{t=1}^{t_1} v^*(t) B \bar{p} \leq v^0 A \bar{p} \sum_{t=2}^{t_1 - k + 1} \alpha_N^t + \alpha_N^{t_1 - k + 1} v^0 A \bar{p} \sum_{\tau=1}^k (\alpha_N - \delta_\varepsilon^v)^\tau. \quad (13)$$

Ponieważ $v^0 > 0$, więc przy założeniach (I), (III) istnieje taka liczba $\sigma > 0$, że $0 < \sigma \bar{s}^v A \leq v^0 B$ i wobec tego istnieje $(v^0 t_1)$ – dopuszczalna trajektoria intensywności $\{\tilde{v}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci:

$$\tilde{v}(t) = \begin{cases} v^0, & \text{dla } t = 0 \\ \sigma \bar{s}^v \alpha_N^{t-1}, & \text{dla } t = 1, \dots, t_1. \end{cases}$$

Wówczas

$$\sum_{t=1}^{t_1} v^*(t) B \bar{p} \geq \sum_{t=1}^{t_1} \tilde{v}(t) B \bar{p} = \sigma \bar{s}^v B \bar{p} \sum_{t=1}^{t_1} \alpha_N^{t-1}. \quad (14)$$

Z (13), (14) otrzymujemy nierówność

$$v^0 A \bar{p} \sum_{t=2}^{t_1-k+1} \alpha_N^t + \alpha_N^{t_1-k+1} v^0 A \bar{p} \sum_{\tau=1}^k (\alpha_N - \delta_\varepsilon^v)^\tau \geq \sigma \bar{s}^v B \bar{p} \sum_{t=1}^{t_1} \alpha_N^{t-1}, \quad (15)$$

a stąd

$$\sum_{t=2}^{t_1-k+1} \alpha_N^t + \alpha_N^{t_1-k+1} \sum_{\tau=1}^k (\alpha_N - \delta_\varepsilon^v)^\tau \geq \frac{\sigma \bar{s}^v B \bar{p}}{v^0 A \bar{p}} \sum_{t=1}^{t_1} \alpha_N^{t-1} > 0,$$

czyli

$$\frac{\alpha_N^2 (\alpha_N^{t_1-k} - 1)}{\alpha_N - 1} + \alpha_N^{t_1-k+1} \frac{(\alpha_N - \delta_\varepsilon^v) [(\alpha_N - \delta_\varepsilon^v)^k - 1]}{\alpha_N - \delta_\varepsilon^v - 1} \geq \frac{\sigma \bar{s}^v B \bar{p}}{v^0 A \bar{p}} \frac{\alpha_N^{t_1} - 1}{\alpha_N - 1} > 0.$$

Biorąc liczbę $\delta_\varepsilon^v > 0$ dostatecznie małą (tak aby $\alpha_N - 1 - \delta_\varepsilon^v > 0$) otrzymujemy:

$$0 < C = \frac{\sigma \bar{s}^v B \bar{p}}{v^0 A \bar{p}} \leq A(t_1, k) + B(t_1, k), \quad (16)$$

gdzie

$$A(t_1, k) = \frac{\alpha_N^2 (\alpha_N^{t_1-k} - 1)}{\alpha_N^{t_1} - 1} \rightarrow 0 \text{ przy } k \rightarrow +\infty, t_1 \geq k$$

oraz

$$B(t_1, k) = \frac{\alpha_N^{t_1-k+1} (\alpha_N - 1)}{\alpha_N^{t_1} - 1} \cdot \frac{(\alpha_N - \delta_\varepsilon^v) [(\alpha_N - \delta_\varepsilon^v)^k - 1]}{\alpha_N - \delta_\varepsilon^v - 1} \rightarrow 0 \text{ przy } k \rightarrow +\infty, t_1 \geq k,$$

co przeczy (16). Istnieje zatem taka, niezależna od długości horyzontu t_1 (natomiast zależna od ε) liczba naturalna k_ε , że liczba okresów czasu, w których zachodzi warunek $\left\| \frac{v^*(t)}{\|v^*(t)\|} - \bar{s}^v \right\| \geq \varepsilon$, nie przekracza k_ε . Dowód analogicznych własności optymalnych trajektorii nakładów $\{x^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ i produkcji $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ przebiega podobnie. ■

4. „BARDZO SILNE” TWIERDZENIE O MAGISTRALI

„Słabe” twierdzenia o magistrali głoszą, że optymalne procesy wzrostu prawie we wszystkich okresach ustalonego horyzontu przebiegają w bliskim otoczeniu magistral. Przez „prawie wszystkie” rozumie się wszystkie okresy horyzontu za wyjątkiem ich pewnej skończonej liczby, niezależnej od długości horyzontu (zatem liczba ta jest nieskończenie małą wyższego rzędu w stosunku do długości horyzontu). „Silne” wersje twierdzeń o magistrali precyzują czas, w którym może nastąpić wytrącenie optymalnego procesu z otoczenia magistrali. Dowodzą, że wszystkie takie zdarzenia mogą mieć

miejsce tylko w początkowych i/lub końcowych okresach horyzontu, zob. np. [3] rozdz. 13, [2], [7] rozdz. 7.

Natomiast w „bardzo silnych” twierdzeniach o magistrali (termin wprowadzony chyba po raz pierwszy przez W.L. Makarowa [2]) mowa jest o optymalnych procesach, które prawie zawsze, pomijając pewien okres początkowy przebiegają po magistrali. Wersję takiego twierdzenia przytaczamy poniżej.

□ **Twierdzenie 4.** („Bardzo silne” twierdzenie o magistrali)

Jeżeli spełnione są założenia (I), (III) oraz (IV) i $(v^0, t_1, \bar{p})$ – optymalna trajektoria intensywności $\{v^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ – rozwiązanie zadania (8)-(9) – w pewnym okresie $\tau < t_1$ dochodzi do magistrali, tzn.

$$v^*(\tau) \in N^v, \quad (17)$$

wtedy $v^*(t) \in N^v$ dla każdego $t > \tau$.

Dowód. Jeżeli $(v^0, t_1, \bar{p})$ – optymalna trajektoria intensywności $\{v^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek (17), to (v^0, t_1) – dopuszczalna jest także trajektoria intensywności

$$\tilde{v}(t) = \begin{cases} v^*(t), & \text{dla } t = 0, 1, \dots, \tau, \\ v^*(\tau) \alpha_N^{t-\tau}, & \text{dla } t = \tau + 1, \dots, t_1, \end{cases}$$

gdzie $v^*(\tau) = \sigma \bar{s}^v$ dla pewnej liczby $\sigma > 0$. Ponieważ

$$\tilde{v}(t) = v^*(t) \text{ dla } t = 0, 1, \dots, \tau$$

oraz $\{v^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ jest procesem $(v^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnym, więc

$$\sum_{t=\tau}^{t_1} v^*(t) B \bar{p} \geq \sum_{t=\tau}^{t_1} \tilde{v}(t) B \bar{p} = \sigma \bar{s}^v B \bar{p} \sum_{t=\tau}^{t_1} \alpha_N^{t-\tau}. \quad (18)$$

Z drugiej strony, dla $t \geq \tau$, zważywszy na (2), (3), mamy:

$$\begin{aligned} v^*(\tau) B \bar{p} &= \sigma \bar{s}^v B \bar{p} \\ v^*(\tau + 1) B \bar{p} &\leq \alpha_N v^*(\tau + 1) A \bar{p} \leq \alpha_N v^*(\tau) B \bar{p} = \alpha_N \sigma \bar{s}^v B \bar{p} \\ &\vdots \\ v^*(t_1) B \bar{p} &\leq \alpha_N v^*(t_1) A \bar{p} \leq \alpha_N v^*(t_1 - 1) B \bar{p} \leq \alpha_N^{t_1-\tau} \sigma \bar{s}^v B \bar{p}. \end{aligned} \quad (19)$$

Wbrew tezie założymy, że istnieje taki okres $t > \tau$, w którym $v^*(t) \notin N$. Niech t_0 będzie pierwszym takim okresem, tzn. $v^*(t) \in N$ dla $t = \tau, \tau + 1, \dots, t_0 - 1$ oraz

$$v^*(t_0) \notin N^v.$$

Zgodnie z twierdzeniem 1, istnieje taka liczba $\delta^v > 0$, że

$$v^*(t_0) B \bar{p} \leq (\alpha_N - \delta^v) v^*(t_0) A \bar{p} \leq (\alpha_N - \delta^v) v^*(t_0 - 1) B \bar{p} \leq \alpha_N^{t_0-\tau-1} (\alpha_N - \delta^v) \sigma \bar{s}^v B \bar{p},$$

co łącznie z układem (19) prowadzi do nierówności:

$$\sum_{t=\tau}^{t_1} v^*(t) B \bar{p} \leq \sigma \bar{s}^v B \bar{p} \left(\sum_{t=0}^{t_1-\tau} \alpha_N^t - \delta^v \alpha_N^{t_0-\tau-1} \right). \quad (20)$$

Z (18), (20) otrzymujemy warunek

$$0 < \sigma \bar{s}^v B \bar{p} \sum_{t=\tau}^{t_1} \alpha_N^{t-\tau} \leq \sigma \bar{s}^v B \bar{p} \left(\sum_{t=0}^{t_1-\tau} \alpha_N^t - \delta^v \alpha_N^{t_0-\tau-1} \right),$$

z którego wynika, że $\delta^v < 0$. Otrzymana sprzeczność zamyka dowód twierdzenia. ■

Twierdzenie pozostaje prawdziwe również wówczas, gdy w optymalnym procesie wzrostu magistralę osiąga którakolwiek z pozostałych optymalnych trajektorii (nakładów, produkcji). Przy jego dowodzie nie jest wymagana dodatnia stopa wzrostu gospodarczego na magistrali (tempo $\alpha_N > 1$). Warunek ten gra natomiast istotną rolę przy dowodzie twierdzenia 3. Efekt magistrali, o którym mowa w twierdzeniu 3 ilustruje poniższy przykład numeryczny.

5. PRZYKŁAD

Mamy 2 bazowe procesy technologiczne i 3 towary. Neumannowskie macierze nakładów i wyników mają następującą postać:

$$A = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 1 & 1,5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 1 \\ 1 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Wektor intensywności stosowania bazowych procesów ma postać $v = (v_1, v_2) \geq 0$. Rozwiązując zadanie

$$\begin{aligned} \max & \alpha \\ \alpha v A & \leq v B \\ v & \geq 0 \end{aligned}$$

z macierzami A, B postaci (21) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \alpha_N = \frac{10}{9} = 1.111, \quad \bar{s}^v = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} = (0.4, 0.6), \quad \bar{s}^x = \frac{\bar{v}A}{\|\bar{v}A\|} = (0.346, 0.308, 0.346), \\ \bar{s}^y = \frac{\bar{v}B}{\|\bar{v}B\|} = (0.345, 0.31, 0.345). \end{aligned} \quad (22)$$

Warunek (2) zachodzi dla każdego wektora intensywności $v \geq 0$, więc jest on równoważny z układem nierówności

$$Bp - \alpha_N Ap \leq 0,$$

którego rozwiązaniem, po podstawieniu macierzy (21) i wskaźnika $\alpha_N = \frac{10}{9}$, jest (określony z dokładnością do struktury, wektor cen $\bar{p} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3)^T$:

$$\bar{p} = \lambda(3, 0, 2)^T, \quad \lambda > 0 \quad (23)$$

Ustalamy początkowy wektor intensywności $v^0 > 0$, np. niech

$$v^0 = (250, 50). \quad (24)$$

Wówczas $\frac{v^0}{\|v^0\|} = (0.125, 0.25, 0.625)$. Przyjmując $t_1 = 10$ i rozwiązując zadanie (8)-(9) z macierzami A, B postaci (21), warunkiem początkowym (24) i cenami równowagi (23) otrzymujemy optymalną trajektorię intensywności $\{v^*(t)\}_{t=0}^{10}$ (tabela 1). Odpowiadają jej optymalne trajektorie nakładów $x^*(t) = v^*(t)A$ i wyników $y^*(t) = v^*(t)B$ (tabele 2, 3).

Tabela 1.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v_1^*(t)$	250	186,6667	207,4074	230,4527	256,0585	284,5095	316,1216	351,2463	390,2736	433,6374	481,8193
$v_2^*(t)$	170	280	311,1111	345,679	384,0878	426,7642	474,1825	526,8694	585,4104	650,456	722,7289

Źródło: obliczenia własne

Tabela 2.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1^*(t)$	460	420	466,6667	518,5185	576,1317	640,1463	711,2737	790,3041	878,1157	975,6841	1084,093
$x_2^*(t)$	295	373,3333	414,8148	460,9053	512,1171	569,019	632,2433	702,4925	780,5473	867,2747	963,6386
$x_3^*(t)$	255	420	466,6667	518,5185	576,1317	640,1463	711,2737	790,3041	878,1157	975,6841	1084,093

Źródło: obliczenia własne

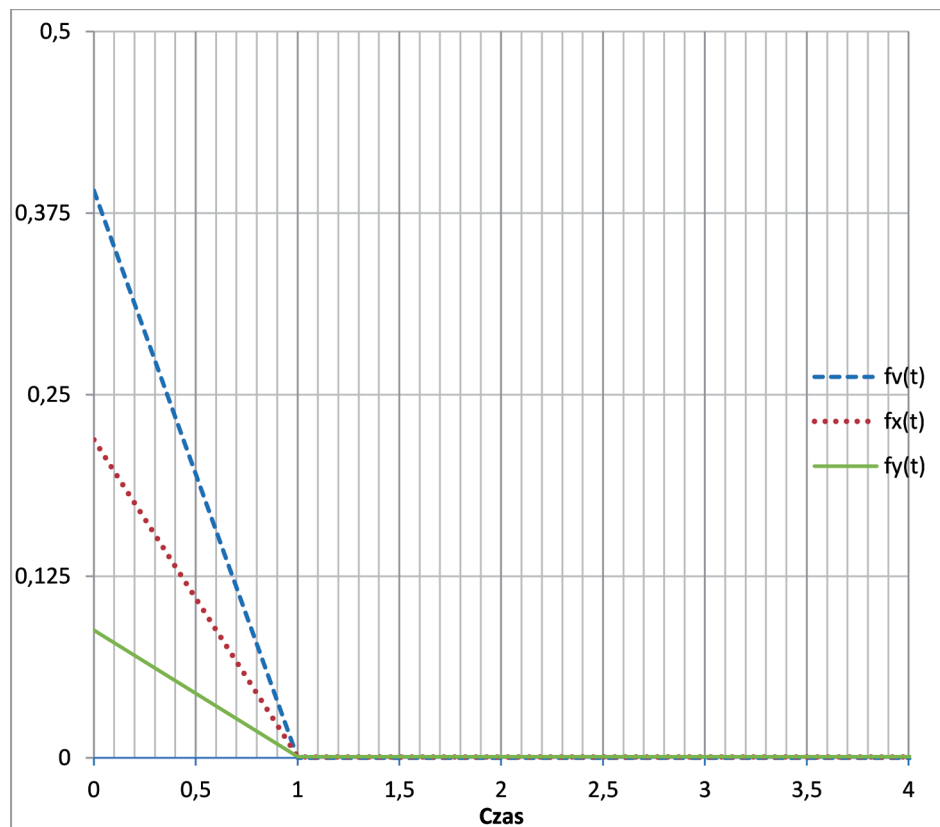
Tabela 3.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y_1^*(t)$	420	466,6667	518,5185	576,1317	640,1463	711,2737	790,3041	878,1157	975,6841	1084,093	1204,548
$y_2^*(t)$	460	420	466,6667	518,5185	576,1317	640,1463	711,2737	790,3041	878,1157	975,6841	1084,093
$y_3^*(t)$	420	466,6667	518,5185	576,1317	640,1463	711,2737	790,3041	878,1157	975,6841	1084,093	1204,548

Źródło: obliczenia własne

Zbieżności struktury intensywności stosowania procesów technologicznych $s_v^*(t) = \frac{v^*(t)}{\|v^*(t)\|}$, struktury nakładów $s_x^*(t) = \frac{x^*(t)}{\|x^*(t)\|}$ i struktury wyników (produkcji) $s_y^*(t) = \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|}$ w procesie optymalnym do odpowiednich magistral ilustruje rysunek 1.

Jak widzimy, bardzo prosta struktura zadania (2 procesy, 3 towary) sprawia, że optymalne trajektorie docierają do magistrali już po jednym okresie.



Rysunek 1. Ilustracja „efektu magistrali” w przestrzeni intensywności; $f_v(t) = \|s_v^*(t) - \bar{s}^v\|$, $f_x(t) = \|s_x^*(t) - \bar{s}^x\|$, $f_y(t) = \|s_y^*(t) - \bar{s}^y\|$.

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

LITERATURA

- [1] Kasprzak T., (1976), *Analiza działalności systemów ekonomicznych*, PWE, Warszawa.
- [2] Makarow W.L., (1966), *Asimptotycznoje powiedienije optymalnych trajektorii niniejszych modeliej ekonomiki*, Sibirskij Matematyczieskij Żurnał, Nr 4.
- [3] Nikaido H., (1968), *Convex Structures and Economic Theory*, Acad. Press, New York.
- [4] Panek E., (2003), *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo AEP, Poznań.
- [5] Panek E., (2011), *O pewnej prostej wersji „łabego” twierdzenia o magistrali w modelu von Neumanna*, Przegląd Statystyczny, Nr 1-2 (tom 58).
- [6] Radner R., (1961), *Path of Economic Growth that are Optimal with Regard only to Final States: A Turnpike Theorem*, Review of Econ. Studies, XXVIII, 1961.
- [7] Takayama A., (1985), *Mathematical Economics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

DWA TWIERDZENIA O MAGISTRALI W MODELU VON NEUMANNA

Streszczenie

Artykuł nawiązuje do pracy [5], w której przedstawiono prosty dowód „słabego” twierdzenia o magistrali w modelu von Neumanna, w którym w charakterze kryterium wzrostu przyjęto wartość (mierzonej w cenach równowagi) produkcji wytworzonej w końcowym okresie ustalonego horyzontu gospodarki $0, 1, \dots, t_1$. Prezentujemy w nim dwie wersje – „słabą” oraz „bardzo silną” – twierdzenie o magistrali w modelu von Neumanna, w którym rolę kryterium wzrostu gra łączna wartość produkcji, mierzonej w cenach równowagi, wytworzonej w całym horyzoncie $0, 1, \dots, t_1$.

Słowa kluczowe: model von Neumanna, „słabe” i „bardzo silne” twierdzenie o magistrali

TWO TURNPIKE THEOREMS IN THE VON NEUMANN GROWTH MODEL

Abstract

The article refers to the paper [5], in which a simple proof of the “weak” turnpike theorem in the von Neumann Growth Model was presented. In that paper we accepted as the growth criterion the output value (measured in the equilibrium price) produced in the finite stage of the established horizon of the economy. Whereas in this article we present two versions – “weak” and “very strong” – of the turnpike theorem in the von Neumann Growth Model, in which the part of the growth criterion is assigned to the cumulative output value, measured in the equilibrium price, produced in the entire horizon.

Key words: von Neumann Growth Model, “weak” and “very strong” turnpike theorem

SŁAWOMIR DOROSIEWICZ

POTOKI W SIECIACH TRANSPORTOWYCH. ROZKŁAD PRZESTRZENNY I JEGO WŁASNOŚCI DYNAMICZNE

1. WSTĘP

Analizy rozkładu potoków w sieci transportowej odgrywają ważną rolę w teorii i praktyce transportu. Alternatywą dla tych analiz są z jednej strony badania empiryczne, te zaś, szczególnie w makroskali, są na tyle kosztowne, że zakres i częstotliwość ich przeprowadzania nie mogą być, i nie są, zbyt duże. Stąd naturalna potrzeba wykorzystania możliwie dokładnych modeli opisujących przestrzenny rozkład potoków. Odnosi się to zarówno do sfery przewozów towarowych jak i pasażerskich.

Praca dotyczy dynamicznych aspektów zagadnienia przydziału ruchu, koncentrując się na modelowym ujęciu zjawiska formowania się konkretnych przestrzennych rozkładów potoków w sieci. Przyjęta w pracy terminologia odnosi się do przewozu ładunków, nie wydaje się jednak, aby aparat formalny nie mógł znaleźć zastosowania w modelowaniu potoków pasażerskich.

Konkretny rozkład potoków jest postrzegany jako wypadkowa jednostkowych decyzji o wyborze tras i następujących po nich działań podejmowanych przez przewoźników. Zasadniczym naszym zamysłem jest zbadanie różnych modeli decyzyjnych (przede wszystkim opartych na założeniu ograniczonej racjonalności). Uwaga zostanie skupiona przede wszystkim na modelu populacji przewoźników złożonej z continuum drobnych podmiotów (graczy), który to przypadek wydaje się „dobrze dopasowany” do realiów większości rynków transportowych.

Dotychczasowe propozycje równań określających dynamikę przepływów w sieciach transportowych miały przede wszystkim charakter modeli deterministycznych, choć nie brakuje konstrukcji opartych na paradygmacie probabilistycznym. Służyły one do badań nad stabilnością różnych rodzajów równowag sieci (klasyczna równowaga użytkowników sieci transportowej, *User Equilibrium*, *UE*, np. Wardrop [20], jak i jej stochastyczna odmiana, Florian et al. [7]). Z badań nad modelami z czasem ciągłym można tu wymienić prace Smitha [15], Friesza [8], Watlinga [17-18], Zhanga i Nagurney [19], Cho i Hwanga [5], Mounce’a [14]. Analizy modeli z czasem dyskretnym można znaleźć w Cantarella i Casscetta [3], Bie i Lo [2]. Wydaje się jednak, że zasadniczą rolę odgrywało założenie o racjonalności zachowań uczestników rynku. W niniejszej pracy częściowo zrezygnowano z tego założenia na rzecz ograniczonej (a dokładnie proceduralnej) racjonalności podmiotów rynkowych i zaproponowano równania określające

przestrzenny rozkład potoków we wspomnianym przypadku. Równania te pozwalają w szczególności, przy ustalonej wielkości globalnego popytu na przewozy, na identyfikowanie obszarów przyciągania stanów równowagi; mogą więc stanowić pewien głos w dyskusji nad badaniami stabilności stanów równowagi sieci transportowych.

2. MODEL DYNAMIKI POTOKÓW

Kluczowe znaczenie w konstrukcji modelu opisującego przestrzenny rozkład potoków przewozowych mają, oprócz struktury samej sieci transportowej, informacje o strukturze populacji przewoźników oraz założenia o mechanizmach decyzyjnych przewoźników, przede wszystkim w aspekcie wyboru tras realizacji przewozów. Omówimy pokrótce obie te kategorie.

2.1 PRZEWOŹNICY

W wielu krajach, także w Polsce, samochodowy transport ładunków jest zdecentralizowany. Dostarczycielami usług transportowych jest stosunkowo duża liczba małych przedsiębiorstw transportowych¹. Istnieją znaczące rozbieżności danych o liczbie tych podmiotów. Burniewicz [3] szacował ją na ponad 80 tys. (w 2006r). Inni autorzy (Bentkowska-Senator, Kordel [1]) na podstawie różnych źródeł szacują ją na około 110 tys., w znaczącej większości dysponujących 1 lub 2 samochodami ciężarowymi. Warto wspomnieć, że według danych GUS [16], w końcu 2008r. było około 1200 przedsiębiorstw posiadających 11-50 samochodów i niewiele ponad 100 firm dysponujących większym taborem. Mimo ciągłych zmian (z jednej strony rejestracje nowych, z drugiej zaś bankructwa i wyrejestrowania z innych powodów) wydaje się, że łączna ich liczba pozostaje na mniej więcej jednakowym poziomie. Istnieją więc tym samym praktyczne przesłanki, aby zbiorowość przewoźników uznać za jednorodną, zaś każdego z przewoźników za małego gracza rynkowego a więc podmiot, którego działalność ma znikomy wpływ na łączną wielkość przewozów. Wydaje się także akceptowalnym założenie o niezależnym charakterze działalności przewoźników, wyrażającym się w podejmowaniu przez nich niezależnych decyzji o wyborze konkretnego układu tras w celu realizacji zadań przewozowych.

¹ Prawo polskie (Ustawa o swobodzie działalności gospodarczej, Dz.U. Nr 173, poz. 1807 z późn. zm.) precyzuje, że przedsiębiorcą jest osoba fizyczna, osoba prawna lub jednostka organizacyjna mająca zdolność prawną – wykonująca we własnym imieniu działalność gospodarczą. Dodatkowo Ustawa o transporcie samochodowym (Dz.U. z 2004r., Nr 204, poz. 288) określa przewoźnika drogowego jako przedsiębiorcę uprawnionego do wykonywania działalności gospodarczej w zakresie transportu drogowego.

2.2. SIEĆ TRANSPORTOWA I POTOKI ŁADUNKÓW

Elementem *sieci transportowej* (zwanej dalej *siecią*) jest skierowany multigraf, którego wierzchołki odpowiadają geograficznym miejscom, pomiędzy którymi zachodzi wymiana towarowa, łuki reprezentują możliwe połączenia drogowe pomiędzy wierzchołkami.

Niech W oznacza zbiór uporządkowanych par wierzchołków multigrafu, P_i – zbiór dróg (nie zawierających cykli) łączących początkowy wierzchołek z końcowym wierzchołkiem pary $i \in W$. *Rozkład przewozów na drogach* (łukach) sieci jest określony wektorami h , v , których składowe przedstawiają wielkości potoków wyrażających się ilością ładunków przewożonych w jednostce czasu na poszczególnych drogach (łukach) sieci. Między tymi rozkładami zachodzi zależność liniowa, $v = \delta h$, gdzie δ jest macierzą incydencji dróg i łuków grafu. Każda droga – element zbioru $P = \cup_{i \in W} P_i$ – jest scharakteryzowana układem stosownych parametrów i funkcji (np. czas lub, wyrażone w pieniądzu, koszty przewozu). Z uwagi na kongestię transportową i towarzyszące jej zjawiska wielkości te są funkcjami aktualnego rozkładu ruchu.

2.3. RÓWNANIA DYNAMIKI

Wielkość łącznych przewozów jest wynikiem agregacji cząstkowych potoków generowanych przez przewoźników. Te ostatnie zaś, a dokładniej ich rozkład przestrzenny (na drogach sieci), odzwierciedlają jednostkowe decyzje o wyborze tras przewozów. Wielkość potoku na drodze p w chwili t jest dana wzorem:

$$h_{p,t} = \pi_{p,t} D_{i,t} \quad \forall p \in P_i, i \in W, \quad (1)$$

gdzie h_p jest potokiem ładunku na drodze $p \in P_i$, D_i – łącznym popytem na przewozy pomiędzy parą wierzchołków i , π_p – prawdopodobieństwem wyboru drogi przez reprezentatywnego przewoźnika. Zależność taka zachodzi dla każdego momentu (czasu). Otrzymujemy z niej bezpośrednio formuły dla potoków na drodze $p \in P_i$ ($i \in W$):

$$dh_{p,t} = D_{i,t} d\pi_{p,t} + \pi_{p,t} dD_{i,t}, \quad (2)$$

$$h_{p,t+1} - h_{p,t} = \Delta D_{i,t} \pi_{p,t+1} + D_{i,t} \Delta \pi_{p,t}. \quad (3)$$

Wyprowadzenie równań opisujących dynamikę potoków wymaga określenia zmian obu czynników: zmian globalnego popytu na przewozy oraz zmian prawdopodobieństw wyboru dróg. Pierwszy z nich wyznaczony jest przez czynniki makroekonomiczne, w szczególności zmiany wolumenu produkcji poszczególnych sektorów gospodarki jest w dużym stopniu niezależny od działalności przewoźników. Sposób modelowego opisu drugiego czynnika – odnoszącego się do zmian prawdopodobieństw $\pi_{p,t}$ – opiera się o znaną z teorii gier populacyjnych koncepcję *procedury*. W rozważanym przypadku – modelowania zachowań przewoźników – jest to zespół czynności polegający na wypracowaniu dla bieżących warunków odpowiednio dobrej strategii przewozowej, przy

okazji służący też zweryfikowaniu, czy stosowana dotychczas strategia może być nadal "w dostatecznym stopniu" akceptowalna. Procedura może polegać na przykład na dodatkowych obserwacjach, uwzględnieniu dodatkowych danych, przeprowadzeniu stosownych kalkulacji itp.), której wyniki mają wpływ na decyzje przewoźnika w zakresie jego działalności, to jest sposobu realizacji przewozów. Przyjmijmy, że w każdym momencie mechanizm decyzyjny każdego z przewoźników jest zgodny z tzw. schematem Calvo: przewoźnik realizuje procedurę, w wyniku czego może, zgodnie z jej wynikami, zmienić swoją dotychczasową decyzję odnośnie do wyboru drogi, bądź zachować w tej materii status quo.

Formalnie proces ten można opisać następująco. Niech $\lambda_p(t, t + \varepsilon)$ (gdzie $\varepsilon > 0$ jest ustalone) oznacza prawdopodobieństwo, iż przewoźnik, który tuż przed momentem t wybierał drogę $p \in P_i$, drogę tę wybierze także w chwili $t + \varepsilon$. Dla ustalonego $p \in P_i$ liczba π_p^{proc} oznacza prawdopodobieństwo utrzymania dotychczasowego wyboru (tj. drogi p) po zrealizowaniu procedury. Zmiany tych prawdopodobieństw opisuje równanie wynikające bezpośrednio z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym:

$$\pi_{p,t+\varepsilon} = \pi_{p,t}^{\text{proc}} \lambda_p(t, t + \varepsilon) + \pi_{p,t-0}(1 - \lambda_p(t, t + \varepsilon)). \quad (4)$$

Dla modelu z czasem dyskretnym wystarczy przyjąć $\varepsilon = 1$. W przypadku modelu z czasem ciągłym zakładamy, że $\lambda_p(t, t + \varepsilon) = \lambda_{p,t}\varepsilon + o(\varepsilon)$ dla $\varepsilon \downarrow 0$, gdzie $\lambda_{p,t} > 0$. Z (4) wynika wtedy istnienie granicy

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\pi_{p,t+\varepsilon} - \pi_{p,t-0})/\varepsilon = \lambda_{p,t}(\pi_{p,t}^{\text{proc}} - \pi_{p,t-0}) \quad (5)$$

i w konsekwencji ciągłość i różniczkowalność funkcji $t \mapsto \pi_{p,t}$. Ostatecznie mechanizm modyfikacji prawdopodobieństwa wyboru dróg może zostać zapisany następująco:

$$\pi_{p,t+1} - \pi_{p,t} = \lambda_{p,t}(\pi_{p,t}^{\text{proc}} - \pi_{p,t}) \quad \text{model z czasem dyskretnym,} \quad (6)$$

$$d\pi_{p,t} = \lambda_{p,t}(\pi_{p,t}^{\text{proc}} - \pi_{p,t}) dt \quad \text{model z czasem ciągłym.} \quad (7)$$

W konsekwencji równanie opisujące dynamikę potoku na drodze $p \in P_i$ ($i \in W$) mają odpowiednio postać:

$$h_{p,t+1} - h_{p,t} = (\pi_{p,t}^{\text{proc}} \lambda_{p,t} + \pi_{p,t}(1 - \lambda_{p,t}))(D_{i,t+1} - D_{i,t}) + \lambda_{p,t}(\pi_{p,t}^{\text{proc}} - \pi_{p,t})D_{i,t}, \quad (8)$$

$$dh_{p,t} = \lambda_{p,t}(\pi_{p,t}^{\text{proc}} - \pi_{p,t}) D_{i,t} dt + \lambda_{p,t} \pi_{p,t} dD_{i,t}. \quad (9)$$

Punkty krytyczne tego układu odpowiadają odmianie równowagi proceduralnej: wykonanie procedury i ewentualne wdrożenie jej wyników, a więc reoptymalizacja strategii przewoźnika, nie zmienia sumarycznego rozkładu potoków². Naturalne jest założenie,

² Można pokazać (por. [2], [6]), że w określonych przypadkach punkty krytyczne równań (8,9) są punktami równowagi użytkowników.

iż $(\pi_{p,t}^{\text{proc}} : p \in P)$ zależą od wcześniejszych obserwacji wielkości ruchu, przede wszystkim dotychczasowych kosztów przewozu. Przykładowa postać zależności dla modeli z czasem ciągłym i dyskretnym może być następująca:

$$\pi_{p,t}^{\text{proc}} = \begin{cases} A \sum_{s \geq 0} w_{t-s} \varphi(c_p(h_{t-s}) - c_i^0(h_{t-s})), \\ A \int_0^\infty w(t-s) \varphi(c_p(h_{t-s}) - c_i^0(h_{t-s})) ds, \end{cases} \quad \forall p \in P_i, i \in W, \quad (10)$$

gdzie $c_i^0 = \min\{c_k : k \in P_i\}$ jest minimalnym kosztem przewozu pomiędzy parą wierzchołków i , zaś A , φ oraz w są zadanymi funkcjami. Druga z nich jest funkcją nierosnącą, trzecia – zwykle niemalejąca. To ostatnie związane jest z tym, iż zwykle przyjmuje się, że dane pochodzące z odległej przeszłości mają mniejszy wpływ na rezultat bieżącego wnioskowania, niż dane młodszej daty. Postać funkcji A jest wyznaczona przez warunek unormowania prawdopodobieństwa tak, aby $\sum_{i \in P_i} \pi_{p,t}^{\text{proc}} = 1$. Tym samym własności dynamiczne modelu zależą od charakteru zmienności łącznego popytu, a przy stałej wartości tego ostatniego – są określone przez rodzaj wykonywanej procedury oraz skłonność przewoźników do akceptacji i uwzględnienia jej wyników. Ilustracją tego mogą być przytoczone w dalszej części przykłady.

3. PRZYKŁADY

Rozwiążemy równania dynamiki (8)-(9) w przypadku grafu złożonego z dwóch wierzchołków połączonych dwoma łukami (tu także drogami $p = 1, 2$). Dopuszczalne rozkłady potoków tworzą sympleks określony warunkami $x_1 + x_2 = D$, $x_1, x_2 \geq 0$. Jednostkowe koszty przewozu zależą liniowo od wielkości potoków: $c_1(h) = h_1$, $c_2(h) = 2h_2$.

Będziemy zakładali, że stałe są prawdopodobieństwa $\lambda_t = \lambda$. Wspólną ich wartość można traktować jako miarę skłonności przewoźników do uaktualnienia sposobu realizacji przewozów. Przyjmujemy, że każdy z przewoźników modyfikuje swoje wyobrażenia za pomocą procedury uwzględniającej wyniki jedynie *bieżących* obserwacji wielkości ruchu tak, że jedynym brany pod uwagę czynnikiem jest koszt przewozu. W przypadku, gdy procedura charakteryzuje się takim swoistym „brakiem pamięci”, co odpowiada przyjęciu we wzorze (10) $w_s = 0$ dla $s \neq 0$ oraz w w postaci delty Diraca odpowiednio w przypadku modelu z czasem dyskretnym i ciągłym, otrzymujemy:

$$\pi_{p,t}^{\text{proc}} = A \varphi(c_p - c_i^0) \quad \forall p \in P_i, i \in W. \quad (11)$$

Rozważymy szczególny przypadek (11), gdy prawdopodobieństwa wyboru dróg są określone modelem logitowym:

$$\pi_{p,t}^{\text{proc}} \sim \exp(-\alpha(c_p - c_i^0)) \sim \exp(-\alpha c_p), \quad (12)$$

gdzie $\alpha > 0$ jest parametrem określającym wrażliwość prawdopodobieństwa wyboru dróg na zmiany kosztów przewozu. Z warunku unormowania otrzymujemy dla rozważanych prawdopodobieństw wielomianowy model logitowy:

$$\pi_{p,t}^{proc}(h_p) = \exp(-\alpha c_p(h_p)) / ((\exp(-\alpha c_1(h_1)) + \exp(-\alpha c_2(h_2)))) . \quad (13)$$

W zamieszczonych przykładach zbadamy niektóre własności dynamiki potoków. Z uwagi na skomplikowaną naturę równań dynamiki, do efektywnego przeprowadzenia jakościowej analizy rozwiązań konieczne jest zastosowanie stosownych procedur numerycznych. Prezentowane w dalszej części wyniki zostały uzyskane za pomocą programu IDMC (Interactive Dynamical Model Calculator, por. [11],[12]) oraz autorskich skryptów dla programu **R**.

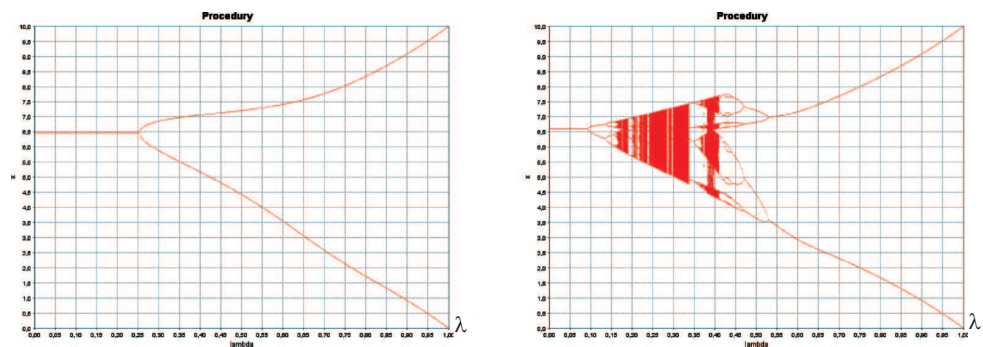
Przykład 1.

Założmy dodatkowo, że stały jest łączny popyt na przewozy ($D_t = D$). W przypadku modelu z czasem dyskretnym i ciągłym wielkością potoków ewoluują zgodnie z równaniami (8)-(9), które przyjmują postaci:

$$h_{p,t+1} - h_{p,t} = \lambda \left(\frac{D \exp(-\alpha c_p(h_{p,t}))}{\exp(-\alpha c_1(h_{1,t})) + \exp(-\alpha c_2(h_{2,t}))} - h_{p,t} \right), \quad (14)$$

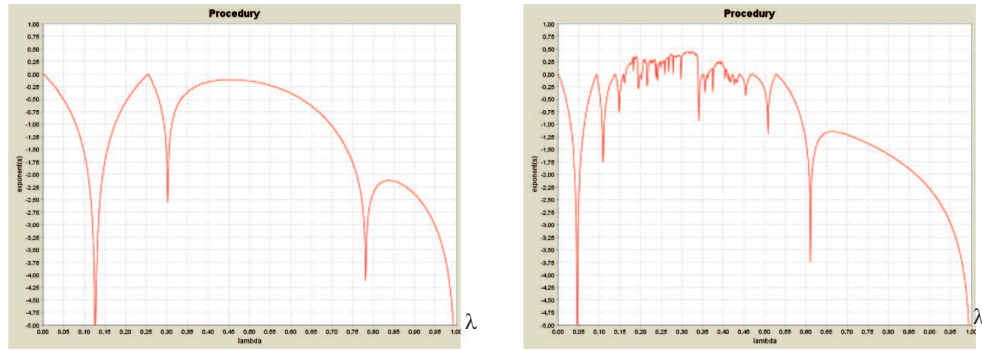
$$dh_{p,t} = \lambda \left(\frac{D \exp(-\alpha c_p(h_{p,t}))}{\exp(-\alpha c_1(h_{1,t})) + \exp(-\alpha c_2(h_{2,t}))} - h_{p,t} \right) dt. \quad (15)$$

Pochodna (względem h_p) prawej strony (14) oraz (15) jest lokalnie ograniczona co gwarantuje istnienie i jednoznaczność rozwiązań zagadnień początkowych.

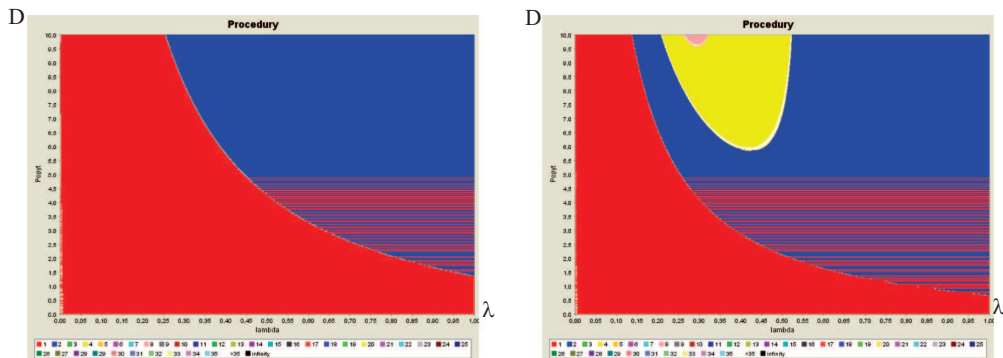


Rysunek 1. Diagram bifurkacyjny układu (14). Parametrem jest $\lambda \in [0, 1]$. Wartości pozostałych parametrów są następujące: $D = 10$, warunek początkowy $h_1|_{t=0} = D/2$ oraz $\alpha = 1$ lub $\alpha = 3$ (odpowiednio dla lewego i prawego panelu)

Charakter dynamiki zależy w sposób istotny od wartości parametrów modelu. Dla niewielkich wartości popytu, nawet istotne korekty tras proponowane w wyniku przeprowadzenia procedur nie są ilościowo znaczące. W konsekwencji dynamika układu



Rysunek 2. Wartości wykładników Lapunowa układu (14). Wartości parametrów identyczne jak w przypadku odpowiednich paneli rys. 1



Rysunek 3. Dwuwymiarowe diagramy bifurkacyjne układu (14). Parametrami bifurkacyjnymi są D, λ . Lewy i prawy panel odpowiadają wartościom $\alpha = 1$ oraz $\alpha = 3$

jest stosunkowo zachowawcza i istnieje dokładnie jeden asymptotycznie stabilny punkt równowagi dla wszystkich wartości $\lambda \in [0, 1]$. Za pomocą dość elementarnych narzędzi można pokazać, że dla $0 < \lambda \leq 1$ istnieje dokładnie jeden punkt równowagi układu (14,15). Co więcej, dla zadanych wartości D, α istnieje dodatnia liczba $\lambda = \lambda(D, \alpha)$, że dla $0 < \lambda < \lambda(D, \alpha)$ wspomniany punkt równowagi jest asymptotycznie stabilny.

W miarę wzrostu popytu zakres λ dla którego istnieje jedyny punkt równowagi kurczy się, pojawiają się rozwiązania okresowe o wyższych okresach, rozwiązania quasi-okresowe oraz (dla większych wartości α) także rozwiązania chaotyczne. Przykładowo, dla $\alpha = 3$ istnieją zakresy prawdopodobieństwa λ dla których dynamika jest chaotyczna (rys. 1 i 3). Świadczą o tym pasma z dodatnimi wartościami wykładnika Lapunowa (rys. 2). W praktyce jednak prawdopodobieństwa reoptymalizacji zachowań przewoźników, a więc wartości parametru λ , wydają się stosunkowo niewielkie (choć weryfikacja tej tezy wymaga szczegółowych badań), dlatego nie należy spodziewać się chaotycznych zmian rozkładu potoków.

W modelu z czasem ciągłym, w przypadku rozważanej sieci transportowej, występowanie chaotycznej dynamiki jest w ogóle wykluczone. W zależności od wartości parametrów obserwujemy stabilne punkty krytyczne bądź rozwiązania okresowe lub – częściej – quasi-okresowe.

Przykład 2.

Zajmiemy się równaniami dynamiki w przypadku rozważanym w poprzednim przykładzie z jedną różnicą polegającą na uchyleniu założenia o stałości popytu na przewozy. Dokładny opis jego zmian wymaga analizy ścieżki rozwoju otoczenia gospodarczego transportu.

W pierwszym przybliżeniu można pominąć inne czynniki zewnętrzne i przyjąć założenie, iż samo tempo zmian popytu na przewozy, jak i jego odchylenia od trendu, zależą jedynie od bieżącej wielkości tego popytu. Równanie dynamiki wielkości przewozów może być zapisane w postaci:

$$D_{t+1} - D_t = D_t (r(D_t) + \sigma(D_t)\varepsilon_t) \quad \text{model z czasem dyskretnym,} \quad (16)$$

$$dD_t = D_t (r(D_t) + \sigma(D_t)dW_t) \quad \text{model z czasem ciągłym,} \quad (17)$$

gdzie r , σ są funkcjami opisującymi odpowiednio średnie tempo zmian i wahania przypadkowe popytu na przewozy, ε_t jest gaussowskim procesem białego szumu, zaś W_t – procesem Wienera.

W najprostszym przypadku, uzasadnionym zwłaszcza w przypadku analiz krótko-okresowych, można przyjąć, iż funkcje r , σ są stałe. W takim przypadku łączny popyt jest zgodny z geometrycznym ruchem Browna:

$$D_t = D_0 \prod_{\tau=0}^{t-1} (1 + r + \sigma \varepsilon_\tau), \quad \text{model z czasem dyskretnym,}$$

$$D_t = D_0 \exp\left((r - s^2/2)t + sW_t\right), \quad \text{model z czasem ciągłym.}$$

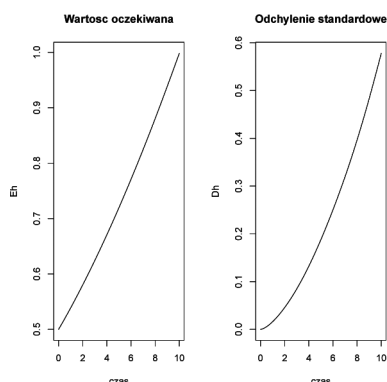
Przyjmując, iż pozostałe elementy – w tym definicja procedury – są identyczne jak w poprzednim przykładzie, z formuł (8)-(9) oraz (16)-(17) wynikają równania dynamiki potoków. Dla przypadku czasu dyskretnego i ciągłego mają one postać:

$$h_{p,t+1} - h_{p,t} = \lambda D_{t+1} \frac{\exp(-\alpha c_p)}{\exp(-\alpha c_1) + \exp(-\alpha c_2)} - \lambda h_{p,t} + (1 - \lambda)(1 + r + \sigma \varepsilon_t), \quad (18)$$

$$dh_{p,t} = \left(\lambda D_t \frac{\exp(-\alpha c_p)}{\exp(-\alpha c_1) + \exp(-\alpha c_2)} + (r - \lambda)h_{p,t} \right) dt + \sigma h_{p,t} dW_t. \quad (19)$$

Dla zadanej wartości popytu początkowego istnieje silne rozwiązanie tego równania i jest ono jednoznaczne. W przypadku modelu z czasem ciągłym uzyskanie analitycznej postaci rozwiązania nie wydaje się możliwe. Funkcje: wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego rozwiązania zostały oszacowane za pomocą schematu Milsteina

([10]) zaimplementowanego w pakiecie **R**. Wykresy wspomnianych funkcji momentowych dla potoku $t \mapsto h_{1,t}$ – pokazano na rys. 4.



Rysunek 4. Oszacowane metodą Monte Carlo: wartość oczekiwana Eh_1 i odchylenie standardowe Dh_1 wielkości potoku na drodze 1 (odpowiednio lewy i prawy panel)

4. UWAGI KOŃCOWE

W rozważanym modelu wielkość popytu na przewozy była kategorią egzogeniczną. Konstruując subtelniejsze wersje modeli, w tym analizując długookresowe ścieżki popytu, należy uwzględnić fakt, iż przewozy są osadzone w systemie transportowym, a ten z kolei jest częścią konkretnego układu gospodarczego. Ich związki mają skomplikowaną naturę, która niełatwo poddaje się kwantyfikacji. Do branych pod uwagę czynników mających wpływ na wielkość przewozów zaliczyć można zasadnicze wielkości charakteryzujące wzrost gospodarczy i towarzyszący mu wzrost dochodów i zamożności społeczeństwa: wielkość PKB, wolumen wymiany z zagranicą, liczebność i strukturę społeczeństwa, poziom jego dochodów, poziom konsumpcji wzrost zasobów i wartości czasu wolnego, zmiany w strukturze sieci osiedleńczej, relacjach cenowych, strukturze zatrudnienia oraz cząstkowe wskaźniki stopnia racjonalizacji danej formy transportu, uwzględniające stopień liberalizacji rynku, wprowadzania nowych technologii, rozbudowy infrastruktury itp. ([3] oraz [13]).

Drugą kwestią, także o zasadniczym znaczeniu, wydaje się odpowiedni dobór procedury. Szczególnie ważny wydaje się przypadek, w którym wyniki procedur wykonywanych przez przewoźników opisują niezależne procesy Markowa. Równania opisujące rozkład potoków opierają się wtedy bezpośrednio na równaniach Chapmana-Kołmogorowa, zaś istota wykonywanych procedur determinuje intensywności zmian decyzji przewoźników i wartości warunkowych prawdopodobieństw wyboru przez nich poszczególnych dróg przewozu, (por. np. [6]).

Autor bardzo dziękuje Recenzentowi za szereg uwag, które w znaczącym stopniu przyczyniły się do ulepszenia treści artykułu.

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

LITERATURA

- [1] Bentkowska-Senator K., Kordel Z., Polski transport samochodowy ładunków. Wyd. Kodeks, Bydgoszcz-Gdańsk-Warszawa, 2007.
- [2] Bie J., Lo H.K., Stability and attraction domains of traffic equilibria in a day-to-day dynamical system formulation, *Transportation Research, Part B*, vol. 44 (2010), pp. 90-107.
- [3] Burniewicz J., Prognoza zapotrzebowania na usługi transportowe w Polsce do 2020 roku. W: *Uwarunkowania rozwoju systemu transportowego Polski* (red. B. Liberadzki, L. Mindur), Uwarunkowania rozwoju systemu transportowego Polski, str. 125-167. Wydawnictwo ITE, 2006.
- [4] Cantarella G.E., Cascetta E., Dynamic processes and equilibrium in transportation networks: towards a unifying theory. *Transportation Science* 29 (4) 1995, pp. 305-329.
- [5] Cho H.J., Hwang M.C., Day-to-day vehicular flow dynamics in intelligent transportation network. *Mathematical and Computer Modelling* 41 (4-5) 2005, pp. 501-522.
- [6] Dorosiewicz S., Potoki w sieciach transportowych. Wydawnictwo Instytutu Transportu Samochodowego. Warszawa 2010r.
- [7] Florian M., Hearn D., Networks Equilibrium Models and Algorithms, In: *Network Routing. Handbooks of Operations Research and Management Science* (M.O. Ball et all. eds). Volume 8. North-Holland, Amsterdam, 1995.
- [8] Friesz T.L., Bernstein D., Mehta N.J., Tobin R.L., Ganjalizadeh S., Day-to-day dynamic network disequilibria and idealized traveler information systems. *Operations Research* 42(6), 1994, pp. 1120-1136.
- [9] Horowitz J.L., The stability of stochastic equilibrium in a two link transportation network. *Transportation Research Part B* 18 (1) 1984, pp. 13-28.
- [10] Kloeden P.E., Platten E., Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.
- [11] Medio A., Lines M., 2001. *Nonlinear Dynamics. A Primer*. Cambridge University Press, 2003.
- [12] Medio A., Lines M., IDMC interactive Dynamical Model Calculator. User Guide, available at www.dss.uniud.it/nonlinear, 2004.
- [13] Menes E., Dylematy rozwoju motoryzacji indywidualnej w Polsce. Wyd. Instytutu Transportu Samochodowego, Warszawa, 1998.
- [14] Mounce R., Convergence in a continuous dynamic queueing model for traffic networks. *Transportation Research Part B* 40 (9) 2006, pp. 779-791.
- [15] Smith M.J., The stability of a dynamic model of traffic assignment-an application of a method of Lyapunov. *Transportation Science* 18 (3) 1984, pp. 245-252.
- [16] Transport. Wyniki działalności, Wyd. GUS. Warszawa 2008r.
- [17] Watling D.P., Stability of the stochastic equilibrium assignment problem: a dynamical systems approach. *Transportation Research Part B* 33 (4) 1999, pp. 281-312.
- [18] Watling D.P., Hazelton M.L., The dynamics and equilibria of day-to-day assignment models. *Networks and Spatial Economics* 3 (3) 2003, pp. 349-370.
- [19] Zhang D., Nagurney A., On the local and global stability of a travel route choice adjustment process. *Transportation Research Part B* 30 (4) 1996, pp. 245-262.
- [20] Wardrop J.G., Journey speed and flow in central urban areas. *Traffic Engineering and Control*, 9 1968, pp. 528-532.

POTOKI W SIECIACH TRANSPORTOWYCH.
ROZKŁAD PRZESTRZENNY I JEGO WŁASNOŚCI DYNAMICZNE

S t r e s z c z e n i e

Praca dotyczy zagadnienia przydziału ruchu. Sformułowano dynamiczny model opisujący przestrzen-ny rozkład potoków w sieci transportowej. Zbadane zostały własności dynamiczne tego modelu w kilku przypadkach szczególnych.

Słowa kluczowe: Zagadnienie przydziału ruchu, ograniczona racjonalność, układy dynamiczne

FLows IN TRANSPORTATION NETWORKS.
SPATIAL DISTRIBUTION AND ITS DYNAMIC PROPERTIES

A b s t r a c t

This paper refers to Dynamic Traffic Assignment Problem. A consecutive dynamic model of traf-fic flows is formulated. Some of its dynamical properties (including existence of chaotic solutions and bifurcations) are examined in special cases.

Key words: Traffic Assignment, Bounded Rationality, Dynamical Systems

AGATA KLIBER, PAWEŁ KLIBER, PIOTR PŁUCIENNIK¹

ZALEŻNOŚCI POMIĘDZY STOPAMI PROCENTOWYMI RYNKU MIĘDZYBANKOWEGO W POLSCE

1. WSTĘP

Polityka dyskontowa jest jednym z trzech podstawowych instrumentów pośrednich wykorzystywanych przez banki centralne w polityce pieniężnej. Przyjęte na rok 2008 i lata następne założenia polityki pieniężnej Narodowego Banku Polskiego zakładają kształtowanie stawki POLONIA w pobliżu stopy referencyjnej. Przejście z kształtowania stopy WIBOR SW na stawkę POLONIA motywowano zmianami jakie zaszły w strukturze terminowej rynku pieniężnego, między innymi wzrostem udziału niezabezpieczonych międzybankowych lokat O/N w całości obrotów, które we wrześniu 2007 roku, gdy przyjęto nowe ramy polityki pieniężnej stanowiły zdecydowaną większość transakcji, a ich dzienny obrót sięgał nawet 10 mld PLN. Stawka POLONIA formalnie jest stopą kontrolowaną przez NBP od początku 2008 roku. Analizując własności spreadu pomiędzy stawką POLONIA a stopą referencyjną można dojść do wniosku, że bank centralny usiłował stabilizować stawkę POLONIA na poziomie stopy referencyjnej nawet 2 lata wcześniej, chociaż formalnie zakładano jeszcze stabilizację stopy WIBOR SW.

Stawka POLONIA (POLish OverNight Index Average) została wprowadzona na polski rynek w 2005 roku. Określa ona oprocentowanie depozytów w polskiej walucie udzielanych lub przyjętych w terminie O/N. Różnica względem stóp WIBOR i WIBID ON jest zasadnicza. Stopy WIBOR wyznaczane są na podstawie kwotowań 16 banków: dilerów rynku pieniężnego wyłonionych przez NBP. Kwotowanie następuje codziennie o godzinie 11 na fixingu organizowanym przez ACI – Stowarzyszenie Dilerów. Wartość kwotowania jest obliczana jako średnia po odrzuceniu dwóch największych i dwóch najmniejszych wartości.

Wyznaczając stawkę POLONIA bierze się pod uwagę wszystkie transakcje do godziny 16 zawierane przez grupę banków zatwierdzoną przez ACI Polska. Wobec tego stawka POLONIA w o wiele większym stopniu odzwierciedla cenę pieniądza na rynku. W praktyce wartość stawki POLONIA kształtuje się pomiędzy wartościami stóp WIBOR ON i WIBID ON.

¹ Praca naukowa finansowana ze środków budżetowych na naukę w latach 2010-2013 jako projekt badawczy N N111 035139.

Warto podkreślić, że wzrost udziału depozytów O/N w całości obrotów na rynku międzybankowym obserwowalny jest również w krajach wysoko rozwiniętych. Dlatego ramy polityki pieniężnej FED uwzględniają kształtowanie oprocentowania funduszy federalnych (FED funds rate), która jest stopą overnight, na poziomie stopy podstawowej, natomiast Europejski Bank Centralny potwierdza jedynie, że dąży do stabilizacji rynkowych stóp procentowych. Analiza własności spreadu pomiędzy stawką EONIA a stopą operacji podstawowych refinansujących pokazuje, że celem polityki pieniężnej ECB jest kształtowanie stawki EONIA. Tezę tą potwierdzają takie pozycje w literaturze jak prace Nautz i Offermanns [16] oraz Pérez Quirós i Rodríguez Mendizábal [19], którzy wykazali, że spread pomiędzy stawką EONIA, a stopą podstawowych operacji refinansujących jest szeregiem stacjonarnym, czy Hasslera i Nautza [13], którzy doszli do wniosku, że spread ten jest szeregiem z długą pamięcią.

Celem niniejszego artykułu jest poznanie mechanizmów oddziaływania na siebie zmienności stóp polskiego rynku międzybankowego. W szczególności zamierzamy sprawdzić, w jaki sposób zmienność stawki POLONIA oddziałuje na pozostałe stopy procentowe, oraz czy jej wpływ jest większy niż miało to miejsce w przypadku kontrolowanej wcześniej stopy WIBOR SW. Duży wpływ zmienności stawki POLONIA na stopy procentowe rynku międzybankowego o dłuższym terminie zapadalności oznaczałby mimowolną ingerencję banku centralnego w strukturę zmienności wszystkich stóp rynku międzybankowego. Jednocześnie oznaczałaby ona dużą siłę stosowanego przez Narodowy Bank Polski narzędzia. Dawałaby między innymi możliwość stabilizowania poprzez stawkę POLONIA stopy WIBOR 3M, która jest podstawową stopą na której opiera się oprocentowanie kredytów hipotecznych.

Aby dokonać oceny wzajemnych powiązań pomiędzy zmiennościami stóp procentowych, można zastosować dwa podejścia. Pierwsze to wprowadzenie do równań zmienności poszczególnych stóp procentowych dodatkowych zmiennych objaśniających reprezentujących zmienność innych stóp, podobnie jak to zrobiła Vila Wetherilt [23]. Niewątpliwie lepszym podejściem jest zastosowanie modelu wielowymiarowego, gdyż pozwala ono na jednoczesne zbadanie wszystkich kierunków transmisji zmienności. Podejście takie zostało wykorzystane przez Avouvi-Dovi i Jondeun [4]. Autorzy wykorzystali w tym celu model BEKK (por. [11]). Same reakcje na impuls badane były za pomocą wprowadzonej przez Hafnera i Herwartza [12] funkcji VIRF (Volatility Impulse Response Function), która bazuje na wielowymiarowym modelu BEKK. Autorzy badali jedynie cztery stopy procentowe, podczas gdy my rozważając stawkę POLONIA oraz stopy WIBOR o okresie do zapadalności od jednego tygodnia do jednego roku zmuszeni jesteśmy do jednoczesnego modelowania aż 8 stóp procentowych. Jak wiadomo zastosowanie wielowymiarowego modelu zmienności do tak dużej przestrzeni nie jest możliwe, chociażby ze względu na ogromną liczbę parametrów. Wykorzystany przez Avouvi-Dovi i Jondeun [4] dla obciążonej struktury terminowej model BEKK(1,1,1) w naszym przypadku miałby ich 110. W takiej sytuacji właściwym rozwiązaniem może wydawać się zastosowanie analizy głównych składowych oraz bazujących na nich ortogonalnych modeli GARCH. W pracy zdecydowano się na wykorzystanie wpro-

wadzonego przez van der Weide [25] modelu GO-GARCH (Generalized Orthogonal GARCH), podobnie jak to zrobił Vojték [24] badając stopy procentowe rynku międzybankowego z kilku krajów Europy środkowej.

2. METODY BADAWCZE

Jak już zostało wspomniane we wstępie, do opisu warunkowej wariancji stóp procentowych zastosowaliśmy model GO-GARCH. Model ten jest rozwinięciem koncepcji wprowadzonej przez Alexander i Chibumba [3] i rozwijanej przez Alexander w pracach [1] i [2] wykorzystanej do konstrukcji modelu O-GARCH (Orthogonal GARCH). Koncepcja modelu O-GARCH polega na niezależnym wyznaczeniu wariancji warunkowej za pomocą modelu GARCH dla m pierwszych głównych składowych k -wymiarowej przestrzeni danych. Macierz kowariancji warunkowej opisana jest za pomocą następującego równania

$$H_t = AD_tA',$$

gdzie D_t jest diagonalną, $m \times m$ wymiarową macierzą wariancji warunkowej zmiennych składowych, natomiast A jest $k \times m$ wymiarową macierzą ładunków poszczególnych składowych. Macierz H_t spełni warunek dodatniej półokreśloności z reguły tylko wtedy jeśli m jest znacznie mniejsze od k . Ponadto macierz A powinna spełniać warunek ortogonalności. Jeżeli badane szeregi są ze sobą słabo skorelowane warunek ten jest trudny do osiągnięcia (por. [25]).

Wykorzystany w niniejszej pracy model GO-GARCH (Generalized Orthogonal GARCH) wolny jest od większości wymienionych powyżej wad modelu O-GARCH. Podstawowa różnica względem modelu O-GARCH polega na tym, że macierz ładunków została pomnożona przez ortogonalną macierz o wyznaczniku 1 postaci

$$U = \prod_{i < j} G_{ij}(\theta_{ij}), \quad -\pi < \theta_{ij} < \pi, \quad i, j = 1, 2, \dots, k,$$

gdzie $G_{ij}(\theta_{ij})$ jest macierzą rotacji bazy kanonicznej przestrzeni R^k o kąt θ_{ij} , którego wartości estymowane są wraz z innymi parametrami modelu GO-GARCH. Dzięki tej modyfikacji macierz A nie musi spełniać warunku ortogonalności, a wystarczy, że będzie ona macierzą odwracalną. W modelu nie występują również trudności ze spełnieniem warunku dodatniej półokreśloności przez macierz korelacji. (por. [25]). Właśnie z tego też powodu model GO-GARCH może wykorzystywać wszystkie składowe, podczas gdy model O-GARCH da się zastosować jedynie dla kilku pierwszych składowych.

Trzeba zaznaczyć, że podejście zaproponowane przez van der Weide [25] również nie jest pozbawione wad. Zależność macierzy U od $k(k-1)/2$ parametrów uniemożliwia stosowanie modelu dla bardzo dużych wymiarów przestrzeni danych. Z tego powodu Boswijk i van der Weide [5] wprowadzają postać modelu GO-GARCH, w której macierz U jest wyznaczona w inny sposób. Autorzy stosują w tym celu regresję

macierzową, której parametry są szacowane za pomocą nieliniowej metody najmniejszych kwadratów.

Wymiar rozważanej w niniejszym artykule przestrzeni danych jest na tyle niewielki, że możemy zastosować wersję modelu GO-GARCH zaproponowaną przez van der Weide [25].

Estymacji parametrów modelu GO-GARCH dokonujemy za pomocą metody quasi największej wiarygodności. Jest to niewątpliwie jedna z najpopularniejszych metod estymacji wielowymiarowych modeli GARCH. Jej główną zaletą jest stosunkowo niewielka złożoność obliczeniowa pozwalająca uzyskać wyniki estymacji w stosunkowo krótkim czasie. Obecnie w kontekście wielowymiarowych modeli GARCH opracowywane są także metody bayesowskie, cechujące się znacznie większą pracochłonnością ale zarazem większą precyzją. Do kluczowych pozycji poruszających ten temat można by zaliczyć m.in. prace Della Corte i in. [6] i [7], a także artykuły polskich autorów, w szczególności prace Osiewalskiego [17] oraz Osiewalskiego i Pajor [18].

Ponieważ postać funkcji VIRF (Volatility Impulse Response Function) znana jest jedynie dla modeli BEKK, dlatego w celu określenia kierunków transmisji zmienności, po dokładnym zbadaniu własności otrzymanej za pomocą modelu GO-GARCH wariancji warunkowej dopasowujemy do niej model VAR, którego rząd został wybrany na podstawie kryterium informacyjnego Akaike, a następnie wyznaczamy standardowe funkcje odpowiedzi na impuls.

3. DANE

Model zmienności warunkowej zostanie dopasowany łącznie do stawki POLONIA oraz stóp procentowych WIBOR o okresie zapadalności od 1 tygodnia do 1 roku. Rozważanie terminów zapadalności dłuższych niż 1 rok dla polskiego rynku nie byłoby łatwe, gdyż instytucje bankowe pożyczają pieniądze i udzielają depozytów z reguły na krótsze okresy i stopy o terminie dłuższym niż rok nie są nawet oficjalnie notowane. Jednocześnie stopa WIBOR ON i WIBOR TN zostały wykluczone z badania, jako, że stopa depozytów jednodniowych jest już reprezentowana przez stawkę POLONIA. Notowania pochodzą z okresu 1 stycznia 2008 do 3 marca 2010, a więc od początku okresu w którym bank centralny rozpoczął kontrolę stawki POLONIA.

W pierwszej kolejności przeprowadzamy testy pierwiastka jednostkowego, aby sprawdzić czy możliwe jest modelowanie poziomów stóp. Wykorzystamy w tym celu rozszerzony test Dickeya-Fullera (por. [22]), test Phillipsa-Perrona [20] oraz dwa testy Elliotta-Rottenberga-Stocka [6]. Przedstawione w tabeli 1 wyniki testów pierwiastka jednostkowego jednoznacznie wskazują na niestacjonarność szeregów poziomów stóp WIBOR oraz stawki POLONIA (jedynie w przypadku tej ostatniej jeden test odrzucił hipotezę zerową mówiącą o tym, że szereg zawiera pierwiastek jednostkowy). W takiej sytuacji zdecydowaliśmy się na modelowanie przyrostów stóp. Ponadto przy estymacji modelu pewne utrudnienie stanowić może stosunkowo krótka próba licząca zaledwie 552 obserwacje.

Statystyki opisowe przyrostów poszczególnych stóp procentowych przedstawione są w tabeli 2, natomiast ich korelacje – w tabeli 3. Na rysunku 1 dodatkowo przedstawiamy poziomy badanych stóp procentowych w rozważanym okresie. Począwszy od początku IV kwartału 2008 roku obserwujemy pogłębiające się rozbieżności pomiędzy stopami o krótkim i długim terminie zapadalności. Różnice te ulegają stabilizacji około maja 2009 roku, a dopiero pod koniec badanego okresu ulegają one stopniowemu pomniejszeniu. Sytuacja ta jest efektem pogłębiającego się kryzysu finansowego w 2008, a przede wszystkim głośnego upadku banku Lehmann Brothers 15 października 2008, uważanego za największe bankructwo w historii USA. Był on główną przyczyną spadku zaufania na Polskim rynku międzybankowym. Można zauważyć że począwszy od tej daty następuje znaczący wzrost wariancji stawki POLONIA oraz obniżenie jej poziomu względem innych stóp. Zmienność stawki Polonia pozostaje szczególnie duża w okresie od 17 października 2008 do 20 lutego 2009, w którym Narodowy Bank Polski dostarczał bony pieniężne w ilości zaspokajającej popyt przechodząc tym samym na pasywne zarządzanie płynnością. Gdy 20 lutego 2009 bank centralny zdecydował się na ograniczenie podaży bonów zmienność stawki POLONIA uległa zmniejszeniu natomiast jeszcze bardziej wzrosła różnica pomiędzy poziomami stawki POLONIA a stopami o dłuższym terminie zapadalności (por. Raport NBP – Polska Wobec Światowego Kryzysu Gospodarczego [21]).

Wariancja przyrostów stóp WIBOR oscylująca w przedziale 0,0269 – 0,0433 jest kilkakrotnie mniejsza od wariancji stawki POLONIA. Tłumaczy to znacznie mniejszą korelację jaka występuje pomiędzy przyrostami stawki POLONIA i dowolnej ze stóp WIBOR od korelacji pomiędzy przyrostami poszczególnych stóp WIBOR.

Tabela 1.

Wyniki testów pierwiastka jednostkowego przeprowadzonych dla szeregów stawki POLONIA oraz stóp WIBOR o terminie zapadalności od 1 tygodnia do 1 roku

szereg	ADF (1984)	PP (1988)	DF-GLS (1996)	P (1996)
POLONIA	-2,8525 (>0,05)	-2,334 (>0,1)	-2,8469 (>0,05)	2,4441 (<0,025)
WIBOR SW	-0,85619 (>0,1)	-0,8956 (>0,1)	-0,89149 (>0,1)	16,798 (>0,1)
WIBOR 2W	-0,38442 (>0,9)	-0,1127 (>0,9)	-0,60421 (>0,1)	44,384 (>0,1)
WIBOR 1M	-0,51018 (>0,1)	-0,58453 (>0,1)	-0,6009 (>0,1)	38,138 (>0,1)
WIBOR 3M	-0,0001183 (>0,95)	-0,20525 (>0,9)	-0,22513 (>0,1)	53,436 (>0,1)
WIBOR 6M	0,044427 (>0,95)	-0,17882 (>0,9)	-0,36888 (>0,1)	54,862 (>0,1)
WIBOR 9M	0,11197 (>0,95)	-0,13810 (>0,9)	-0,38306 (>0,1)	53,452 (>0,1)
WIBOR 1Y	0,14846 (>0,95)	-0,11797 (>0,9)	-0,39658 (>0,1)	51,121 (>0,1)

Tabela 2.

Statystyki opisowe przyrostów stawki POLONIA i stóp WIBOR o terminie zapadalności od 1 tygodnia do 1 roku

	POLONIA	WIBOR SW	WIBOR 2W	WIBOR 1M
Średnia	-0,00397	-0,00151	-0,00341	-0,00174
Wariancja	0,12933	0,00743	0,00564	0,00245
minimum	-1,41000	-0,57000	-1,03000	-0,57000
maksimum	2,75000	1,14000	1,04000	0,83000
Skośność	1,77658	2,39933	-0,39639	5,43514
Kurtoza	10,93785	66,07094	133,11847	178,07916
	WIBOR 3M	WIBOR 6M	WIBOR 9M	WIBOR 1Y
Średnia	-0,00209	-0,00278	-0,00299	-0,00316
Wariancja	0,00113	0,00104	0,00101	0,00104
minimum	-0,51000	-0,51000	-0,51000	-0,51000
maksimum	0,31000	0,21000	0,09000	0,08000
Skośność	-5,64161	-7,83789	-9,42814	-9,27541
Kurtoza	111,22378	122,88294	137,33053	131,26503

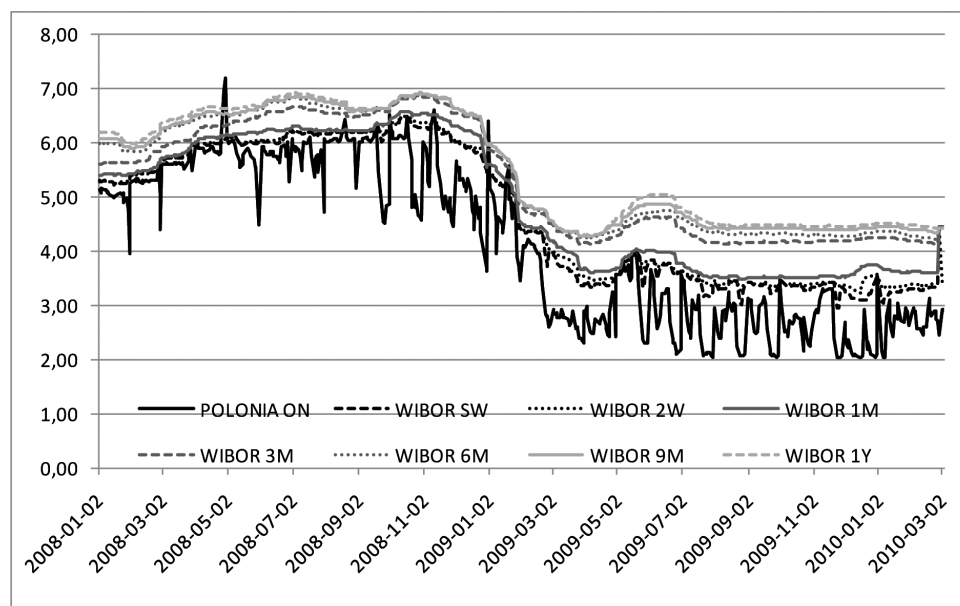
Tabela 3.

Korelacja przyrostów stawki POLONIA i stóp WIBOR o terminie zapadalności od 1 tygodnia do 1 roku

	POLONIA	SW	2W	1M	3M	6M	9M	1Y
POLONIA	1	0,385	0,3405	0,3405	0,3405	0,3409	0,3397	0,3425
SW		1	0,9431	0,951	0,9315	0,9274	0,9223	0,918
2W			1	0,9435	0,921	0,9157	0,9101	0,9052
1M				1	0,9905	0,9875	0,9839	0,9807
3M					1	0,9976	0,9966	0,995
6M						1	0,9982	0,997
9M							1	0,9988
1Y								1

4. ANALIZA GŁÓWNYCH SKŁADOWYCH STRUKTURY TERMINOWEJ, ESTYMACJA MODELU GO-GARCH

W tabeli 4. przedstawiamy wyniki analizy głównych składowych przeprowadzonej dla przyrostów stawki POLONIA oraz stóp WIBOR na bazie macierzy korelacji. Zastosowanie macierzy kowariancji, której już bardzo niewielka liczba składowych może opisać przeszło 90% wariancji przestrzeni danych w tym przypadku nie było wskaza-



Rysunek 1. Poziomy stawki POLONIA oraz stóp procentowych WIBOR o terminie zapadalności od jednego tygodnia do jednego roku z okresu 01.08.2008 – 03.03.2010

Tabela 4.

Wartości własne składowych przyrostów stawki POLONIA oraz stóp WIBOR z okresem zapadalności od 1 tygodnia do 1 roku oraz udział składowych w opisie wariancji

składowa	wartość własna	udział w opisie wariancji	Skumulowany udział w opisie wariancji
1	5,0994	0,63743	0,63743
2	1,2596	0,15745	0,79488
3	0,95644	0,11956	0,91444
4	0,28091	0,035113	0,94955
5	0,22984	0,028729	0,97828
6	0,076370	0,0095463	0,98783
7	0,064523	0,0080654	0,99589
8	0,032873	0,0041092	1,0000

ne. Przeprowadzona w ten sposób analiza głównych składowych prowadzi do sytuacji, w której zmienne o największej wariancji mają największy wpływ na wynik (por. [2]). W praktyce wariancja warunkowa szeregów o największej wariancji zostanie zawyżona, a szeregów o najmniejszej zaniżona. Zastosowanie tej metody jest więc wskazane tylko wtedy, gdy poszczególne zmienne mają zbliżoną wariancję, natomiast wariancje

badanych przez nas szeregów są bardzo zróżnicowane, o czym wspomnieliśmy już wcześniej.

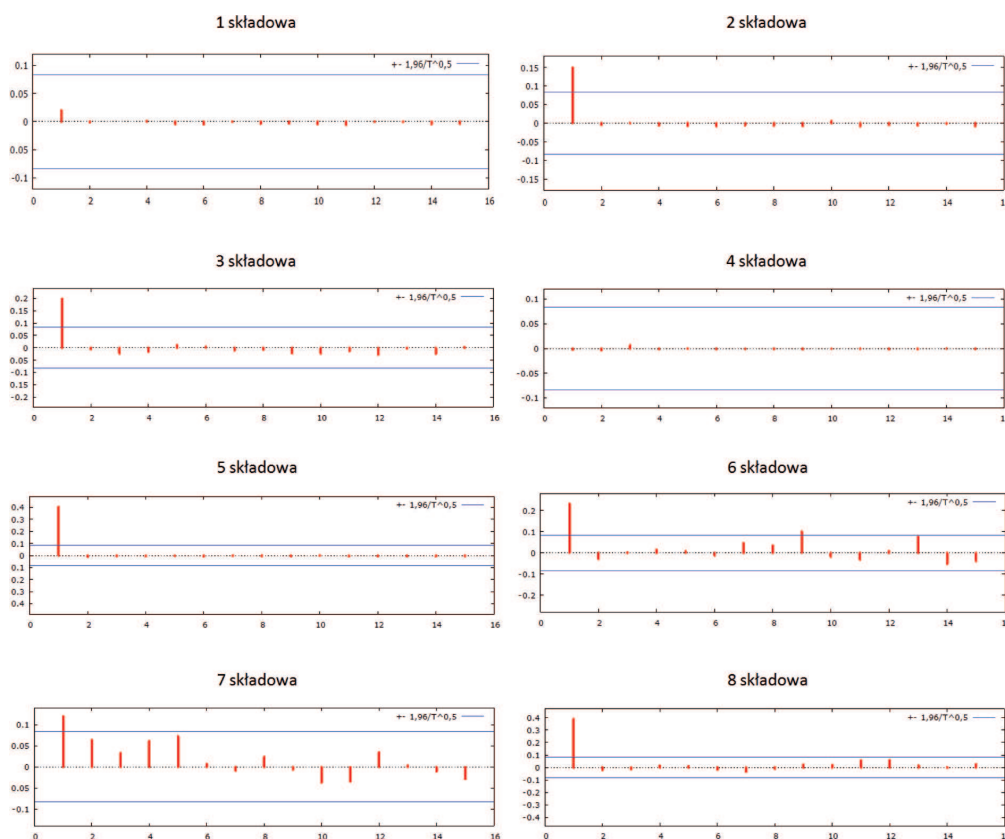
W przypadku naszej przestrzeni danych już 3 pierwsze składowe opisują przeszło 91% wariancji, co sugeruje że zastosowanie modelu O-GARCH dla trzech pierwszych składowych mogłoby dać zadowalające wyniki. Model GO-GARCH posiada jednak lepsze własności statystyczne a dodatkowo pozwala na wykorzystanie wszystkich składowych a więc w istocie pozwala na opis całej wariancji badanych szeregów. Przeprowadzając modelowanie nowej przestrzeni danych w celu możliwie dobrego dopasowania modelu GO-GARCH wpierw badamy własności poszczególnych składowych.

Tabela 5.
Wyniki testu Engle'a przeprowadzonego dla poszczególnych składowych. Wartości statystyk (p -wartości)

składowa	maks. opóźnienie = 2	maks. opóźnienie = 5	maks. opóźnienie = 10	maks. opóźnienie = 15
1	0,219285 (0,89615)	0,230759 (0,99875)	0,27178 (1)	0,312632 (1)
2	12,6011 (0,00184)	12,7498 (0,02584)	13,0928 (0,21853)	13,4874 (0,5647)
3	22,9003 (1,06E-5)	23,255 (0,000302)	23,9123 (0,00784)	25,2597 (0,04656)
4	0,0102956 (0,99487)	1,17164 (0,94757)	1,6046 (0,99857)	1,77308 (0,99999)
5	111,348 (6,62E-25)	118,756 (5,76E-24)	118,287 (1,13E-20)	117,972 (4,68E-18)
6	33,8969 (4,36E-8)	34,2548 (2,12E-6)	44,1408 (3,11E-6)	52,247 (5,14E-6)
7	9,36521 (0,00926)	12,8594 (0,02473)	14,4995 (0,1514)	16,6644 (0,33932)
8	102,285 (6,15E-23)	105,825 (3,12E-21)	105,484 (4,33E-18)	107,527 (4,8E-16)

Zarówno test Engle'a jak i analiza autokorelogramów wyznaczonych dla kwadratów poszczególnych składowych sugeruje, że zależności istnieją jedynie dla bardzo małych opóźnień. Obserwujemy, że jeśli odrzucenie hipotezy zerowej występuje dla testu Engle'a z maksymalnym opóźnieniem wyższym niż 2, to jest ono znacznie słabsze niż w przypadku testu z niższą wartością maksymalnego opóźnienia. Przedstawione na rysunku 2 autokorelogramy pokazują, że w przypadku szeregu pierwszej i czwartej składowej nie istnieje istotna autokorelacja dla kwadratów poszczególnych wyrazów szeregu, natomiast dla pozostałych składowych istnieje ona wyłącznie dla opóźnienia 1. W takiej sytuacji jedynym rozwiązaniem wydaje się wykorzystanie do opisu wariancji warunkowej poszczególnych składowych modeli ARCH(1). Krótkookresowość zależności kwadratowych w szeregach przyrostów stóp procentowych rynku międzybankowego nie jest zaskoczeniem. W niektórych pozycjach, takich jak artykuł Vili Wetherilt [23], w których badano międzybankowe stopy procentowe przed wybuchem światowego kryzysu gospodarczego, testy statystyczne wykazały brak efektu ARCH w modelowanych stopach LIBOR wobec czego zdecydowano się do ich opisu zastosować modele oparte jedynie na zależnościach liniowych.

W tabeli 6. Przedstawione są oszacowania parametrów α_1 dla poszczególnych składowych, wraz z błędem standardowym i p -wartościami t statystyki. Duże błędy



Rysunek 2. Autokorelacje wyznaczone dla szeregów kwadratów poszczególnych składowych

standardowe niektórych parametrów są konsekwencją wspomnianej krótkookresowości zależności kwadratowych w poszczególnych składowych lub w przypadku niektórych składowych nawet ich braku. Inną przyczyną stosunkowo dużych błędów standardowych parametrów może być stosunkowo krótka próba licząca zaledwie 552 obserwacje. Pomimo to dopasowanie modelu GO-GARCH można uznać za zadowalające. Statystyczna nieistotność parametru α_1 dla czwartej składowej uzasadniony jest całkowitym brakiem autokorelacji w kwadratach (rys. 2).

Do uzyskanych za pomocą modelu GO-GARCH wariancji warunkowych poszczególnych stóp dopasowujemy model wektorowej autoregresji, by w dalszej kolejności wyznaczyć funkcje odpowiedzi na impuls. Wcześniej konieczne jest sprawdzenie, czy uzyskane szeregi wariancji warunkowej nie posiadają pierwiastka jednostkowego. Wykorzystamy w tym celu testy, które wcześniej zastosowaliśmy do weryfikacji występowania pierwiastków jednostkowych w szeregach poziomów stawki POLONIA oraz stóp WIBOR. Wyniki przedstawiamy w tabeli 7. Testy jednoznacznie odrzuciły hipotezę zerową mówiącą o pierwiastku jednostkowym w szeregach wariancji warunkowej, wobec tego do ich opisu możemy zastosować model VAR.

Tabela 6.

Oszacowania parametrów α_1 w modelach ARCH dla poszczególnych składowych

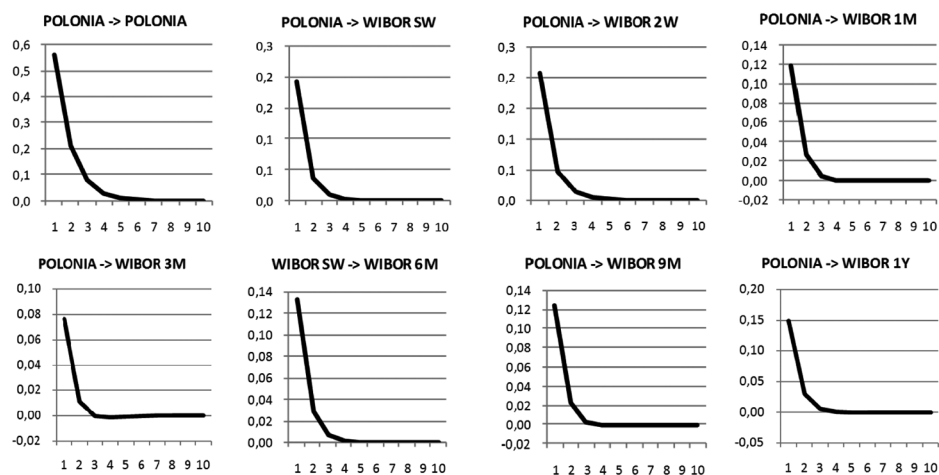
	oszacowanie	błąd standardowy	<i>p</i> -wartość
α_1 (1 składowa)	0,417867	0,16578	0,0120
α_2 (2 składowa)	0,388546	0,20811	0,0625
α_3 (3 składowa)	0,442321	0,11930	0,0002
α_4 (4 składowa)	0,017161	0,077518	0,8249
α_5 (5 składowa)	0,908392	0,015910	0,0000
α_6 (6 składowa)	0,393851	0,27962	0,1596
α_7 (7 składowa)	0,308048	0,11264	0,0065
α_8 (8 składowa)	0,252856	0,11464	0,0279

Tabela 7.

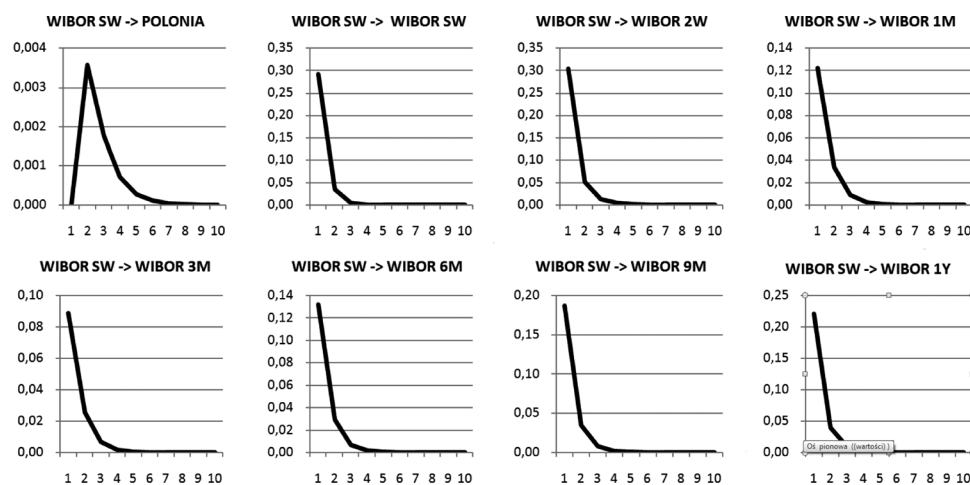
Wyniki testów pierwiastka jednostkowego przeprowadzonych dla wyznaczonych za pomocą modelu GO-GARCH szeregów wariancji warunkowych stawki POLONIA oraz stóp WIBOR o terminie zapadalności od 1 tygodnia do 1 roku

szereg	ADF (1984)	PP (1988)	DF-GLS (1996)	P (1996)
POLONIA	-22,6391 (<0,01)	-22,8174 (<0,01)	-22,6597 (<0,01)	0,323294 (<0,01)
WIBOR SW	-21,9843 (<0,01)	-22,1707 (<0,01)	-22,0043 (<0,01)	0,334637 (<0,01)
WIBOR 2W	-22,3909 (<0,01)	-22,4306 (<0,01)	-22,4113 (<0,01)	0,301483 (<0,01)
WIBOR 1M	-20,3203 (<0,01)	-20,5108 (<0,01)	-20,3389 (<0,01)	0,275716 (<0,01)
WIBOR 3M	-22,4185 (<0,01)	-22,627 (<0,01)	22,4389 (<0,01)	0,314431 (<0,01)
WIBOR 6M	-22,157 (<0,01)	-22,3678 (<0,01)	-22,1772 (<0,01)	0,309381 (<0,01)
WIBOR 9M	0,11197 (<0,01)	-0,13810 (<0,01)	-0,38306 (<0,01)	53,452 (<0,01)
WIBOR 1Y	0,14846 (<0,01)	-0,11797 (<0,01)	-0,39658 (<0,01)	51,121 (<0,01)

Na rysunkach 3 i 4 przedstawiamy wykresy odpowiedzi na impuls otrzymane za pomocą modelu VAR(1) dopasowanego do wariancji warunkowych stawki POLONIA oraz stóp WIBOR o terminie zapadalności od 1 tygodnia do 1 roku. Ponieważ na wyniki tej analizy duży wpływ ma uszeregowanie zmiennych w modelu, więc uszeregowaliśmy stopy według terminów zapadalności: od najkrótszego do najdłuższego. Zakładamy bowiem, że wariancja stóp krótkoterminowych wpływa na wariancję stóp długoterminowych, a nie odwrotnie. Na rysunku 3 i 4 widzimy, że zmienność stawki POLONIA wpływa na zmienności pozostałych stóp ze zbliżoną siłą co stopa WIBOR SW. Zmienność stopy WIBOR SW nie wywiera jednak prawie żadnego wpływu na zmienność stawki POLONIA. Z tego względu przejście z kształtowania stopy WIBOR SW na stawkę POLONIA wydaje się być tym bardziej uzasadnione.



Rysunek 3. Odpowiedzi na jednostkowy impuls zmienności stawki POLONIA



Rysunek 4. Odpowiedzi na jednostkowy impuls zmienności stopy WIBOR SW

5. ZAKOŃCZENIE

Celem przeprowadzonych badań było określenie kierunków przenoszenia się impulsów pomiędzy zmiennościami stawki POLONIA oraz stóp WIBOR. Analiza wykresów odpowiedzi na impuls prowadzi do jednoznacznych wniosków. Reakcja zmienności stóp WIBOR na jednostkowe zaburzenie zmienności stawki POLONIA oraz WIBOR SW jest silna i natychmiastowa, natomiast zmienność stawki POLONIA nie reaguje w ogóle na zmienność stopy WIBOR SW. Oznacza to, że banki komercyjne podając kwotowania stóp WIBOR w ogromnym stopniu kierują się zachowaniem stawki POLONIA – stopy stanowiących zdecydowanie największą część rynku depozytów

jednodniowych, natomiast rynek międzybankowych depozytów jednodniowych nie reaguje na publikacje stawek WIBOR SW wcale, lub co najwyżej w stopniu pomijalnie małym. Warto podkreślić, że znaczenie stawki POLONIA wobec narastającego kryzysu zaufania stało się jeszcze większe. Strach przed niewypłacalnością kontrahenta oraz niemożnością uzyskania odpowiedniej pozycji płynnościowej doprowadził do niemal całkowitego zamarcia międzybankowego rynku depozytów o terminie zapadalności dłuższym niż jeden dzień. W efekcie tego jedyną stawką odzwierciedlającą rynkową cenę pieniądza stała się stawka POLONIA, wobec czego banki komercyjne podając na fixingu kwotowania stóp WIBOR mogły się kierować wyłącznie tą stawką.

Poznanie zależności występujących pomiędzy stopami procentowymi rynku międzybankowego pozwala na lepsze zrozumienie występujących na nim zależności oraz wyciągnięcie wniosków na temat jego kondycji. Nie sposób w tym miejscu nie wspomnieć o innym kierunku badań jakim jest wyznaczanie krzywych dochodowości, a więc funkcji opisujących zależności pomiędzy poziomem stóp procentowych a ich czasem zapadalnością. Kształt krzywej odzwierciedla oczekiwania rynku co do przyszłych zmian stóp procentowych, a banki centralne wykorzystują ją do kontrolowania inflacji. Porównanie krzywych wyznaczonych na podstawie papierów dłużnych z krzywymi stóp rynku międzybankowego może posłużyć ocenie skali obecnego na tym rynku ryzyka kredytowego. Z punktu widzenia wydarzeń ostatnich lat analiza taka mogłaby ona posłużyć m.in. do określenia momentu transmisji kryzysu zaufania na poszczególne rynki międzybankowe lub wpływu poszczególnych impulsów na poziom zaufania na tych rynkach.

Agata Kliber, Paweł Kliber – *Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu*,
Piotr Płuciennik – *Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu*

LITERATURA

- [1] Alexander C.O., (2000), Orthogonal Methods for generationg Large Positive Semidefinite Covariance Matrices, ISMA *Centre Discussion Papers in Finance 2000-06*, University of Reading, UK.
- [2] Alexander C.O., (2001), Orthogonal GARCH in C.O. Alexander (ed.) *Mastering Risk*, 2, Financial Times Prentice Hall.
- [3] Alexander C.O., Chibumba A., (1996), Multivariate orthogonal factor GARCH, *University of Sussex Discussion Paper in Mathematics*.
- [4] Avouyi-Dovi S., Jondeau E., (1999), *Interest Rate Transmission and Volatility Transmission along the Yield Curve*, Janvier 1999 NER, 57.
- [5] Boswijk H., van der Weide R., (2006), *Wake me up before you GO-GARCH*, UvA-Econometrics Discussion Paper 2006/03.
- [6] Della Corte P., Sarno L., Thornton D.L., (2008), The Expectation Hypothesis of the Term Structure of very Short-Term Rates: Statistical Tests and Economic Value, *Journal of Financial Economics*, 89, s. 158-174.
- [7] Della Corte P., Sarno L., Thornton D.L., (2009), *Correlation Timing in Asset Allocation with Bayesian Learning*, Working Paper.

- [8] Elliott G., Rothenberg T.J., Stock J.H., (1996), Efficient Tests for Autoregressive Unit Roots, *Econometrica* 64(4), s. 813-836.
- [9] Engle R., (1982), Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, 50, s.987-1007.
- [10] Engle R., (2002), Dynamic Conditional Correlation – a simple class of Multivariate GARCH models, *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, s. 339-350.
- [11] Engle R., Kroner F., (1995), Multivariate simultaneous generalized ARCH, *Econometric Theory*, 11, s. 122-150.
- [12] Haffner C.M., Herwartz H., (1998), Volatility Impulse Response Functions for Multivariate GARCH Models, *Core Discussion Paper* 9847.
- [13] Hassler U., Nautz D., (2008), On the Persistence of the Eonia Spread, *Economics Letters*, 101, s. 184-187.
- [14] Klaassen F., (2000), Have Exchange Rates Become More Closely Tied? Evidence from a new Multivariate GARCH model, *Centre for Economic Research discussion paper*, University of Tilburg.
- [15] Laurent S., (2009), *GARCH 6, Estimating and Forecasting ARCH Models*, London: Timberlake Consultants Press.
- [16] Nautz D., Offermanns C.J., (2007), *The Dynamic Relationship Between the Euro Overnight Rate, the ECB's Policy Rate and the Term Spread*, Discussion Paper Series 1: Economic Studies 2006, 01, Deutsche Bundesbank, Research Centre.
- [17] Osiewalski J., (2009), New Hybrid Models of Multivariate Volatility (a Bayesian Perspective) *Przegląd Statystyczny*, 56, s. 15-22.
- [18] Osiewalski J., Pajor A., (2009), Bayesian Analysis for Hybrid MSF-SBEKK Models of Multivariate Volatility, *Central European Journal of Econometrics* 2009 (2) s. 179-202.
- [19] Pérez Quirós G., Rodríguez Mendizábal H., (2006), The Daily Market for Funds in Europe: What Has Changed with the EMU? *Journal of Money, Credit and Banking*, 38 (1), s. 91-118.
- [20] Phillips P.C.B., Perron P., (1988), Testing for a Unit Root in Time Series Regressions, *Biometrika*, 75, s. 335-346.
- [21] Raport NBP – *Polska wobec światowego kryzysu gospodarczego*, www.nbp.pl, pobrano 30.09.2009.
- [22] Said E., Dickey D.A., (1984), Testing for Unit Roots in Autoregressive Moving Average Models of Unknown Order, *Biometrika*, 71, s. 599-607.
- [23] Vila Wetherilt A., (2002), Money Market Operations and Volatility of UK Money Market Rates, *Bank of England Quarterly Bulletin*, Winter.
- [24] Vojtek M., (2003), Calibration of interest rate models – transition markets case, *CERGE-EI Discussion Paper Series*.
- [25] van der Weide R., (2002), GO-GARCH: A Multivariate Generalized Orthogonal GARCH Model, *Journal of Applied Econometrics*, 17, s. 549-564.

ZALEŻNOŚCI POMIĘDZY STOPAMI PROCENTOWYMI RYNKU MIĘDZYBANKOWEGO W POLSCE

Streszczenie

W artykule badamy kierunki przenoszenia się zmienności pomiędzy stawką POLONIA oraz stopami procentowymi rynku międzybankowego o dłuższym czasie zapadalności. Szczególny nacisk został położony na określenie siły impulsów wysyłanych przez stawkę POLONIA oraz stopę WIBOR SW. Ta pierwsza jest stopą kontrolowaną przez Narodowy Bank Polski począwszy od 2008 roku, natomiast na drugą była nią wcześniej. Ponieważ warunkowa zmienność stóp procentowych jest nieobserwowalna, a brak dostępności danych śróddziennych uniemożliwia szacowania zmienności zrealizowanej, wyznaczamy zmienność

warunkową wykorzystując w tym celu wprowadzony przez Van der Weide [25] model GO-GARCH. Do identyfikacji impulsów w szeregach wariancji warunkowej wykorzystaliśmy model VAR.

Słowa kluczowe: Analiza głównych składowych, funkcja odpowiedzi na impuls, wielowymiarowe modele zmienności warunkowej, struktura terminowa

INTERDEPENDENCES BETWEEN INTEREST RATES ON THE POLISH INTERBANK MARKET

A b s t r a c t

In the article we verify the direction of impulse response between volatility of POLONIA rate and interbank interest rates. The authors concentrate especially on the power of POLONIA and WIBOR SW volatility impulses. POLONIA rate is controlled by Polish Central Bank since the beginning of 2008. As the conditional volatility of interest rates is unobservable, and the absence of intraday quotations prevent from estimation of realized volatility, we determine volatility using the GO-GARCH model introduced by Van der Weide in [25]. To identify impulses in variance series we use VAR model.

Key words: principal component analysis, impulse response function, multidimensional models of conditional variance, term structure of interest rates

ANNA BŁACZKOWSKA, ALICJA GRZEŚKOWIAK, ANNA KRÓL, AGNIESZKA STANIMIR

WYKORZYSTANIE ANALIZY KORESPONDENCJI W BADANIU
CZYNNIKÓW RÓŻNICUJĄCYCH WYNIKI Z DWÓCH CZĘŚCI
EGZAMINU GIMNAZJALNEGO UZYSKANYCH PRZEZ UCZNIÓW
Z RÓŻNYCH OBSZARÓW TERYTORIALNYCH¹

1. POLSKI SYSTEM EDUKACJI I JEGO REFORMA

Celem badań przeprowadzonych w ramach prezentowanego artykułu jest wskazanie analizy korespondencji jako metody niezwykle użytecznej w rozpoznawaniu współwystąpień kategorii zmiennych wyróżnionych w trakcie egzaminu gimnazjalnego. Wskazanie powiązań między kategoriami zróżnicowanych zmiennych pozwoli na dalszą modernizację systemu edukacji, tak by dostęp do wiedzy nie był ograniczany.

System edukacji w Polsce poddano radykalnej reformie, którą zapoczątkowano w 1999 r. Jej celem było podniesienie jakości kształcenia oraz dopasowanie systemu edukacji do wymagań gospodarki opartej na wiedzy. Reforma ta miała również wspomóc rozwój programów propagujących kształcenie przez całe życie. Jednym z najważniejszych rozwiązań proponowanych w reformie szkolnictwa było wprowadzenie nowej struktury szkolnictwa (od poziomu przedszkolnego do studiów doktoranckich) oraz zmiana dotychczasowego systemu egzaminacyjnego. Reforma dotyczyła również kwestii kształcenia i podnoszenia kwalifikacji nauczycieli oraz systemu finansowania i zarządzania.

Rozpoczęcie reformy systemu edukacji w Polsce zbiegło się w czasie z próbnym (eksperymentalnym) badaniem PISA (OECD Programme for International Student Assessment). Badanie to ma na celu sprawdzenie wiedzy i umiejętności 15-latków w krajach stowarzyszonych. W 2000 r. przeprowadzono pierwsze badanie PISA z udziałem polskich uczniów, którzy jako ostatni zakończyli naukę w starym systemie.

W przeprowadzonej analizie wzięto pod uwagę wyniki osiągnięte przez uczniów z egzaminu gimnazjalnego. Egzamin ten wprowadzono w trakcie reformy systemu edukacji. Ten sprawdzian wiedzy uczniów jest formą egzaminu zewnętrznego, który ma na celu przestrzeganie wystandaryzowanych procedur, zapewnienie porównywalności wyników, przestrzeganie anonimowości uczniów. Nie ma on być traktowany jako

¹ Artykuł napisany w ramach grantu MNiSW nt. Metody wielowymiarowej analizy statystycznej i modelowania danych jakościowych w ocenie wiedzy i umiejętności uczniów gimnazjum (nr N N111 279038).

kryterium do kontynuowania dalszej nauki, ale jedynie ma być informacją dla ucznia o poziomie jego wiedzy. Egzamin ten jest jednak powszechny i obowiązkowy.

Prace badawcze wykonane w ramach przedstawianego artykułu, są częścią realizacji unikatowego projektu badawczego finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego². Z uwagi na zastosowane metody badawcze i realizację celów naukowych i aplikacyjnych projekt ma charakter niepowtarzalny, gdyż analiza wyników egzaminacyjnych gimnazjalistów nie była jeszcze prowadzona na tak szeroką skalę. Zastosowanie analizy korespondencji do oceny prezentowanych w artykule danych nie jest postępowaniem powszechnym, najczęściej analiza sprowadzana jest do wyznaczenia podstawowych jednowymiarowych wskaźników statystycznych.

2. ZAKRES BADANIA

Dysponowano wynikami Centralnej Komisji Egzaminacyjnej dla poszczególnych uczniów w województwach opolskim i dolnośląskim z podziałem na szkoły, gminy, płeć oraz tematyczne obszary egzaminacyjne w zakresach przedmiotów matematyczno-przyrodniczych i humanistycznych z lat 2003-2010.

Egzamin w zakresie nauk humanistycznych obejmuje takie przedmioty jak: język polski, historia, wiedza o społeczeństwie, plastyka i muzyka. Obszary egzaminacyjne w tej części egzaminu to:

- czytanie i odbiór tekstów kultury;
- tworzenie własnego tekstu.

Egzamin w zakresie nauk matematyczno-przyrodniczych obejmuje takie przedmioty jak: matematyka, fizyka, astronomia, chemia, biologia i geografia. Obszary egzaminacyjne w tej części egzaminu to:

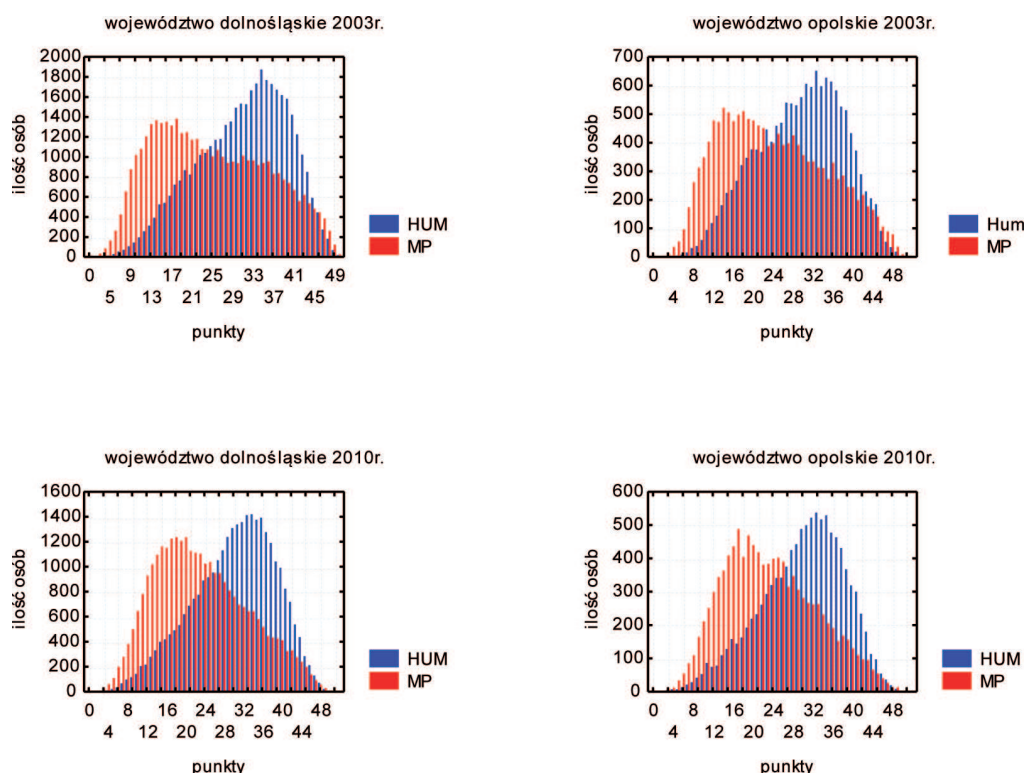
- umiejętne stosowanie terminów, pojęć i procedur z zakresu przedmiotów matematyczno-przyrodniczych niezbędnych w praktyce życiowej i dalszym kształceniu;
- wyszukiwanie i stosowanie informacji;
- wskazywanie i opisywanie faktów, związków i zależności w szczególności przyczynowo-skutkowych, funkcjonalnych, przestrzennych i czasowych;
- stosowanie zintegrowanej wiedzy i umiejętności do rozwiązywania problemów.

Większość przedstawionych powyżej zmiennych zmierzono na skali nominalnej. Wyniki uzyskane przez uczniów w poszczególnych obszarach zakresów egzaminacyjnych przekształcono na pomiar na skali porządkowej, której budowa jest bardzo zbliżona do skali nominalnej. Taki zestaw zmiennych pozwolił na zastosowanie wielowymiarowej analizy korespondencji (wykorzystano macierz Burta oraz wielowymiarową tablicę kontyngencji).

Wyniki egzaminu gimnazjalnego uczniów z obszaru Dolnego Śląska posłużyły autorkom do przygotowania artykułu pt. „Comparative analysis of the competences

² Grant nr NN 111 279038 pt. Metody wielowymiarowej analizy statystycznej i modelowania danych jakościowych w ocenie wiedzy i umiejętności uczniów gimnazjum.

of gymnasium students in Lower Silesia districts”³. W trakcie przeprowadzonych tam klasyfikacji hierarchicznych uzyskano podział powiatów na cztery klasy, w których gimnazjaliści osiągnęli wyniki niskie, umiarkowane, dobre i bardzo wysokie. Na tej podstawie postanowiono wprowadzić taki sam podział uzyskiwanych przez uczniów wyników, czyli w skali czterostopniowej. Możliwą do osiągnięcia maksymalną sumę punktów podzielono na cztery rozłączne klasy i przyporządkowano do nich wyniki uczniów. Na rys. 1 zaprezentowano rozkład osiągniętych wyników w obydwu częściach egzaminu w latach 2003 i 2010 w województwach dolnośląskim i opolskim.



Rysunek 1. Rozkład osiągniętych wyników egzaminacyjnych z części humanistycznej (HUM) i matematyczno-przyrodniczej (MP) w badanych populacjach w latach 2003 i 2010.

Źródło: opracowanie własne.

Zgodnie z rozkładami wyników egzaminacyjnych należy stwierdzić, że sytuacja w obydwu województwach w rozpatrywanych obszarach egzaminu nie zmienia się w czasie. W przypadku wyników z części humanistycznej mamy do czynienia z asymetrią lewostronną, natomiast dla części matematyczno-przyrodniczej prawostronną. Analizując wykresy na rys.1 zasadne wydaje się pytanie, czy wyniki analizy korespondencji

³ Artykuł złożony do druku w *Pracach Naukowych Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu* pt. *Theory and Applications of Quantitative Methods* [1].

przeprowadzone na podstawie wyników przydzielonych do czterech klas oddają rzeczywistą sytuację w badanych populacjach. Z tego względu przeprowadzono analizę dzieląc badaną populację, a nie jak poprzednio wyniki, na pięć klas uwzględniając uszeregowanie względem osiąganych wyników (wyniki: bardzo wysokie – A, wysokie – B, średnie – C, niskie – D, bardzo niskie – E)⁴. Przynależność wyników do kolejnych klas wykonano dzieląc uszeregowane od najwyższego do najniższego wyniku egzaminu na 5 równolicznych części.

Analizę przeprowadzono dla trzech porównań regionalnych:

- porównanie ogólnych wyników (dla części humanistycznej i matematyczno-przyrodniczej) osiąganych w gminach z województw dolnośląskiego i opolskiego (dane z 2010 r.);
- jednoczesna analiza ogólnych wyników egzaminu w obydwu województwach (dane z 2010 r.);
- porównanie w czasie wyników egzaminów na Dolnym Śląsku i w województwie opolskim (lata 2003 i 2010).

3. METODOLOGIA BADANIA⁵

W prowadzonym badaniu wykorzystano różne odmiany analizy korespondencji.

W klasycznej analizie korespondencji, która jest podstawą przeprowadzania jej modyfikacji, niezbędne jest zbudowanie tablicy kontyngencji:

$$\mathbf{N} = \{n_{ij}\} \quad (1)$$

gdzie:

– n_{ij} to zaobserwowana liczba jednoczesnych wystąpień i -tej kategorii cechy A

oraz j -tej kategorii cechy B , a $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c n_{ij} = n$;

– n to liczebność badanych obiektów.

Analiza korespondencji ma na celu zaprezentowanie jednoczesnych wystąpień kategorii dwóch cech w przestrzeni o niskim wymiarze. Optymalne rozwiązanie tego problemu można osiągnąć wyznaczając współrzędne rzutowania na podstawie dekompozycji macierzy $(\mathbf{P} - \mathbf{r}\mathbf{c}^T)$ według wartości osobliwych. W tym celu należy wyznaczyć macierz standaryzowanych różnic:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}_r^{-1/2} (\mathbf{P} - \mathbf{r}\mathbf{c}^T) \mathbf{D}_c^{-1/2}, \quad (2)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Gamma}\mathbf{V}^T, \quad (3)$$

⁴ W celu usprawnienia opisu wyników przeprowadzonych analiz, w dalszej części artykułu używane jest określenie skala 4 stopniowa wyznaczona na podstawie osiąganych wyników lub 5 stopniowa wyznaczona na podstawie liczebności populacji badanej.

⁵ Ideę analizy korespondencji i jej techniczne aspekty opisuje A. Stanimir [4].

gdzie:

- $\mathbf{P} = \left\{ \frac{n_{ij}}{n} \right\}$, jest to tzw. macierz korespondencji;
- $\mathbf{r} = \{p_{i\bullet}\} = \left\{ \frac{n_{i\bullet}}{n} \right\} = \left\{ \sum_{j=1}^c \frac{n_{ij}}{n} \right\}$ to wektor częstości brzegowych wierszy;
- $\mathbf{c} = \{p_{\bullet j}\} = \left\{ \frac{n_{\bullet j}}{n} \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^r \frac{n_{ij}}{n} \right\}$ to wektor częstości brzegowych kolumn;
- $n_{i\bullet}$ to liczebności brzegowe wierszy, $n_{\bullet j}$ to liczebności brzegowe kolumn;
- $\mathbf{D}_r = \{p_{i\bullet}\}$ to diagonalna macierz częstości brzegowych wierszy;
- $\mathbf{D}_c = \{p_{\bullet j}\}$ to diagonalna macierz częstości brzegowych kolumn;
- Γ to macierz diagonalna $(k \cdot k)$ niezerowych wartości osobliwych γ_k ($k = 1, \dots, K$) macierzy $\mathbf{A}$, ułożonych w porządku nierosnącym, K jest rzędem macierzy $\mathbf{A}$ oraz $K \leq \min(r; c)$;
- $\mathbf{U}$ to macierz $(r \cdot k)$ lewych wektorów osobliwych;
- $\mathbf{V}$ to macierz $(c \cdot k)$ prawych wektorów osobliwych.

Wektory macierzy $\mathbf{U}$ są nazywane głównymi osiami rzutowania kategorii zapisanych w kolumnach, a wektory macierzy $\mathbf{V}$ to osie główne wierszy.

Współrzędne kategorii obydwu cech są obliczane następująco:

$$\text{– cecha A} \quad \mathbf{F} = \mathbf{D}_r^{-1/2} \mathbf{U} \Gamma, \quad (4)$$

$$\text{– cecha B} \quad \mathbf{G} = \mathbf{D}_c^{-1/2} \mathbf{V} \Gamma. \quad (5)$$

Pierwsze kolumny macierzy $\mathbf{F}$ i $\mathbf{G}$ zawierają, odpowiednio, współrzędne wierszy i kolumn na pierwszej osi głównej. Drugie kolumny zawierają współrzędne na drugiej osi głównej itd.

Dla macierzy $\mathbf{A}$ oraz Γ można zapisać zależność:

$$\text{tr} \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \text{tr} \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \text{tr} \Lambda = \frac{\chi^2}{n} = \lambda = \sum_{k=1}^K \gamma_k^2, \quad (6)$$

gdzie:

- χ^2 jest wartością statystyki χ^2 dla zadanej macierzy kontyngencji o $(r-1)(c-1)$ stopniach swobody;
- γ_k to k -ta wartość osobliwa macierzy $\mathbf{A}$;
- $\lambda_k = \gamma_k^2$ ($\Lambda = \Gamma^2$) to wartości własne macierzy $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ oraz $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$;
- λ to inercja całkowita, $\lambda = \sum_{k=1}^K \lambda_k$.

Bardzo ważnym pojęciem w całej analizie korespondencji jest *inercja całkowita* λ . Wartość ta jest sumą wszystkich wyznaczonych, podczas dekompozycji macierzy $\mathbf{A}$, wartości własnych (*inercje główne*) i jest interpretowana jako miara zależności między

cechami. Greenacre [2] stwierdził, że inercja całkowita jest miarą wariancji elementów w tabeli lub miarą rozproszenia punktów w rzeczywistej przestrzeni rzutowania.

Rzeczywista przestrzeń prezentacji punktów obrazujących kategorie cech jest o wymiarze $K = \min(r - 1; c - 1)$. Wymiar ten jest jednak najczęściej bardzo wysoki, a największa część informacji (procent inercji całkowitej, jaki stanowią inercje główne) jest zawarty w przestrzeni najwyżej trójwymiarowej.

Punktem wyjścia w analizie korespondencji wielu zmiennych jest złożona macierz znaczników. Jest to macierz o wymiarach $n \cdot r$, gdzie n jest liczbą obiektów, r jest to liczba kategorii cech; każdy wiersz tej macierzy zawiera tylko zera i jedną jedynkę w miejscu oznaczającym wybór określonej kategorii. Złożona macierz znaczników $\mathbf{Z}$ składa się z bloków (podmacierzy) odpowiadających kolejnym zmiennym:

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{Z}_1 \dots \mathbf{Z}_Q], \quad (7)$$

gdzie $\mathbf{Z}_1 \dots \mathbf{Z}_Q$ to macierze znaczników kolejnych cech, Q jest liczbą cech.

Liczba wierszy w każdej macierzy znaczników (podmacierzy) jest taka sama i równa liczbie badanych obiektów. Natomiast liczba kolumn każdego bloku jest inna i równa liczbie kategorii cech, której odpowiada blok.

Elementy złożonej macierzy znaczników przyjmują tylko wartości zero i 1. Liczba jedynek w każdej podmacierzy jest równa liczbie obiektów. W każdym wierszu macierzy $\mathbf{Z}$ wystąpi dokładnie Q jedynek, a liczba jedynek w całej macierzy $\mathbf{Z}$ będzie równa $n \cdot Q$, gdzie n jest liczbą obiektów. Rzeczywisty wymiar przestrzeni prezentacji kategorii analizowanych cech to $K = J - Q$, gdzie J to łączna liczba kategorii wszystkich cech.

Korzystając ze złożonej macierzy znaczników budowana jest macierz Burta, która jest w literaturze dotyczącej analizy korespondencji bardzo często podawana jako podstawowa macierz służąca do analizy współwystąpień kategorii wielu zmiennych. Macierz ta jest wynikiem działania:

$$\mathbf{B} = \mathbf{Z}^T \mathbf{Z}, \quad (8)$$

gdzie:

– $\mathbf{Z}$ to złożona macierz znaczników.

Macierz Burta jest symetryczna i składa się z bloków. Na głównej przekątnej znajdują się macierze diagonalne, zawierające liczebności wystąpień kategorii cech. Poza przekątną umieszczone są tablice kontyngencji dla każdej pary cech. Analizę korespondencji macierzy Burta przeprowadza się analogicznie do podejścia klasycznego, jednak współrzędne wystarczy wyznaczyć dla wierszy lub kolumn.

Kolejnym sposobem analizy współwystąpień kategorii wielu zmiennych nominalnych jest przeprowadzenie analizy korespondencji na podstawie wielowymiarowej tablicy kontyngencji. Jest to tablica, która umożliwia krzyżową klasyfikację wielu zmiennych. Rozpatrując trzy cechy, tablicę taką można stworzyć z wierszy, kolumn i warstw. By stworzyć taką tablicę należy dysponować danymi o liczbie jednoczesnych wystąpień wszystkich kombinacji kategorii różnych cech. Sposób tworzenia wielowymiarowej

tablicy kontyngencji komplikuje się wraz ze wzrostem liczby analizowanych cech. Warstwy mogą wystąpić również w kolumnach.

Korzystając z reguły addytywności statystyki χ^2 można również przeprowadzić analizę korespondencji wielu zmiennych. W tym celu buduje się łączoną tablicę kontyngencji. Dla grupy danych dotyczących zbliżonego, pod względem wielkości i struktury, doświadczenia, wartości statystyk χ_i^2 uzyskanych z każdego pomiaru można zsumować i na tej podstawie wyciągnąć wnioski o całym rozpatrywanym zjawisku⁶. Sumowaniu w takim przypadku podlegają również wartości stopni swobody. Tworzenie na tej podstawie łączoną tablicę kontyngencji zakłada, że każda z tablic składowych ma w kolumnach tę samą cechę wspólną.

Interpretacja wyników w klasycznej analizie korespondencji i analizie wykonanej na podstawie Macierzy Burta jest następująca. Po dokonaniu rzutowania punktów na przestrzeń o niskim wymiarze ocenia się położenie punktów. To postępowanie ma na celu sprawdzenie:

- czy punkty obrazujące kategorie zmiennych leżą blisko czy w znacznej odległości od centrum rzutowania. Punkty najbardziej oddalone wnoszą najwięcej informacji o niezależności cech;
- czy występują kategorie tej samej cechy, które są bardzo blisko siebie położone, punkty wręcz nakładają się; takie liczebności takich kategorii można połączyć wprowadzając w zamian nową kategorię; działanie to jest zasadne, gdy chcemy zredukować rzeczywisty wymiar przestrzeni prezentacji współwystąpień kategorii zmiennych, osiągając tym samym wyższą jakość prezentacji w przestrzeni o niskim wymiarze;
- czy punkty opisujące kategorie należące do różnych cech są położone blisko siebie; jeśli tak to oznacza to współwystępowanie analizowanych kategorii zmiennych.

Wnioskowanie na podstawie rozrzutu punktów kategorii cech zapisanych w wielowymiarowej lub łączonej tablicy kontyngencji odbywa się analogicznie jak w powyższych przypadkach. Należy jednak zwrócić uwagę, by nie analizować np. współwystąpień kategorii pochodzących z tej samej zmiennej kombinowanej (czyli stworzonej z warstw tablicy wielowymiarowej). W łączonej tablicy kontyngencji również nie jest właściwe znajdowanie współwystąpień między kategoriami zmiennych z których żadna nie jest cechą wspólną w omawianej tablicy.

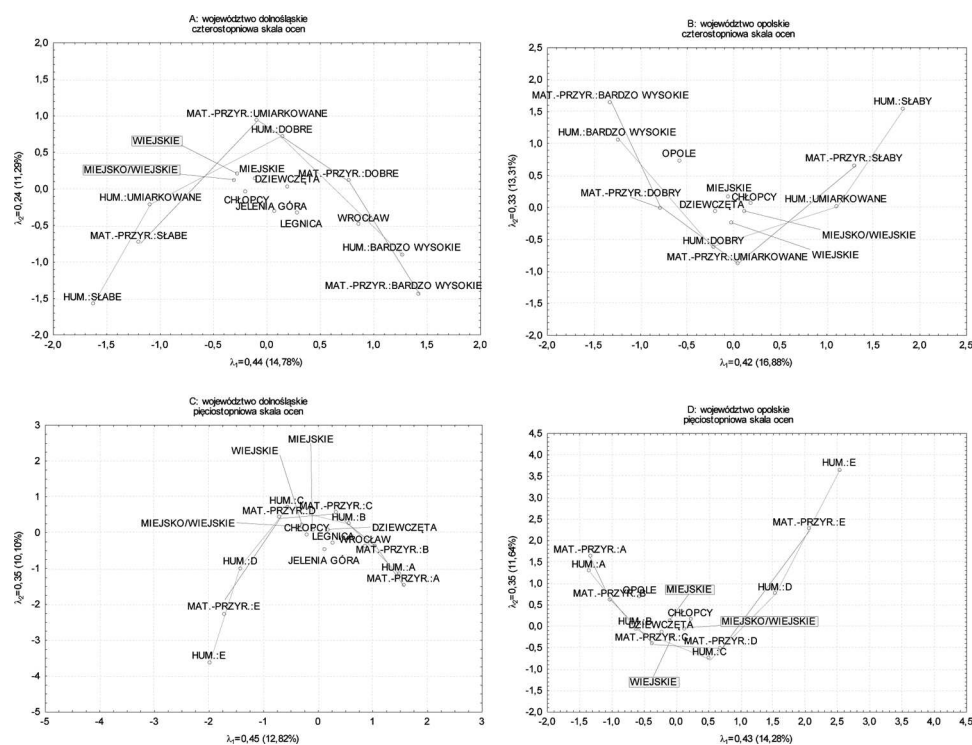
4. PORÓWNANIE REGIONALNE WYNIKÓW EGZAMINU GIMNAZJALNEGO

W celu przeprowadzenia porównania regionalnego osiągniętych wyników egzaminu wybrano dwa sąsiadujące ze sobą województwa. Obszary te bardzo różnią się między sobą np. ze względu na:

- powierzchnię województwa, co dalej pociąga za sobą liczbę mieszkańców oraz liczbę gmin we wszystkich ich typach;
- wielkość miast wojewódzkich oraz liczbę dużych miast.

⁶ Własność ta jest szczegółowo omówiona w pracy Yule'a i Kendalla [5].

Z tego względu interesujące wydaje się pytanie, czy wyniki uzyskiwane przez gimnazjalistów (uwzględniając płeć, miejsce zamieszkania) w obydwu województwach różnią się. Na rys. 2 zaprezentowano wyniki analizy korespondencji otrzymane w obydwu podejściach dla rozpatrywanych województw. Analizy przeprowadzono na podstawie macierzy Burt.



Rysunek 2. Porównanie wyników egzaminu w dwóch częściach, humanistycznej i matematyczno-przyrodniczej, uzyskanych w województwach dolnośląskim i opolskim

Źródło: opracowanie własne.

Wyniki prezentacji analizy korespondencji na podstawie macierzy Burt w obydwu województwach i dla obydwu typów skal ocen zachowują około 30% rzeczywistych współwystąpień kategorii analizowanych zmiennych: 26% (rys.2A), 30% (rys.2B), 23% (rys.2C), 26% (rys.2D).

Niezależnie od przeprowadzonej analizy (skala czterostopniowa i skala pięciostopniowa) w każdym województwie sytuacja przedstawia się w bardzo podobnie.

W województwie dolnośląskim (rys. 2A, rys. 2C) bardzo niskie wyniki z obydwu części egzaminu nie mogą być jednoznacznie uznane za wyniki najczęściej osiągnięte przez chłopców lub dziewczęta. Nie można również połączyć tych wyników z żadnym ze wskazanych obszarów terytorialnych. Położenie punktów obrazujących dziewczęta i chłopców jest bliskie centrum rzutowania, zatem kategorie tej cechy w mniejszym stopniu, niż pozostałe kategorie, przyczyniają się do stwierdzenia o zależności analizo-

wanych cech. Punkty obrazujące dziewczęta są położone bliżej punktów przedstawiających wyższe wyniki egzaminacyjne (dla obydwu skal ocen), niż punkty obrazujące chłopców. W obydwu przeprowadzonych analizach punkty prezentujące gminy miejskie, miejsko-wiejskie i wiejskie są położone blisko centrum rzutowania i przesunięte w porównaniu do punktów przedstawiających pozostałe obszary (czyli duże miasta) w kierunku wyników przeciętnych z obydwu części egzaminu. Uczniowie z dużych miast województwa dolnośląskiego osiągają najlepsze (w porównaniu do osób z pozostałych obszarów) wyniki z obydwu części egzaminu, niezależnie od przyjętej skali ocen.

W województwie opolskim rezultaty analizy wyników egzaminu przeprowadzonej na podstawie dwóch skal ocen są interpretowane podobnie jak w województwie dolnośląskim. Dziewczęta w województwie opolskim osiągają lepsze, niż chłopcy, wyniki z obydwu części egzaminu. Bardzo niskim wynikom egzaminu nie można jednoznacznie przypisać, żadnej z kategorii pozostałych analizowanych zmiennych. Wyniki uczniów z Opola są w tym województwie znacząco wyższe niż wyniki uczniów z pozostałych wyróżnionych gmin.

Można zauważyć delikatną zmianę w pozycji miast wojewódzkich po wprowadzeniu w obydwu regionach podziału populacji na pięć klas w zależności od osiągniętych wyników, w porównaniu do skali czterostopniowej. Punkty określające uczniów z Wrocławia i Opola w skali cztero stopniowej są położone między punktami obrazującymi bardzo wysokie wyniki z części humanistycznej i dobre z części matematyczno-przyrodniczej. Podział populacji w zależności od osiągniętych wyników wskazał, że to wyniki dobre z części matematyczno-przyrodniczej egzaminu są najbardziej charakterystyczne dla uczniów z tych miast.

Przeprowadzenie analizy na podstawie macierzy Burta nie rozwiązuje w pełni postawionego problemu badawczego. Nie można wskazać, czy między chłopcami i dziewczętami z różnych gmin występują różnice w osiągniętych wynikach egzaminu. Z tego względu postanowiono przeprowadzić analizę korespondencji na podstawie innych tablic wielodzielczych.

5. JEDNOCZESNA ANALIZA WYNIKÓW EGZAMINU GIMNAZJALNEGO W WOJEWÓDZTWACH DOLNOŚLĄSKIM I OPOLSKIM

W celu stwierdzenia, czy między chłopcami i dziewczętami z różnych regionów i gmin występują różnice w osiągniętych wynikach egzaminu przeprowadzono analizę korespondencji z wykorzystaniem zaproponowanej w pracy Stanimir [3] kombinacji dwóch podejść stosowanych w analizie korespondencji na podstawie: wielowymiarowej i łączonej tablicy kontyngencji. W celu przeprowadzenia tej analizy niezbędne było połączenie kategorii wybranych zmiennych, tworząc tzw. warstwy. Stworzono dwie tablice kontyngencji, w których wystąpiły następujące zmienne:

- gmina/płeć oraz wynik z części humanistycznej egzaminu;
- gmina/płeć oraz wynik z części matematyczno-przyrodniczej egzaminu.

Z powstałych w ten sposób dwóch tablic zbudowano łączoną tablice kontyngencji z cechą wspólną gmina/płeć. Badanie wykonano zarówno dla skali cztero- jak i pięciostopniowej. W obydwu przypadkach uzyskano o wiele wyższą jakość odwzorowania rzeczywistych współwystąpień kategorii cech niż w trakcie analizy na podstawie macierzy Burta (rys. 3: 96%, rys. 4: 95%). Wyniki prezentują rys. 3 oraz 4. Na wykresach połączono odcinkami kolejne oceny z obydwu części egzaminu.

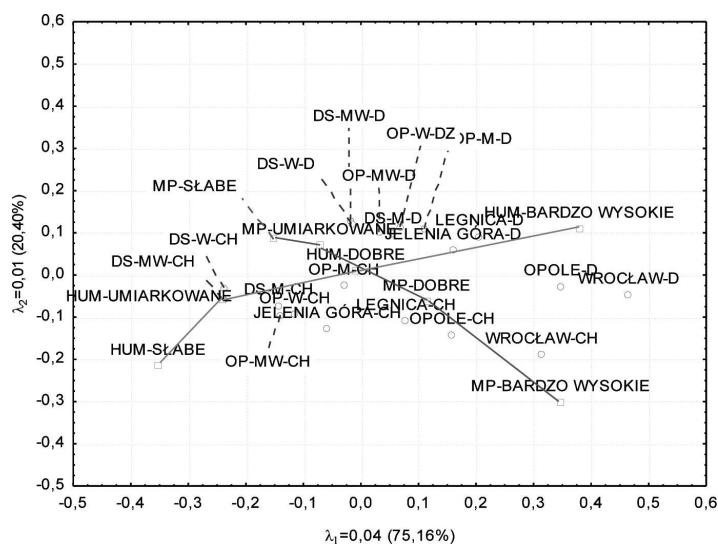
Na obydwu rysunkach można zaobserwować, że bardzo wysokie wyniki z obydwu części egzaminu są bardzo oddalone od pozostałych ocen, między którymi odległości nie są już tak znaczące. Niezależnie od wprowadzonej skali ocen punkty obrazujące dziewczęta z Wrocławia i Opola (Wrocław/D, Opole/D) są położone między punktami przedstawiającymi bardzo dobre wyniki z obydwu części egzaminu (rys. 3: HUM-bardzo_wysokie, MP-bardzo_wysokie; rys. 4: HUM/A, MP/A). Chłopcy z Wrocławia (Wrocław/CH) bardzo często osiągają bardzo wysokie oceny z części matematyczno-przyrodniczej. Chłopcy uczący się w Opolu i Legnicy osiągają trochę niższe wyniki z tej części egzaminu, o czym świadczy umiejscowienie punktów Opole/CH oraz Legnica/CH między dwiema najwyższymi ocenami z tej części (rys. 3). Dziewczęta uczące się w Legnicy i Jeleniej Górze uzyskują najczęściej dwie najwyższe oceny z humanistycznej części egzaminu. Chłopcy z gmin miejskich województwa dolnośląskiego, gmin miejsko-wiejskich oraz wiejskich województwa opolskiego najczęściej osiągają z części humanistycznej wyniki dobre lub umiarkowane (rys. 3: HUM-dobre, HUM-umiarkowane; rys. 4: HUM/C HUM/D). Uczniowie z gmin wiejskich i miejsko-wiejskich województwa dolnośląskiego osiągają gorsze wyniki z części humanistycznej (rys. 3: HUM-umiarkowane; rys. 4: HUM/D, HUM/E) niż uczniowie z tych samych obszarów województwa opolskiego.

Dla pozostałych kategorii cech zaobserwowano, niewielkie różnice w interpretacji ich położenia na wykresie. Jeśli przyjmiemy czterostopniową skalę ocen, to dobre wyniki z części humanistycznej egzaminu uzyskują chłopcy z gmin miejskich województwa opolskiego. Dziewczęta z gmin miejskich, miejsko-wiejskich i wiejskich z obydwu województw osiągają zbliżone wyniki z egzaminu (punkty DS-M-D, DS-M/W-D, DS-W-D, OP-M-D, OP-M/W-D, OP-W-D leżą bardzo blisko siebie), jednak najbardziej charakterystyczne są dla nich dobre wyniki z części humanistycznej i umiarkowane wyniki z części matematyczno-przyrodniczej.

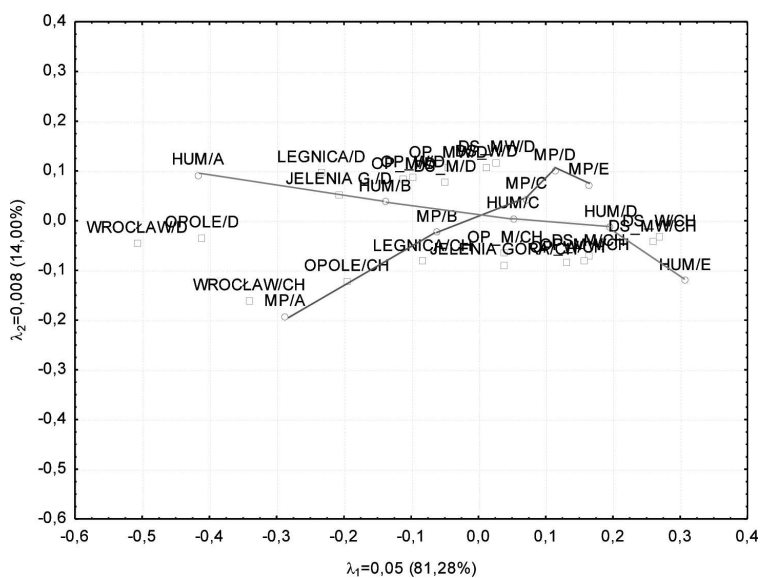
W wyniku wprowadzenia pięciostopniowej skali ocen uzyskano bardziej szczegółową charakterystykę dziewcząt ze względu na uzyskiwane wyniki egzaminu. Uczennice z gmin miejskich i wiejskich województwa opolskiego osiągają wysokie wyniki z części humanistycznej (HUM/B). Uczennice z gmin wiejskich i miejsko-wiejskich województwa dolnośląskiego uzyskują z części matematyczno-przyrodniczej średnie i niskie oceny.

Porównując ułożenie punktów na obydwu wykresach można stwierdzić, że:

– punkty obrazujące dziewczęta są położone w górnej części wykresu i odpowiadają im punkty niskich wyników z części matematyczno-przyrodniczej (dla gmin



Rysunek 3. Graficzna prezentacja wyników analizy korespondencji według czterostopniowej skali ocen
Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 4. Graficzna prezentacja wyników analizy korespondencji według czterostopniowej skali ocen
Źródło: opracowanie własne.

miejskich, miejsko-wiejskich, wiejskich), przechodząc stopniowo do wyższych wyników z części humanistycznej egzaminu dla dużych miast i miast wojewódzkich;

– punkty obrazujące chłopców są położone w dolnej części wykresu i odpowiadają im punkty niskich wyników z części humanistycznej (dla gmin miejskich,

miejsko-wiejskich, wiejskich), przechodząc stopniowo do wyższych wyników z części matematyczno-przyrodniczej egzaminu dla dużych miast i miast wojewódzkich;

– wśród chłopców osiągających bardzo dobre wyniki z egzaminu można zauważyć „specjalizację”, czyli punkty obrazujące chłopców z miast wojewódzkich są położone blisko punktów obrazujących bardzo dobre wyniki z części matematyczno-przyrodniczej.

– wśród dziewcząt z miast wojewódzkich dominuje „wszechstronność”, czyli punkty obrazujące dziewczętasą położone między punktami prezentującymi bardzo wysokie wyniki z obydwu części egzaminu.

6. PORÓWNANIE W CZASIE WYNIKÓW EGZAMINÓW NA DOLNYM ŚLĄSKU I W WOJEWÓDZTWIE OPOLSKIM (LATA 2003 I 2010)

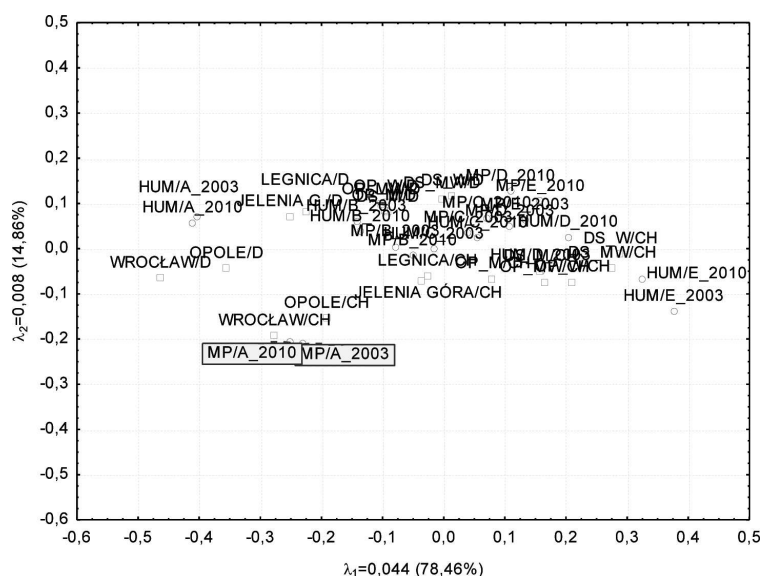
Ostatnia z przeprowadzonych analiz ma na celu sprawdzenie, czy poziom wyników uzyskiwanych w obydwu częściach egzaminu przez dziewczęta i chłopców w wyróżnionych gminach i dużych miastach zmieniał się w czasie.

W celu przeprowadzenia tej analizy również posłużono się tablicą kontyngencji zbudowaną dla poprzedniej analizy oraz analogiczną tablicą dla danych z 2003r. Wyniki analiz przedstawione w poprzednich rozdziałach wskazują, że zastosowanie skali pięciostopniowej dzielącej populację ze względu na osiągnięte wyniki jest uszczegółowieniem analizy na podstawie skali czterostopniowej. Z tego względu prezentowaną poniżej analizę wykonano jedynie dla pięciostopniowej skali ocen. Prezentacja przeprowadzonej analizy w przestrzeni dwuwymiarowej zachowuje 93% rzeczywistych współwystąpień kategorii analizowanych cech. Wyniki analizy przedstawia rys. 5. (powiększenie fragmentu na rys. 6).

Na podstawie rozrzutu punktów na rys. 5 można zauważyć, że wysokie oceny z obydwu części egzaminu w latach 2003 i 2010 są położone bardzo blisko siebie. Na tej podstawie można stwierdzić, że w obydwu analizowanych okresach osiąganie tak wysokich ocen z egzaminu nie zmienia się w badanych populacjach ze względu na płeć i typ gminy. Tak jak w poprzednich analizach, również ta, której wyniki zobrazowano na rys. 5 wskazuje, że uczennice z Opola i Wrocławia bardzo dobrze radzą sobie z obydwoma częściami egzaminu, natomiast chłopcy z tych miast zdecydowanie preferują przedmioty matematyczno-przyrodnicze, z których w trakcie egzaminu uzyskują bardzo dobre oceny.

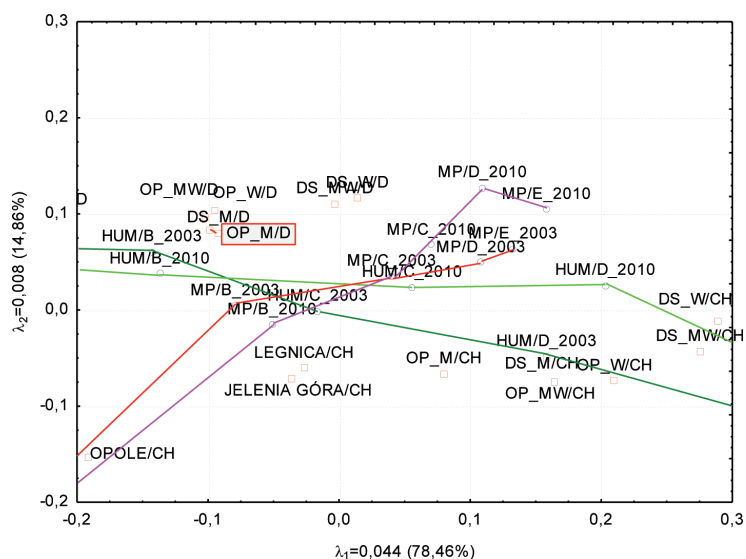
Najniższe oceny z części humanistycznej egzaminu ani w 2003 ani w 2010 roku nie charakteryzują w sposób szczególny uczniów z żadnej z rozpatrywanych gmin w podziale na płeć.

Punkty obrazujące średnie i niskie wyniki egzaminu w 2003 i 2010 r. są od siebie oddalone, co oznacza, że badane populacje różniły się ze względu na uzyskiwanie przeciętnych wyników w obydwu analizowanych okresach (HUM/C_2003, HUM/C_2010, MP/C_2003, MP/C_2010, HUM/D_2003, HUM/D_2010, MP/D_2003, MP/D_2010).



Rysunek 5. Graficzna prezentacja wyników analizy korespondencji przeprowadzonej na podstawie danych z lat 2003 i 2010

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 6. Powiększenie fragmentu rys. 5.

Źródło: opracowanie własne.

Zarówno w roku 2010 jak i 2003 wysokie wyniki z części humanistycznej są charakterystyczne dla dziewcząt z gmin miejskich, miejsko-wiejskich oraz wiejskich województwa opolskiego oraz gmin miejskich województwa dolnośląskiego. Wyniki z tej

części egzaminu uczennic z Jeleniej Góry i Legnicy są trochę lepsze (o czym świadczy położenie punktów Legnica/D, JeleniaG./D między punktami HUM/A i HUM/B z obydwu okresów). Natomiast wyniki uczennic z gmin wiejskich i miejsko-wiejskich z części humanistycznej egzaminu są gorsze.

Podobnie jak w analizie, której wyniki zaprezentowano w rozdziale 5, punkty obrazujące chłopców są na wykresie położone niżej, a zatem ci uczniowie osiągają wyższe wyniki w obydwu okresach z części matematyczno-przyrodniczej w dużych miastach, a w pozostałych gminach przeważają słabe wyniki z części humanistycznej.

7. PODSUMOWANIE

Zaprezentowane techniki wykorzystania analizy korespondencji umożliwiły rozpoznanie zróżnicowania w osiąganych wynikach z egzaminu gimnazjalnego przez uczniów województw dolnośląskiego i opolskiego.

W przeprowadzonym badaniu wyniki uzyskiwane przez uczniów podzielono na 4 lub 5 klas. Drugi podział jest bardziej trafny, gdyż uwzględnia rozkład wyników w populacji badanej, w większym stopniu szczegółowości pozwala określać różnice między wskazywanymi grupami demograficznymi uczniów.

Wnioskowanie przeprowadzone na podstawie wyników analiz wykonanych techniką klasyczną i z wykorzystaniem macierzy Burta, wskazało trudności w rozróżnieniu poziomu wiedzy i umiejętności chłopców i dziewcząt w rozpatrywanych obszarach terytorialnych. Problem ten rozwiązano wprowadzając do analizy technikę opisaną przez Stanimir [3], bazującą na łączonej i wielowymiarowej tablicy kontyngencji. Uszczegółowienie obserwacji już na etapie tworzenia macierzy danych zaowocowało bardzo dokładnym opisem poziomu wiedzy chłopców i dziewcząt we wszystkich analizowanych gminach i dużych miastach obydwu województw. To postępowanie umożliwiło również podniesienie jakości odwzorowania współwystąpień kategorii zmiennych w przestrzeni o niskim wymiarze, w porównaniu do klasycznej analizy korespondencji i analizy na podstawie macierzy Burta.

Anna Błaczkowska – Wyższa Szkoła Bankowa we Wrocławiu,
Alicja Grześkowiak, Anna Król, Agnieszka Stanimir –
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

LITERATURA

- [1] Błaczkowska A., Grześkowiak A., Król A., Stanimir A., *Comparative analysis of the competences of gymnasium students in Lower Silesia districts*. PN Uniwersytetu Ekonomicznego nr 194, Econometrics 31, Wrocław 2011, s. 76-87.
- [2] Greenacre M., *Correspondence Analysis in Practice*. London, Academic Press 1993.

- [3] Stanimir A., *Zastosowanie różnych technik analizy korespondencji w analizie danych personalnych*. PN Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 161, Nauki o Zarządzaniu 6, Badania Rynkowe, red. K. Mazurek-Lopacińska, Wrocław 2011, s. 36-48.
- [4] Stanimir A., *Analiza korespondencji jako narzędzie do badania zjawisk ekonomicznych*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 2005.
- [5] Yule G.U., Kendall M.G., *Wstęp do teorii statystyki*. Warszawa, PWN 1966.

ANALIZA PORÓWNAWCZA WYNIKÓW Z DWÓCH CZĘŚCI EGZAMINU GIMNAZJALNEGO UZYSKANYCH PRZEZ UCZNIÓW Z RÓŻNYCH OBSZARÓW TERYTORIALNYCH

Streszczenie

Celem badań przeprowadzonych w ramach prezentowanego artykułu jest wskazanie analizy korespondencji jako metody niezwykle użytecznej w rozpoznawaniu współwystąpień kategorii zmiennych wyróżnionych w trakcie egzaminu gimnazjalnego. Wskazanie powiązań między kategoriami zróżnicowanych zmiennych może być wskazówką do dalszej modernizacji systemu edukacji, tak by dostęp do wiedzy nie był ograniczany.

System edukacji w Polsce poddano radykalnej reformie, którą zapoczątkowano w 1999 r. Jej celem było podniesienie jakości kształcenia oraz dopasowanie systemu edukacji do wymagań gospodarki opartej na wiedzy. Jednym z najważniejszych rozwiązań proponowanych w reformie szkolnictwa było wprowadzenie nowej struktury szkolnictwa. W trakcie reformy systemu edukacji wprowadzono między innymi egzamin gimnazjalny, którego wyniki z lat 2003-2010 wzięto pod uwagę w prowadzonej analizie. Egzamin ten jest jednak powszechny i obowiązkowy. Dysponowano wynikami Centralnej Komisji Egzaminacyjnej dla poszczególnych uczniów w województwach opolskim i dolnośląskim z podziałem na szkoły, gminy, płeć oraz tematyczne obszary egzaminacyjne w zakresach przedmiotów matematyczno-przyrodniczych i humanistycznych. Przeprowadzono analizę korespondencji wykorzystując podejście klasyczne i dla wielu zmiennych.

Słowa kluczowe: analiza porównawcza, egzamin gimnazjalny, analiza korespondencji

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE RESULTS OF TWO PARTS OF THE GYMNASIUM EXAM ACHIEVED BY STUDENTS FROM VARIOUS TERRITORIAL AREAS

Abstract

The aim of the research presented in this article is to indicate the correspondence analysis as a very useful method in recognizing the categories' associations of variables identified in the gymnasium exam. Indication of the relationships between categories of different variables may give a recommendation to further reform of the education system so that the access to knowledge is not limited.

A radical reform of the educational system in Poland started in 1999. Its aim was to improve the quality of education and to adjust the education system to the requirements of the knowledge-based economy. One of the main solutions proposed in the reform was the introduction of the new education

structure. An external, universal and compulsory gymnasium exam was implemented and its results from the years 2003-2010 were taken into consideration in this scrutiny. The analysis was based on the results collected by the Central Examination Board for individual students in the dolnośląskie and opolskie voivodships with regard to school, community, gender and exam thematic areas in the fields of humanities, mathematics and science. The correspondence analysis was performed using both simple and multiway approaches.

Key words: comparative analysis, gymnasium exam, correspondence analysis

WIOLETTA GRZENDA

ANALIZA PŁODNOŚCI KOBIET W POLSCE Z WYKORZYSTANIEM BAYESOWSKIEGO MODELU REGRESJI POISSONA¹

1. WSTĘP

Zagadnienia dotyczące płodności są obecnie bardzo szeroko analizowane ze względu na postępujący proces starzenia się ludności oraz niski wskaźnik dzietności, który uniemożliwia zastępowanie pokoleń. Dla większości krajów europejskich współczynnik dzietności² waha się od 1.2 do 1.9, dla Polski wynosi 1.3 ([2]). Utrzymanie się w długim okresie obserwowanych zmian w liczbie i strukturze ludności może istotnie wpłynąć na rozwój gospodarczy oraz stabilność istniejących rozwiązań instytucjonalnych systemu ubezpieczeń społecznych i emerytalnych. Analizom ekonomicznych skutków zachodzących procesów demograficznych, powinno towarzyszyć badanie wpływu czynników społeczno-ekonomicznych na te właśnie procesy ([1]). Jednocześnie, aby dotrzeć do istoty badanych przemian, trzeba je zgłębiać na poziomie uwarunkowań zachowań jednostkowych, które następnie przekładają się na procesy ludnościowe na poziomie makro ([43]).

Zachowania prokreacyjne mogą być warunkowane wieloma różnymi czynnikami społecznymi, kulturowymi, ekonomicznymi, demograficznymi oraz innymi, związanymi m.in. z wykorzystaniem środków kontroli płodności. Zatem w analizie mechanizmów przyczynowo-skutkowych zjawisk demograficznych konieczne jest uwzględnienie różnych aspektów życia człowieka. Celem niniejszej pracy jest zbadanie zachowań prokreacyjnych Polek poprzez identyfikację czynników je determinujących z wykorzystaniem metod bayesowskich. Analiza płodności kobiet została przeprowadzona na podstawie danych indywidualnych pochodzących z polskiego badania retrospektywnego „Przemiany rodziny i wzorce dzietności w Polsce”³.

¹ Badanie zostało zrealizowane w ramach badań własnych „Bayesowska estymacja modelu regresji Poissona” nr 03/E/0028/09, Szkoła Główna Handlowa.

² Współczynnik dzietności (TFR) określa średnią liczbę dzieci, którą urodziłaby kobieta w ciągu całego okresu rozrodczego, zakładając, że intensywność urodzeń pozostałaby niezmienna na poziomie badanego roku ([2]).

³ Badanie zrealizowane przez Instytut Statystyki i Demografii SGH oraz Główny Urząd Statystyczny w 1991 roku w ramach europejskiej rundy badań „Family and Fertility Survey” koordynowanej przez Population Activity Unit Commission for Europe, UN Geneva.

Badanie determinant płodności wymaga nie tylko odpowiednich danych, ale również metod analizy. Opisowa charakterystyka determinant płodności oraz trendów jej zmian dla Polski w latach 1950-2005 ze szczególnym uwzględnieniem okresu transformacji ustrojowej zawarta jest m.in. w [2] i [44]. Inne podejście polega na użyciu odpowiedniego modelu statystycznego, który umożliwi badanie wpływu różnych czynników na dzietność. W badaniach procesu tworzenia się rodziny wykorzystywane są również metody i modele analizy historii zdarzeń (np. [20], [21]), modele te na ogólnie wymagają znajomości rozkładu zależnej zmiennej losowej⁴. Ponadto w literaturze można znaleźć wiele opracowań dotyczących modelowania decyzji prokreacyjnych z wykorzystaniem odpowiednich modeli regresji ([1], [6], [68])⁵.

Pierwsze próby modelowania płodności przy użyciu modelu regresji można znaleźć w pracy I. Adelman ([1]). Celem tej publikacji było zbadanie wpływu determinant społeczno-ekonomicznych na płodność i umieralność. W badaniu współczynnika urodzeń żywych, dla wybranych grup wiekowych kobiet uwzględniono następujące czynniki społeczno-ekonomiczne: wielkość dochodu narodowego na mieszkańca, wskaźnik procentowy zatrudnienia poza rolnictwem, poziom wykształcenia matki oraz gęstość zaludnienia.

Modelowanie decyzji prokreacyjnych gospodarstw domowych z wykorzystaniem uogólnionego modelu regresji Poissona w oparciu o klasyczną metodę największej wiarygodności przedstawiono natomiast w pracy [68]. W. Wang i F. Famoye pokazali, kiedy wybrany model jest lepszy w porównaniu ze zwykłym modelem regresji Poissona i modelem ujemnym dwumianowym, jednak ostatecznie otrzymano, że wartości wyznaczonych parametrów są podobne w obu modelach Poissona. Wykorzystany model dał możliwość weryfikacji elementów ekonomicznej teorii płodności Beckera-Lewisa poprzez uwzględnienie w badaniu wybranych zmiennych społeczno-ekonomicznych.

W pracy Ch. Hilgemana i C. T. Buttsa [35] przeprowadzono analizę związków pomiędzy płodnością kobiet, a ich udziałem w rynku pracy przy użyciu bayesowskiego modelu hierarchicznego z wykorzystaniem niejednorodnego procesu Poissona z funkcją kawałkami stałą, w estymacji wykorzystano metody Monte Carlo oparte na łańcuchach Markowa. Badaniu poddano 20 krajów bez uwzględnienia Polski. Zmienną zależną była całkowita liczba dzieci kiedykolwiek urodzonych (total number of children ever born) do momentu przeprowadzenia badania. Zastosowany model umożliwił badanie wybranych czynników indywidualnych oraz socjalno-ekonomicznych dla poszczególnych państw. W przeciwieństwie do innych badań ([9], [61]), których wyniki sugerują, że kraje o wyższej dzietności charakteryzowała również wyższa aktywność zawodowa kobiet, w pracy [35] otrzymano, że wzrostowi aktywności zawodowej kobiet w okresie lat 80-tych towarzyszył spadek płodności.

⁴ Do modeli analizy historii zdarzeń zaliczamy również modele parametryczne, wówczas znana jest analityczna postać gęstości rozkładu prawdopodobieństwa.

⁵ W pracach tych nie wykorzystywano podejścia bayesowskiego; w niniejszej pracy po raz pierwszy wykorzystano bayesowski model regresji w analizie płodności na danych polskich.

W niniejszej pracy podjęto próbę zbadania wpływu wybranych czynników na ogólną liczbę dzieci posiadanych przez kobiety, które okres prokreacyjny miały już za sobą. Uwzględniając charakter zmiennej objaśnianej można przyjąć, że odpowiednim narzędziem analizy jest model regresji Poissona. Model ten umożliwia określenie kierunku i skali wpływu wybranych czynników na liczbę dzieci posiadanych przez kobiety.

Dotychczas w powszechnie prowadzonych badaniach dotyczących modelowania płodności kobiet w Polsce wykorzystywano tzw. podejście klasyczne, które opiera się wyłącznie na informacji zawartej w próbie losowej. Zaproponowane w niniejszej pracy podejście bayesowskie umożliwia włączenia do wnioskowania statystycznego wiedzy *a priori*, pochodzącej z wyników innych dotychczasowych badań. W pracy oszacowano modele, w których wykorzystano nieinformacyjne i informacyjne rozkłady *a priori*. Wybierając rozkłady nieinformacyjne uzyskano wyniki analogiczne do tych, które można by otrzymać wykorzystując podejście klasyczne, ale należy podkreślić, że w podejściu bayesowskim nieznane parametry modelu są zmiennymi losowymi, zatem interpretacja otrzymanych wyników w tych dwóch podejściach jest różna. Inne zalety stosowania metod bayesowskich przedstawione są m.in. w publikacjach [8], [26] oraz [19]⁶.

2. ZAKRES BADAŃ

Istnieje wiele teorii płodności, w kontekście których można rozważać obserwowane w Polsce zachowania prokreacyjne przed okresem transformacji. Właściwą podstawę dla tych rozważań mogą stanowić ekonomiczne teorie płodności oraz koncepcja drugiego przejścia demograficznego.

Podstawowe założenia ekonomicznej teorii płodności zostały sformułowane przez H. Leibensteina ([46]). Oparł on swoją teorię na dwóch podstawowych aksjomatach. Pierwszy z nich to przekonanie, że racjonalny wybór jest czynnikiem regulującym wszelkie sfery ludzkiej aktywności, zatem rodzice decydując o liczbie dzieci zachowują się w sposób racjonalny. W myśl drugiego aksjomatu dziecko traktowane jest jako dobro dostarczające rodzicom trzech form użyteczności: konsumpcyjnej, produkcyjnej i zabezpieczającej.

W ekonomicznej teorii płodności wyróżnia się dwa przeciwstawne sobie nurty: „model szkoły chicagowskiej” oraz „model szkoły pensylwańskiej”. Głównym przedstawicielem pierwszego nurtu jest G. S. Becker, który wyrażał przekonanie o możliwości analizy decyzji prokreacyjnych w ramach ekonomicznej teorii zachowań konsumenc- kich ([4]). Uważał on, że dzieci stanowią trwałe dobro konsumpcyjne oraz produkcyjne i traktował je na równi z innymi dobrami konsumpcyjnymi takimi jak domy i samochody. Jego przekonania podzielali min. R. J. Willis, M. R. Rosenzweig, P. Schulz oraz

⁶ Publikacja ta zawiera porównanie wersji klasycznej i bayesowskiej modelu regresji Poissona, otrzymano m.in., że w przypadku testowania hipotez o istotności parametrów modelu, rezultaty uzyskane tymi dwoma metodami są równoważne, natomiast w przypadku estymacji parametrów lepsze wyniki daje podejście bayesowskie.

Y. Ben-Porath. Modyfikacją koncepcji Beckera wraz z odwołaniem się do stwierdzeń Leibensteina była, określana mianem modelu „szkoły pensylwańskiej”, teoria płodności R. A. Easterlina ([18]). Proponował on model zachowań prokreacyjnych wykraczający poza ramy teorii mikroekonomicznej i uwzględniający również zmienne socjoekonomiczne, a także proces zmiany historycznej. Uważał, że podejmowane decyzje prokreacyjne wynikają z kalkulacji korzyści i kosztów związanych z posiadaniem dzieci, a nie z wysokości dochodu. Szersze rozważania na temat teorii ekonomicznych można znaleźć w opracowaniu [63].

Koncepcja drugiego przejścia demograficznego dotyczy przemian demograficznych zachodzących od lat 60 w wysoko rozwiniętych krajach Europy Zachodniej, a od początku lat 90 w krajach Europy środkowo-Wschodniej. Przemiany strukturalne związane z uprzemysłowieniem, urbanizacją, ogólną poprawą poziomu życia, wzrostem poziomu wykształcenia i większą rolą kobiet w życiu ekonomicznym i społecznym przyczyniły się do nasilania dążeń samorealizacyjnych jednostki i odrzucania wartości tradycyjnych na rzecz liberalnych. W odniesieniu do płodności obserwowane wówczas procesy przejawiały się głównie spadkiem dzietności poniżej poziomu prostej zastępowalności pokoleń, opóźnianiem decyzji o urodzeniu pierwszego dziecka, wzrostem liczby urodzeń pozamałżeńskich oraz spadkiem skłonności do zawierania małżeństw. Za twórców tej teorii uznaje się przede wszystkim D. Van de Kaa ([66], [67]) i R. Lesthaeghe’a ([47], [48], [49]). Analiza zmian demograficznych w Polsce w kontekście drugiego przejścia demograficznego jest tematem wielu opracowań ([23], [44], [45]) i dotyczy głównie okresu transformacji systemowej – wtedy to przedstawione procesy uległy znacznej intensyfikacji.

W nawiązaniu do powyższych teorii i innych opracowań przedstawimy teraz potencjalne zmienne objaśniające i związane z nimi problemy badawcze.

Większość opracowań prezentuje różne mierniki rodności, płodności i ich trendy ogólnie dla Polski oraz z podziałem na miasto i wieś ([2], [36], [44]). Uwzględniając w badaniu miejsce zamieszkania, należy jednak pamiętać, że lata 1950-1990 pozostawały pod silnym wpływem migracji wewnętrznych, zwłaszcza przemieszczeń ze wsi do miast. Duże migracje między obszarami wiejskimi a miejskimi charakteryzowały zwłaszcza pierwszą dekadę podanego okresu. Do roku 1980 obserwowano stale rosnące saldo dla miast i dopiero kryzys lat osiemdziesiątych doprowadził do istotnego zmniejszenia mobilności przestrzennej ludności ([43]). Migranci przynosili do miast model rodziny wielodzietnej, co miało wpływ na stosunkowo wysoki poziom dzietności. Jednak w całym okresie obserwowano wyższą płodność na wsi, niż w miastach, co można m.in. tłumaczyć na gruncie ekonomicznej teorii płodności, według Beckera ([4]) dzieci niekiedy mogą także dostarczać dochodu pieniężnego i wtedy stanowią dobro produkcyjne. Na wsi dzieci pracowały, zatem przyczyniały się do wzrostu dochodu rodziny, w mieście posiadanie dzieci okazało się zbyt kosztowne ([45]). Biorąc pod uwagę powyższe rozważania zbadamy, w jakim stopniu miejsce zamieszkania wpływało na liczbę posiadanych dzieci w badanym okresie.

Zgodnie z teorią inwestowania w kapitał ludzki Beckera ([5]) inwestowanie w wykształcenie daje możliwość uzyskania w przyszłości większych dochodów, ale jednocześnie powoduje spadek płodności. Posiadanie większej wiedzy daje kobietom inne możliwości samorealizacji głównie w postaci pracy zawodowej ([2]). Wpływ ten może mieć charakter bezpośredni poprzez m.in. poszerzenie wiedzy na temat środków kontroli urodzeń. Natomiast pośredni wpływ wykształcenia może być związany z podwyższaniem wieku zawierania małżeństw oraz ograniczeniem umieralności noworodków. W badaniach często wykształcenie traktowane jest jako determinanta aktywności zawodowej i dochodu, jednak warto zaznaczyć, iż takie znaczenie wykształcenia w gospodarkach centralnie planowanych było znacznie mniejsze ze względu na system regulacji wynagrodzeń. Według Leibensteina ([46]) wzrost dochodu na osobę zmniejsza potrzebę korzystania z dzieci jako źródła dochodów, ponadto rozwój systemów opieki społecznej zmniejsza znaczenie dziecka w tej roli. Można zatem przypuszczać, że kobiety bardziej wykształcone będą posiadały mniej dzieci.

W okresie powojennym przyspieszone procesy industrializacji spowodowały duże zapotrzebowanie na siłę roboczą, ponadto ze względu na popularyzację emancypacji zawodowej kobiet, były one zatrudniane na dużą skalę ([20]). Chęć poprawy jakości życia rodziny również skłaniała kobiety do podejmowania dodatkowych prac. Takie zachowania kobiet mogły z jednej strony negatywnie wpływać na płodność (np. [35]), z drugiej strony wzrost dochodu powinien prowadzić do wzrostu zarówno liczby, jak i jakości potomstwa (Becker [4]). W krajach zachodnich w badanym okresie kierunek korelacji pomiędzy dzietnością a aktywnością zawodową był różny. Polskę w okresie socjalizmu charakteryzował relatywnie wysoki poziom dzietności i aktywności zawodowej. Na poziom urodzeń wpływa również skuteczna polityka ludnościowa. Jednym z jej elementów jest prawo pracy i zakres uprawnień przysługujący pracującym kobietom w okresie ciąży, porodu i wychowania małego dziecka. Dopiero w 1974 r. skodyfikowano prawo i uchwalono kodeks pracy, który zapewniał kobietom m.in. trwałość stosunku pracy w okresie ciąży i płatne urlopy macierzyńskie, natomiast od 1981 r. kobiety mogą korzystać z 3 letniego urlopu wychowawczego oraz z zasiłku wychowawczego ([25]), zachowując przy tym ciągłość pracy. Mimo tego wkrótce rozpoczął się proces spadku liczby urodzeń, zatem należy zbadać, czy sytuacja na rynku pracy faktycznie determinowała decyzje prokreacyjne kobiet.

Pomimo zaobserwowanego malejącego współczynnika zawierania związków małżeńskich i rosnącego współczynnika rozwodów w latach 1960-1990, małżeństwo było i jest ważną instytucją społeczną w Polsce ([43]). Różnice w płodności kobiet zamężnych i niezamężnych zależą w dużym stopniu od charakterystyk społeczno-gospodarczych. Warto również podkreślić, że dla niektórych kobiet małżeństwo uprawnia je do posiadania dzieci, dla innych małżeństwo jest zawierane po urodzeniu dziecka w celu zalegalizowania tego urodzenia ([2]). Niewątpliwie istnieje związek pomiędzy liczbą posiadanych dzieci, a faktem pozostawania w związku małżeńskim, zatem warto zbadać jego skalę.

Polska jest krajem z mocno osadzonymi wartościami religijnymi i wpływem Kościoła. Można przypuszczać, że kobiety bardziej religijne przywiązane były do tradycyjnego modelu rodziny, zatem mniej chętnie uczestniczyły w pracy zawodowej, co mogło sprzyjać większej liczbie posiadanych przez nie dzieci. Uzasadnia to uwzględnienie w badaniu wyznania jako czynnika potencjalnie wpływającego na płodność.

Podsumowując, w badaniu płodności wskazane jest uwzględnienie wielu różnych zmiennych. Szczegółową charakterystykę poszczególnych zmiennych objaśniających zawiera tabela 1.

Tabela 1.

Zmienna	Opis zmiennej	Poziom	Struktura
m_zamieszkania	miejsce zamieszkania w momencie badania	0 = miasto 1 = wieś	395 192
wykształcenie	poziom wykształcenia	1 = podstawowe 2 = zasadnicze 3 = średnie 4 = wyższe	224 121 197 45
zatrudnienie	sytuacja na rynku pracy w momencie badania	1 = pracująca zawodowo 2 = niepracująca zawodowo 3 = nigdy niepracująca zawodowo	445 119 23
zwiazek	fakt pozostawania w związku małżeńskim	0 = nie 1 = tak	12 575
wyznanie	wyznanie	0 = inne niż rzymskokatolickie 1 = rzymskokatolickie	15 572

Źródło: obliczenia własne

W demografii za wiek rozrodczy kobiet przyjmuje się wiek od 15 do 49 roku życia, co oczywiście wynika z uwarunkowań biologicznych. W pracy [60], poświęconej metaanalizie trendów zmian płodności, autor rozważał liczbę dzieci kiedykolwiek urodzonych (CEB – Children Ever Born). Miernik ten może być używany w przypadku dowolnych grup wiekowych, jednak ze względu na cel badania autorzy uwzględnili tylko kobiety powyżej 40 roku życia. W naszym badaniu również uwzględniamy tylko kobiety, które okres prokreacyjny mają już za sobą. Na podstawie wstępnych obliczeń dla całego zbioru danych otrzymano, że wiek kobiety w chwili urodzenia ostatniego dziecka wynosi maksymalnie 44 lata. Uwzględniając to, postanowiono badaniu poddać 587 kobiet w wieku powyżej 44 lat. W badaniu zmienna objaśniana wyrażająca ogólną liczbę posiadanych dzieci przez kobiety przyjmuje wartości od 0 do 8.

3. METODA BADANIA

3.1. PODEJŚCIE BAYESOWSKIE

Podjęcie bayesowskie stanowi metodę analiz statystycznych alternatywną w stosunku do analiz częstościowych i jest obecnie stosowane na równi z podejściem kla-

sycznym. Łączenie subiektywnej wiedzy a priori z informacją pochodzącą z próby stanowi podstawę metod bayesowskich. Twierdzenie Bayesa przekształca posiadaną wiedzę przed obserwacją oraz informację zawartą w empirycznych danych w prawdopodobieństwo a posteriori. Wnioskowanie w statystyce bayesowskiej bazuje na tak otrzymanych rozkładach a posteriori.

Niech $\mathbf{Y}$ oznacza przestrzeń prób, Θ przestrzeń parametrów, a $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ rodzinę możliwych rozkładów prawdopodobieństwa na przestrzeni $\mathbf{Y}$. W estymacji bayesowskiej dodatkowo zakłada się istnienie pewnego rozkładu prawdopodobieństwa na pewnej klasie podzbiorów mierzalnych zbioru Θ . Rozkład ten nazywany jest rozkładem a priori parametru⁷ θ , opisuje on stopień naszej wiary w różne wartości parametru zanim zostaną wykonane odpowiednie obserwacje ([59]). Główną wadą analiz bayesowskich jest brak informacji dotyczących wyboru rozkładu a priori, o wyborze odpowiedniego rozkładu mogą decydować zdobyte doświadczenia oparte na wcześniejszych badaniach lub pewne logiczne przesłanki⁸. Warto podkreślić, że jeśli w wyniku doświadczenia otrzymuje się dostatecznie dużo informacji, to nawet dość znaczne zmiany rozkładu a priori nie pociągają za sobą większych zmian w rozkładach a posteriori ([59]).

Rozważmy estymację parametru θ na podstawie danych $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$. Jeśli przyjmiemy, że $p(\theta)$ oznacza rozkład a priori parametru θ , $p(\mathbf{y}|\theta)$ łączną funkcję prawdopodobieństwa lub gęstości zależną od parametru θ , to ze wzoru Bayesa warunkowy rozkład $p(\theta|\mathbf{y})$ parametru θ (rozkład a posteriori) wyznaczany jest w następujący sposób

$$p(\theta|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\theta) p(\theta)}{p(\mathbf{y})},$$

gdzie $p(\mathbf{y})$ oznacza rozkład brzegowy. Powyższy wzór z dokładnością do normalizującej stałej można zapisać w następującej postaci $p(\theta|\mathbf{y}) \propto L(\theta; \mathbf{y}) p(\theta)$, gdzie $L(\theta; \mathbf{y})$ oznacza funkcję wiarygodności parametru θ .

3.2. UOGÓLNIONY MODEL LINIOWY

Wykorzystany w pracy model regresji Poissona należy do klasy uogólnionych modeli liniowych. Uogólnione modele liniowe umożliwiają testowanie wpływu predyktorów jakościowych oraz ciągłych na zmienną zależną, której rozkład należy do rodziny rozkładów wykładniczych, ponadto zmienne niezależne mogą wpływać na zmienną zależną w sposób nieliniowy. Omawiane modele zostały po raz pierwszy przedstawione w pracach [51] i [53], dodatkowe informacje oraz przykłady zastosowań można również znaleźć m.in. w [15], [32] oraz [62].

⁷ Parametr θ traktowany jest jako zmienna losowa lub wektor losowy o określonym rozkładzie.

⁸ Przykłady zastosowań subiektywnych rozkładów a priori można znaleźć m.in. w pracach [8], [64] oraz [65].

Uogólniony model liniowy można zapisać w postaci macierzowej następującym wzorem:

$$g(\mathbf{E}(\mathbf{Y})) = \mathbf{X}\beta,$$

gdzie $\mathbf{Y}$ oznacza wektor wartości zmiennej zależnej, $\mathbf{E}(\mathbf{Y})$ wektor wartości oczekiwanych zmiennej zależnej, $\mathbf{X}$ macierz wartości zmiennych niezależnych, β wektor współczynników, a g funkcję wiążącą (np. [62]).

Podstawą definicji uogólnionych modeli liniowych jest założenie, że zmienna zależna ma rozkład należący do rodziny rozkładów wykładniczych. Jeśli rozkład prawdopodobieństwa zmiennej zależnej y ma rozkład prawdopodobieństwa należący do rodziny rozkładów wykładniczych, to można go przedstawić w następujący sposób:

$$f(y; \theta, \varphi) = \exp \left\{ \frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y, \varphi) \right\},$$

gdzie a , b i c są z góry ustalonymi funkcjami, θ jest kanonicznym parametrem, φ jest zaś parametrem skali, jeśli jest on nieznan, to traktowany jest jako parametr rozproszenia.

Istnieje wiele rozkładów prawdopodobieństwa, które można przedstawić w powyższej postaci. Przyjmując $\theta = \ln \lambda$, $\varphi = 1$, $a(\varphi) = \varphi$, $b(\theta) = \lambda$ oraz $c(y, \varphi) = -\ln(k!)$ otrzymujemy rozkład Poissona:

$$f(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \lambda > 0.$$

W zależności od rozkładu zmiennej zależnej można użyć różnych funkcji wiążących, dla rozkładu Poissona standardową funkcją wiążącą jest funkcja logarytmiczna.

3.3. MODEL REGRESJI POISSONA – PODEJŚCIE BAYESOWSKIE

Przedstawimy teraz model regresji Poissona w ujęciu bayesowskim. Rozważania dotyczące bayesowskich modeli regresji można znaleźć m.in. w [8], [14], [19] oraz [26].

Założmy, że zmienna losowa y_i , $i = 1, 2, \dots, n$ ma rozkład Poissona z parametrem⁹ λ_i . Wybierając za funkcję wiążącą funkcję logarytmiczną otrzymujemy $\ln(\lambda_i) = \sum_{j=1}^k x_{ij}\beta_j$, gdzie x_{ij} są zmiennymi objaśniającymi, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ wektorem nieznanym parametrów. Stąd $\lambda_i = \exp \left(\sum_{j=1}^k x_{ij}\beta_j \right)$. Przy przyjętych oznaczeniach funkcja wiarygodności dla wektora parametrów β ma następującą postać:

$$L(\beta; \mathbf{y}) = \left(\prod_{i=1}^n y_i! \right)^{-1} \exp \left(- \sum_{i=1}^n \exp \left(\sum_{j=1}^k x_{ij}\beta_j \right) + \sum_{j=1}^k \beta_j \sum_{i=1}^n x_{ij}y_i \right).$$

⁹ λ_i jest średnią i wariancją rozkładu Poissona.

Specyfikację rozkładów a priori dla parametrów regresji uogólnionych modeli liniowych można znaleźć w [14], zazwyczaj wybieramy rozkłady normalne ze średnią zero i pewną wariancją. We wnioskowaniu bayesowskim szczególną rolę odgrywają nieinformacyjne rozkłady a priori, niosące ze sobą minimalną wiedzę statystyczną, ale często zamiast nich stosujemy rozkłady wystarczająco mało informacyjne¹⁰. W pracy [38], autorzy pokazują, że użycie nieinformacyjnego jednostajnego rozkładu a priori w estymacji uogólnionych modeli liniowych może prowadzić do niewłaściwych rozkładów a posteriori, w tym przypadku alternatywnym wyjściem może być wykorzystanie reguły Jeffreysa ([39], [40]).

Przyjmując dla niezależnych parametrów $\beta_1, \dots, \beta_k$ rozkłady normalne a priori ze średnią m_j i wariancją σ_j^2 , otrzymujemy następujący wzór na łączną gęstość a priori

$$p(\beta_1, \dots, \beta_k) = \prod_{j=1}^k \frac{1}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_j^2} (\beta_j - m_j)^2\right).$$

Wówczas rozkład a posteriori można zapisać, z dokładnością do normalizującej stałej, w następującej postaci

$$p(\beta_1, \dots, \beta_k | \mathbf{y}) \propto \exp\left(-\sum_{j=1}^k \frac{1}{2\sigma_j^2} \beta_j^2 + \sum_{j=1}^k \left(\frac{m_j}{\sigma_j^2} + \sum_{i=1}^n x_{ij} y_i\right) \beta_j - \sum_{i=1}^n \exp\left(\sum_{j=1}^k x_{ij} \beta_j\right)\right).$$

Wnioskowanie o dowolnej współrzędnej wektora parametrów $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ odbywa się z brzegowego rozkładu a posteriori, otrzymanego poprzez całkowanie po pozostałych współrzędnych łącznego rozkładu a posteriori i tylko w podręcznikowych przykładach może opierać się jedynie na metodach analitycznych ([55]). W praktyce często wykorzystujemy metody symulacyjne, które umożliwiają generowanie prób losowych z dowolnej gęstości a posteriori. Obecnie dużą popularnością cieszą się metody Monte Carlo oparte na łańcuchach Markowa (Markov Chain Monte Carlo Method – MCMC). Podstawą metod MCMC jest generowanie ergodycznego łańcucha Markowa, który po upływie odpowiednio długiego czasu osiąga rozkład stacjonarny zwany w podejściu bayesowskim rozkładem a posteriori. Najbardziej znanym algorytmem tych metod obliczeniowych jest algorytm Metropolis oraz jego uogólnienie – algorytm Metropolis-Hastingsa. Natomiast szczególnym przypadkiem algorytmu Metropolis-Hastingsa jest próbnik Gibbsa.

W niniejszej pracy przy estymacji modeli skorzystano z losowania Gibbsa¹¹, którego schemat przedstawiamy poniżej. Rozważmy łączny rozkład a posteriori o gęstości $p(\beta | \mathbf{y})$, gdzie $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$, $k > 1$, jest wektorem parametrów.

¹⁰ W przypadku rozkładów normalnych dla średniej przyjmujemy wartość zero, a dla wariancji pewną dużą liczbę.

¹¹ Przykłady wnioskowania bayesowskiego dla uogólnionych modeli liniowych z wykorzystaniem próbnika Gibbsa można również znaleźć w pracy [11].

Kroki algorytmu Gibbsa (np. [11], [24], [58]):

1. Przyjmujemy $t = 0$. Wybieramy dowolne wartości początkowe

$$\beta^{(0)} = (\beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}, \dots, \beta_k^{(0)}).$$

2. Wygenerowanie jednej realizacji $\beta^{(t+1)} = (\beta_1^{(t+1)}, \beta_2^{(t+1)}, \dots, \beta_k^{(t+1)})$ wymaga następujących losowań z pełnych warunkowych rozkładów a posteriori:

$$\beta_1^{(t+1)} \sim p(\beta_1 | \beta_2^{(t)}, \dots, \beta_k^{(t)}, \mathbf{y})$$

$$\beta_2^{(t+1)} \sim p(\beta_2 | \beta_1^{(t+1)}, \beta_3^{(t)}, \dots, \beta_k^{(t)}, \mathbf{y})$$

...

$$\beta_k^{(t+1)} \sim p(\beta_k | \beta_1^{(t+1)}, \dots, \beta_{k-1}^{(t+1)}, \mathbf{y}).$$

3. Przyjmujemy $t = t + 1$ i wracamy do kroku drugiego, aż do uzyskania zbieżności algorytmu. Następnie krok drugi powtarzamy, aż do uzyskania pożądanej liczby realizacji.

Przedstawiony algorytm przy pewnych ogólnych warunkach jest zbieżny, zatem rozkład losowanego wektora $\beta^{(t)}$ dąży do rozkładu $p(\beta | \mathbf{y})$, gdy $t \rightarrow \infty$.

Istotną część analiz bayesowskich stanowi ocena zbieżności wygenerowanych łańcuchów. W teorii próbnik może działać w nieskończoność, wówczas zbieżność jest osiągnięta, w praktyce konieczne jest ustalenie pewnej liczby cykli spalonych (wstępnych), a do wnioskowania a posteriori wykorzystujemy tylko te właściwe realizacje. W ocenie zbieżności łańcucha Markowa istnieją pewne trudności, ponieważ brakuje decydujących testów, które rozstrzygają, czy łańcuch dąży do rozkładu stacjonarnego, dostępne testy sprawdzają na ogół tylko warunek konieczny zbieżności. Do najbardziej znanych testów, które umożliwiają ocenę zbieżności łańcucha Markowa w różnych aspektach należą: test Gelmana i Rubina ([10], [27]), test Geweke'a ([29]), test Heidelbergera i Welcha ([33], [34]) oraz test Raftery'a i Lewisa ([56], [57]).

4. BUDOWA, ESTYMACJA I OCENA MODELU

Estymacja i weryfikacja wszystkich modeli została przeprowadzona przy użyciu systemu SAS, w estymacji bayesowskiej wykorzystano metody Monte Carlo oparte na łańcuchach Markowa. Metody te są obecnie coraz częściej wykorzystywane w statystyce bayesowskiej do wyznaczania rozkładów a posteriori, jednak w literaturze rzadko wspomina się o badaniu zbieżności wygenerowanych łańcuchów. Wnioskowanie w estymacji bayesowskiej przy niesprawdzonych zbieżnościach dla wszystkich parametrów

modelu może prowadzić do błędnych wniosków. Ponieważ różne testy badają różne aspekty zbieżności łańcuchów i brakuje testów jednoznacznie rozstrzygających, czy wygenerowany łańcuch osiągnął rozkład stacjonarny, w niniejszej pracy wykorzystano trzy metody oceny zbieżności.

Budowę modelu wykorzystanego w badaniu rozpoczęto od oszacowania kilku modeli regresji Poissona metodą klasyczną. Następnie korzystając z podstawowych miar dobroci dopasowania do obserwowanych danych (np. [62]) oraz badając korelację między zmiennymi wybrano najlepszy model.

W estymacji bayesowskiej, w celu porównania wrażliwości wyników na zmiany założeń dotyczących rozkładów a priori, estymowano dwa modele. W pierwszym modelu przyjęto nieinformacyjne rozkłady a priori dla wszystkich parametrów modelu, w drugim modelu oprócz nieinformacyjnych rozkładów a priori wykorzystano również informacyjny rozkład a priori (por. [8]). W symulacji jako wartości inicjujące dla pierwszego łańcucha przyjęto wartości parametrów estymowanych metodą największej wiarygodności. Ponadto, aby zminimalizować wpływ oddziaływania tych wartości początkowych na wnioskowanie a posteriori przyjęto, że liczba cykli spalonych ma wynosić 2000, a liczba właściwych realizacji do wnioskowań a posteriori 10000.

Dla wstępnego modelu zadano nieinformacyjny rozkład normalny a priori ze średnią równą 0 i wariancją 10^6 dla wszystkich parametrów regresji: $p(\beta) \sim N_9(\mathbf{0}, 10^6 \mathbf{I})$.

Wyniki estymacji modelu ze wszystkimi zmiennymi zawiera tabela 2.

Tabela 2.

Parametr	Wartości oczekiwane a posteriori	Odchylenia standardowe a posteriori	Obszary największej gęstości a posteriori ¹²	
Wyraz wolny	-0.9426	0.3618	-1.6958	-0.2489
m.zamieszkania	0.3097	0.0588	0.1932	0.4232
wykształcenie1	0.3835	0.1211	0.1600	0.6441
wykształcenie2	0.2126	0.1276	-0.0285	0.4787
wykształcenie3	0.2054	0.1222	-0.0256	0.4568
zatrudnienie1	0.1164	0.1342	-0.1609	0.3601
zatrudnienie2	0.1428	0.1440	-0.1459	0.4128
zwiazek	1.0258	0.3079	0.4710	1.7063
wyznanie	0.2812	0.1575	-0.0447	0.5758

Źródło: obliczenia własne

Na podstawie otrzymanych obszarów największej gęstości a posteriori można stwierdzić ([8]), że zmienne *zatrudnienie* oraz *wyznanie* są statystycznie istotne,

¹² Obszary największej gęstości a posteriori (HPD) zostały wyznaczone przy $\alpha = 0.05$ dla wszystkich parametrów modelu, w kolejnych estymacjach wartość ta pozostaje bez zmian.

zatem oszacowano kolejny model bez uwzględnienia tych zmiennych. Ponownie zadano nieinformacyjny rozkład normalny a priori ze średnią równą 0 i wariancją 10^6 dla wszystkich parametrów regresji: $p(\beta) \sim N_6(\mathbf{0}, 10^6 \mathbf{I})$. Wyniki estymacji nowego modelu zostały przedstawione w tabeli 3.

Tabela 3.

Parametr	Wartości oczekiwane a posteriori	Odchylenia standardowe a posteriori	Obszary największej gęstości a posteriori	
Wyraz wolny	-0.5530	0.3270	-1.2238	0.0386
m_zamieszkania	0.2928	0.0579	0.1872	0.4134
wykształcenie1	0.3856	0.1248	0.1541	0.6422
wykształcenie2	0.2178	0.1323	-0.0272	0.4930
wykształcenie3	0.2047	0.1262	-0.0359	0.4587
zwiazek	1.0337	0.3083	0.4857	1.7081

Źródło: obliczenia własne

Następnie estymowano kolejny model, do którego włączono dodatkową wiedzę spoza próby. Subiektywny rozkład a priori przyjęto w oparciu o informacje zawarte w publikacji [2] oraz na podstawie danych GUS. Dla parametru *m_zamieszkania* zadano rozkład normalny a priori ze średnią równą 0.398645 oraz wariancją równą 0.00374. Dla wszystkich pozostałych współczynników regresji przyjęto nieinformacyjny rozkład normalny a priori ze średnią równą 0 i wariancją 10^6 . Niestety wygenerowane łańcuchy dla niektórych parametrów modelu charakteryzowały się wysoką autokorelacją i nie były zbieżne, zatem estymowano kolejny model znacznie zwiększając liczbę iteracji. Charakterystyki pięćdziesięciotysięcznych prób a posteriori przedstawiono w tabeli 4.

Tabela 4.

Parametr	Wartości oczekiwane a posteriori	Odchylenia standardowe a posteriori	Obszary największej gęstości a posteriori	
Wyraz wolny	-0.5049	0.3143	-1.1470	0.1015
m_zamieszkania	0.3169	0.0277	0.2644	0.3551
wykształcenie1	0.3781	0.1236	0.1359	0.6173
wykształcenie2	0.2152	0.1313	-0.0411	0.4736
wykształcenie3	0.2062	0.1265	-0.0385	0.4561
zwiazek	0.9787	0.2989	0.4179	1.5929

Źródło: obliczenia własne

Dla dwóch ostatnich modeli otrzymano podobne wartości charakterystyk oraz własności wygenerowanych prób a posteriori z niewielkim wskazaniem na ostatni mo-

del. Zatem w pracy poddano interpretacji i ocenie ostatni model, również z powodu uwzględnienia w nim dodatkowej wiedzy a priori.

W badaniach zbieżności wygenerowanych łańcuchów w przypadku modeli wielu parametrów często stosowany jest test Gelmana i Rubina ([10], [27]), który bazuje na wielokrotnych symulacjach łańcuchów MCMC dla tych samych parametrów przy wyborze różnych wartości inicjujących. Istota tego testu polega na porównaniu wariancji wewnątrz łańcucha z wariancją między tymi łańcuchami. Duże różnice pomiędzy tymi dwiema wariancjami wskazują na brak zbieżności łańcucha. Przedstawione w tabeli 5 wartości wskazują na zbieżności wszystkich wygenerowanych łańcuchów.

Tabela 5.

Parametr	Oszacowanie	97.5% ograniczenie górne
Wyraz wolny	1.0183	1.0465
m_zamieszkania	1.0000	1.0001
wykształcenie1	1.0011	1.0040
wykształcenie2	1.0010	1.0036
wykształcenie3	1.0008	1.0028
zwiazek	1.0172	1.0421

Źródło: obliczenia własne

Najprostszym testem, pozwalającym wnioskować, czy wygenerowany łańcuch osiągnął rozkład stacjonarny jest test Geweke'a ([29]). Oparty jest on na porównaniu wartości średniej dla początkowych realizacji łańcucha z wartością średniej dla dalszych realizacji łańcucha. Statystyka testowa ma asymptotyczny standardowy rozkład normalny. Na podstawie wyników przedstawionych w tabeli 6 stwierdzono brak podstaw do odrzucenia hipotezy, że wygenerowane łańcuchy dla poszczególnych parametrów modelu są zbieżne, przy dowolnym poziomie istotności.

Tabela 6.

Parametr	z	Pr > z
Wyraz wolny	1.1757	0.2397
m_zamieszkania	1.3187	0.1873
wykształcenie1	0.2703	0.7869
wykształcenie2	0.2815	0.7783
wykształcenie3	0.3184	0.7501
zwiazek	-1.3635	0.1727

Źródło: obliczenia własne

Test Geweke'a bada zbieżność wygenerowanych łańcuchów, test Heidelberga-Welcha ([33], [34]) ocenia również, czy otrzymany łańcuch jest wystarczający do estymacji średniej zadaną dokładnością. Test Heidelberga-Welcha składa się z dwóch części: testu stacjonarności (stationarity test) i testu półszerokości (halfwidth test). Test stacjonarności testuje hipotezę, że łańcuch Markowa jest zbieżny do rozkładu stacjonarnego, natomiast test półszerokości sprawdza, czy liczność próby a posteriori jest wystarczająca, aby estymować wartość średnią zadaną dokładnością. Otrzymano (tabela 7), że brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy o zbieżności łańcuchów dla wszystkich parametrów modelu, przy dowolnym poziomie istotności, ponadto liczebności prób a posteriori są wystarczające do oszacowania średniej z dokładnością 0.05.

Reasumując można przyjąć, że otrzymane próby a posteriori są odpowiednie do wnioskowań statystycznych.

Tabela 7.

Parametr	Test stacjonarności		Test półszerokości		
	Statystyka Cramera-von Misesa		Połowa szerokości przedz. ufności	Średnia	Względna półszerokość
	Stat.	Poziom p			
Wyraz wolny	0.0956	0.6071	0.0441	-0.5049	-0.0874
m.zamieszkania	0.1336	0.4435	0.000269	0.3169	0.000849
wykształcenie1	0.2798	0.1543	0.00548	0.3781	0.0145
wykształcenie2	0.3140	0.1235	0.00536	0.2152	0.0249
wykształcenie3	0.2907	0.1436	0.00539	0.2062	0.0262
zwiazek	0.0761	0.7150	0.0428	0.9787	0.0437

Źródło: obliczenia własne

5. ANALIZA WYNIKÓW ESTYMACJI I WNIOSKI

Rozważania na temat płodności można prowadzić w wielu aspektach, w niniejszej pracy w modelowaniu liczby posiadanych dzieci przez kobiety uwzględniono następujące determinanty: miejsce zamieszkania, wykształcenie, fakt pozostawania w związku małżeńskim, zatrudnienie oraz wyznanie. Otrzymano, że dwie ostatnie zmienne oraz dwa poziomy zmiennej wykształcenie nie mają statystycznego wpływu na modelowaną zmienną.

Bardziej szczegółowa analiza otrzymanych rezultatów wymaga dodatkowych obliczeń, których wyniki przedstawiono w tabeli 8.

Analizując od roku 1950 wartości współczynników dzietności ([2], [36], [44]) można zaobserwować znaczące różnice w płodności pomiędzy miastem i wsią. Użyte w niniejszej pracy wyniki potwierdzają wspomniane różnice w zachowaniach

prokreacyjnych pomiędzy kobietami zamieszkującymi miasta i wsie. Otrzymano, że kobiety mieszkające na wsi posiadają o około 37% więcej dzieci niż kobiety mieszkające w miastach. Natomiast bez uwzględnienia dodatkowej wiedzy a priori (por. tabela 3) otrzymano, że ta różnica jest mniejsza i wynosi blisko 34%. Uzyskany wynik jest zgodny z założeniami ekonomicznej teorii płodności zarówno Lebensteina jak i Beckera. W badanym okresie dzieci na wsi pracowały, zatem o ich liczbie mogli decydować spodziewane dochody rodziny uzyskane z przyszłej pracy dziecka.

Tabela 8.

Parametr	Wartości oczekiwane a posteriori ¹³	Exp(Wartości oczekiwane a posteriori)
m_zamieszkania	0.3169	1.3729
wykształcenie1	0.3781	1.4595
wykształcenie2	0.2152	1.2401
wykształcenie3	0.2062	1.2290
zwiazek	0.9787	2.6610

Źródło: obliczenia własne

Zgodne z teorią Beckera ([5]) oraz innymi badaniami dotyczącymi Polski są również otrzymane wyniki dotyczące wpływu wykształcenia na płodność – im wyższy poziom wykształcenia, tym mniejsza liczba posiadanych dzieci (np. [2]). Zatem potwierdziło się wcześniejsze przypuszczenie, że niższy poziom wykształcenia w porównaniu z wykształceniem wyższym skutkuje większą liczbą posiadanych dzieci, różnica ta pomiędzy kobietami z wykształceniem podstawowym i wyższym wynosi około 46%. Ponadto otrzymaliśmy, że dwa poziomy wykształcenia: zasadnicze i średnie nie mają istotnego wpływu na liczbę posiadanych dzieci. Odwołując się do koncepcji drugiego przejścia demograficznego można stwierdzić, że coraz większe pozytywne zmiany w aspiracjach edukacyjnych społeczeństwa niestety skutkują obniżeniem płodności.

Pomimo, że zdarzenia takie jak zawarcie małżeństwa i urodzenie dziecka niekoniecznie są ze sobą powiązane, to jednak w większości krajów ciągle wyższy współczynnik dzietności występuje wśród małżeństw. Również w Polsce w całym okresie powojennym płodność pozostaje w bardzo silnym związku z małżenością ([2]). Z drugiej strony od roku 1980 obserwowany jest ciągły wzrost urodzeń pozamałżeńskich, co niewątpliwie świadczy o zachodzących przemianach społecznych. W badaniu otrzymano, że kobiety będące kiedykolwiek w związku małżeńskim mają przeszło dwu i półkrotnie więcej dzieci niż pozostałe kobiety. Zatem można przypuszczać, że posiadanie kolejnego dziecka przez kobiety zamężne jest dużo bardziej prawdopodobne niż w przypadku pozostałych kobiet. Pozytywny wpływ związku małżeńskiego na

¹³ Wartości z tabeli 4.

dziatność jest również zauważalny w innych krajach, ale skala tego wpływu jest różna ([35]).

Analizy wzajemnych powiązań pomiędzy płodnością a aktywnością zawodową są przedmiotem wielu badań prowadzonych głównie dla krajów Europy zachodniej. Obserwowany w Polsce w latach 1960-1988 wzrost udziału kobiet w rynku pracy ([36]) i spadek płodności ([2]) sugerują konflikt pomiędzy macierzyństwem, a pracą. Potwierdza to raport ONZ (1985), według którego wzrost liczby kobiet pracujących jest powiązany ze spadkiem poziomu płodności. Wyniki przedstawione w tabeli 2 wskazują na nieistotną dodatnią zależność pomiędzy liczbą dzieci a sytuacją na rynku pracy, co może sugerować, że kobiety, które kiedykolwiek pracowały posiadają większą liczbę dzieci. Nieistotność rozważanej determinanty w Polsce można tłumaczyć tym, że w warunkach gospodarki centralnie planowanej rozwiązania w sferze polityki rodzinnej przenosiły role opiekuńczo-wychowawcze z rodziców na państwo poprzez szeroki dostęp do instytucji usług społecznych (żłobki, przedszkola, szkoły, zajęcia pozalekcyjne), zatem urodzenie dziecka nie musiało wiązać się z rezygnacją z pracy. Dodatnia zależność pomiędzy zatrudnieniem a płodnością dla innych krajów została również przedstawiona w publikacjach [9] i [61], szersze rozważania na ten temat można także znaleźć w pracy [35], w której uzyskano jednak odwrotną zależność.

Nieistotność zmiennej wyznaczenie nie potwierdza wcześniejszych przypuszczeń, że kobiety wyznania rzymskokatolickiego mogą posiadać większą liczbę dzieci. Może to wynikać z tego, że około 98% Polaków deklaruje, że jest wyznania rzymskokatolickiego ([25]), zatem pewne wzorce zachowań mogą być przyjmowane przez resztę społeczeństwa.

Przedstawione rezultaty określają wpływ różnych determinant na płodność w Polsce i stanowią uzupełnienie dotychczas prezentowanych w literaturze analiz. Wykorzystany w badaniu model regresji Poissona bada nie tylko kierunek zależności, ale również jej siłę, co umożliwia głębszą analizę rozważanych powiązań, natomiast podejście bayesowskie daje możliwość włączenia do modelu informacji pochodzących z innych badań oraz lepsze oszacowanie parametrów modelu ([19]). Przedstawione w literaturze wyniki (np. [35]) wskazują na to, że w poszczególnych krajach i okresach badane zależności między różnymi cechami a płodnością nie zawsze są identyczne, co więcej mogą mieć kierunek dodatni lub ujemny. Zatem warto badać te zależności dla Polski, ponieważ wyniki nie zawsze są oczywiste i zgodne z powszechnie przyjętymi przekonaniami.

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

LITERATURA

- [1] Adelman I., *An Econometric Analysis of Population Growth*. The American Economic Review, Vol. 54, No. 2, 314-339, 1963.
- [2] Balicki J., Frątczak E., Nam Ch.B., *Przemiany ludnościowe*. Fakty – Interpretacje – Opinie. Wydawnictwo Uniwersytetu Karola Stefana Wyszyńskiego w Warszawie, 2007.

- [3] Becker G.S., *A treatise on the family*. Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1981.
- [4] Becker G.S., *Ekonomiczna teoria zachowań ludzkich*. PWN, 1990.
- [5] Becker G.S., *Human capital: A theoretical and empirical analysis with special reference to education*. The University of Chicago Press, 1993.
- [6] Becker G.S., Barro R.J., *A Reformulation of the Economic Theory of Fertility*. The Quarterly Journal of Economics, Vol. 103, No.1, 1-25, 1988.
- [7] Bernardo J., Smith A., *Bayesian Theory*. A John Wiley & Sons, 2004.
- [8] Bolstad W.M., *Introduction to Bayesian statistics*. A John Wiley & Sons, 2007.
- [9] Brewster K.L., Rindfuss R.R., *Fertility and women's employment in industrialized nation*. Annual Review of Sociology, 26, 271-296, 2000.
- [10] Brookes S., Gelman A., *General methods for monitoring convergence of iterative simulations*. Journal of Computational and Graphical Statistics, 7, 434-455, 1998.
- [11] Casella G., George E.I., *Explaining the Gibbs sampler*. The American Statistician, 46, 167-74, 1992.
- [12] Coleman J.S., *Foundations of social theory*. Cambridge. Harvard University Press, 1990.
- [13] Dellaportas P., Smith A.F.M., *Bayesian inference for generalized linear models and proportional hazard models via Gibbs sampling*. Applied Statistics, Vol. 42, No. 3, 443-459, 1993.
- [14] Dey D.K., Ghosh S.K., Mallick B.K., *Generalized Linear Models: A Bayesian Perspective*, New York: Marcel Decker, 2000.
- [15] Dobson A.J., *An introduction to generalized linear models*. Chapman & Hall, 1991.
- [16] Doss H., Narasimhan B., *Bayesian Poisson regression using the Gibbs sampler: Sensitivity analysis through dynamic graphics*. Technical report, Penn State Erie, 1994.
- [17] Easterlin R.A., *The Economics and Sociology of Fertility: A Synthesis*. Tilly Ch. (Red.) Historical Studies of Changing Fertility, Princeton, 1979.
- [18] Easterlin R.A., *Birth and fortune: the impact of numbers on personal welfare*. Basic Books, 1987.
- [19] El-Sayyad G.M., *Bayesian and classical analysis of Poisson regression*. Journal of Royal Statistical Society. Series B. Vol. 35, No. 3, 445-451, 1973.
- [20] Frątczak E., *Modelowanie cyklu życia jednostki i rodziny teoria i praktyka*. Oficyna Wydawnicza SGH, 1999.
- [21] Frątczak E., Józwiak J., Paszek B., *Zastosowania analizy historii zdarzeń w demografii*. Oficyna Wydawnicza SGH, 1996.
- [22] Frątczak E., Kowalska I., Götz R., Drobnič S., Blossfeld H.P., *Polish family and fertility survey. A user' guide*. Warsaw and Bremen, 1996.
- [23] Frątczak E., Sobczak I. (Red.), *Dzietność kobiet polskich w okresie transformacji ustrojowej*. Polskie Towarzystwo Demograficzne, 2000.
- [24] Gamerman D., Lopes H., *Markov Chain Monte Carlo: stochastic simulation for Bayesian inference*. Chapman & Hall (CRC Press), 2006.
- [25] Gawryszewski A., *Ludność Polski w XX Wieku*. Instytut Geografii i Przestrzennego Zagospodarowania im. Stanisława Leszczyckiego, PAN, 2005.
- [26] Gelman A., Carlin J.B., Stern H.S., Rubin D.B., *Bayesian data analysis*. Chapman & Hall/CRC, 2000.
- [27] Gelman A., Rubin D., *Inference from iterative simulation using multiple sequences*. Statistical Science, 7, 457-72, 1992.
- [28] Geman S., Geman D., *Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of image*. IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 6, 721-741, 1984.
- [29] Geweke J., *Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to calculating posterior moments*. Bayesian Statistics, 4, 169-193, 1992.
- [30] Gilks W., Best N., Tan K., *Adaptive rejection Metropolis sampling with Gibbs sampling*. Applied Statistics, 44, 455-472, 1995.

- [31] Gilks W., Wild P., *Adaptive rejection sampling for Gibbs sampling*. Applied Statistics, 41, 337-348, 1992.
- [32] Hardin J.W., Hilbe J.M., *Generalized linear models and extensions*. Stata Press, 2007.
- [33] Heidelberger P., Welch P., *A spectral method for confidence interval generation and run length control in simulations*. Communication of the ACM, 24, 233-245, 1981.
- [34] Heidelberger P., Welch P., *Simulation run length control in the presence of an initial transient*. Operation Research, 31, 1109-1144, 1983.
- [35] Hilgeman Ch., Butts C.T., *Women's employment and fertility: A welfare regime paradox*. Social Science Research, Vol. 38, Issue 1, 103-117, 2009.
- [36] Holzer J.Z., *Demografia*. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa, 2003.
- [37] Holzer J.Z., Kowalska I., *Fertility and family surveys in countries of the ECE region*. Standard country report, Poland, UNECE, UNPF, 1997.
- [38] Ibrahim J.G., Laud P.W., *On Bayesian analysis of generalized linear models using Jeffreys's prior*. Journal of the American Statistical Association, Vol. 86, No. 416, 981-986, 1991.
- [39] Jeffreys H., *An invariant form for the prior probability in estimation problems*. Proceedings of the Royal Society of London, Ser. A 186, 453-461, 1946.
- [40] Jeffreys H., *Theory of probability*. New York: Oxford University Press, 1961.
- [41] Kaplan H., *Evolutionary wealth flows theories of fertility: empirical test and new models*. Population and development Review, 20 (4), 1994.
- [42] Klasen S., Launov A., *Analysis of the Determinants Fertility Decline in the Czech Republic*. Journal of Population Economy, Vol. 19, 25-54, 2006.
- [43] Kotowska I.E. (Red.), *Przemiany demograficzne w Polsce w latach 90.w świetle koncepcji drugiego przejścia demograficznego*. Oficyna Wydawnicza SGH, 1999.
- [44] Kotowska I.E., Józwiak J., Matysiak A., Baranowska A., *Poland: Fertility decline as a response to profound societal and labour market changes?* Demographic Research, Vol.19, Article 22, 795-854, 2008.
- [45] Kurkiewicz J., *Modele przemian płodności w wybranych krajach europejskich w świetle drugiego przejścia demograficznego*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, 1998.
- [46] Leibenstein H., *Rozwój i zacołanie gospodarcze*. Studia z teorii rozwoju gospodarczego, 1963.
- [47] Lesthaeghe R., *A century of demographic and cultural change in Western Europe, an exploration of underlying dimensions*. Population and Development Review, 9 (3), 411-435, 1983.
- [48] Lesthaeghe R., *The second demographic transition in Western Countries: An interpretation*. Interuniversity Programme in Demography. Working Paper, No. 2, 1991.
- [49] Lesthaeghe R., Surkyn J., *Cultural dynamics and economic theories of fertility change*. Population and Development Review, 14 (1), 1-45, 1988.
- [50] Lynch S.M., *Introduction to applied Bayesian statistics and estimation for social scientists*. Springer, 2007.
- [51] McCullagh P., Nelder J.A., *Generalized linear models*. Chapman & Hall, 1989.
- [52] Montgomery M.R., Casterline J.B., *Social Influence, Social Learning and New models of fertility*. Population and Development Review, Vol. 22, 151-175, 1996.
- [53] Nelder J.A., Wedderburn R.W.M., *Generalized linear models*. J. R. Statist. Soc. A, 135, 370-384, 1972.
- [54] Oláh L.Sz., Frątczak E., *Becoming a Mother in Hungary and Poland during State Socialism*. Demographic Research, Special Collection 3, Article 9, 211-244, 2004.
- [55] Osiewalski J., *Ekonometria bayesowska w zastosowaniach*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, 2001.
- [56] Raftery A., Lewis S., *One long run with diagnostics: implementation strategies for Markov Chain Monte Carlo*. Statistical Science, 7, 493-497, 1992.

- [57] Raftery A., Lewis S., *The number of iterations, convergence diagnostics and generic Metropolis Algorithms*. In Gilks W., Spiegelhalter D., Richardson S., editors, *Practical Markov Chain Monte Carlo*, London, UK: Chapman & Hall, 1995.
- [58] Robert C., Casella G., *Monte Carlo statistical methods*. Springer Texts in Statistics, 2004.
- [59] Silvey S.D., *Wnioskowanie statystyczne*, PWN, 1978.
- [60] Skirbekk V., *Fertility trends by social status*. Demographic Research. Vol. 18, Article 5, 145-180, 2008.
- [61] Sleebos J.E., *Low fertility rates in OECD countries*. Facts and Policy Responses. Organization for Co-operation and Development, 2003. <http://www.oecd.org/dataoecd/13/38/16587241.pdf>
- [62] Stanisław A., *Przystępny kurs statystyki z zastosowaniem STATISTICA PL na przykładach z medycyny*. Tom 2. StatSoft, 2007.
- [63] Szoltysek M., *Rozrodczość w perspektywie ekonomicznej i demografia przeszłości*. Roczniki Dziejów Społecznych i Gospodarczych. Vol. 65, 25-53, 2005.
- [64] Szreder M., *Informacje a priori w klasycznej i bayesowskiej estymacji modeli regresji*. Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, 1994.
- [65] Szreder M., Osiewalski J., *Przykład bayesowskiej estymacji modelu rynku w nierównowadze z wykorzystaniem subiektywnych rozkładów a priori*. Przegląd Statystyczny, Nr 3-4, 1991.
- [66] Van de Kaa D.J., *Europe's second demographic transition*. Population Bulletin, Vol. 42, No. 1, 1987.
- [67] Van de Kaa D.J., *Post modern fertility preferences: from changing value orientation to new behaviour*. Population and Development Review (supplement), Vol.27, 290-331, 2001.
- [68] Wang W., Famoye F., *Modeling household fertility decisions with generalized Poisson regression*. Journal of Population Economics, 10, 273-283, 1997.

ANALIZA PŁODNOŚCI KOBIEC W POLSCE Z WYKORZYSTANIEM BAYESOWSKIEGO MODELU REGRESJI POISSONA

Streszczenie

Celem niniejszej pracy jest zbadanie zachowań prokreacyjnych Polek poprzez identyfikację czynników je determinujących z wykorzystaniem metod bayesowskich. W pracy zastosowano bayesowski model regresji Poissona. Wybrany model umożliwił określenie kierunku i skali wpływu wybranych czynników na liczbę dzieci posiadanych przez kobiety. Natomiast podejście bayesowskie dało możliwość włączenia do modelu informacji a priori oraz lepsze oszacowanie parametrów modelu. W estymacji wykorzystano metody Monte Carlo oparte na łańcuchach Markowa, a w szczególności próbnik Gibbsa.

Badanie przeprowadzono na podstawie danych indywidualnych pochodzących z polskiego badania retrospektywnego „Przemiany rodziny i wzorce dzietności w Polsce” (1991). W analizie płodności kobiet uwzględniono następujące czynniki: miejsce zamieszkania, wykształcenie, fakt pozostawania w związku małżeńskim, zatrudnienie oraz wyznanie. Otrzymane rezultaty porównano z dotychczasowymi wynikami badań dla Polski i innych krajów.

Słowa kluczowe: płodność, model regresji Poissona, wnioskowanie bayesowskie, metody Monte Carlo oparte na łańcuchach Markowa

FERTILITY ANALYSIS OF WOMEN IN POLAND USING BAYESIAN POISSON REGRESSION MODEL

A b s t r a c t

The primary objective of the work is to use Bayesian methods to investigate women fertility in Poland and identify key factors influencing it. Bayesian Poisson regression model has been used in the analysis. The model allows determining factors that have a significant impact on the number of children born. Moreover Bayesian approach makes it possible to incorporate a priori knowledge and improve the estimation of model parameters. The model has been estimated using Markov chain Monte Carlo method with Gibbs sampling.

The work has been based on the Polish study "Family changes and Fertility Patterns in Poland" (1991). The following attributes have been considered in the analysis of women fertility: place of living, education, marital status, employment and religion. The results have been compared with the results of related research for Poland and other countries.

Key words: fertility, Poisson regression model, Bayesian inference, Markov chain Monte Carlo method

POLSCY STATYSTYSTYCY I MATEMATYCY



Prof. zw. dr hab. Kazimierz Zając
20.09.1916 – 06.05.2012

Wspomnienie Profesora Kazimierza ZAJĄCA

Profesor Kazimierz Zając – doktor habilitowany nauk ekonomicznych, emerytowany profesor zwyczajny Akademii Ekonomicznej w Krakowie, doktor *honoris causa* Akademii Ekonomicznej w Katowicach.

Profesor Kazimierz Zając należał do grona najwybitniejszych profesorów krakowskiej uczelni ekonomicznej i w ciągu 40 lat pracy zawodowej był współtwórcą jej wysokiej pozycji naukowej i dydaktycznej w kraju i za granicą.

Profesor Zając wniósł istotny wkład w rozwój statystyki i ekonometrii polskiej, przez swoje prace naukowe a przede wszystkim przez kształcenie kadr naukowych oraz organizowanie życia naukowego w środowisku metod ilościowych.

Jego życie przebiegało w burzliwym i trudnym XX wieku i wymagało hartu ducha i zdecydowanej postawy moralnej, aby przejść przez kolejne jego okresy. Urodził się dnia 20 września 1916 roku w Krośnie w rodzinie robotniczo-chłopskiej. Tam uczęszczał do szkoły podstawowej i gimnazjum zdając maturę w 1937 roku. Po maturze odbył obowiązkową roczną służbę wojskową i uzyskał stopień wojskowy kaprała rezerwy. W 1938 roku rozpoczął studia wyższe na Akademii Handlowej w Krakowie.

II wojnę światową przeżył w Krośnie. Pracował w Miejskiej Publicznej Szkole Handlowej w Krośnie w charakterze nauczyciela, uczył księgowości. Równocześnie prowadził tajne nauczanie i uczestniczył w pracach Polskiego Czerwonego Krzyża, organizując pomoc na rzecz oficerów polskich przebywających w obozach jenieckich. Był żołnierzem Armii Krajowej – Obwód Krosno, pod pseudonimem „Konrad”. Pełnił funkcję adiutanta dowódcy placówki Centrum Krosno. Pod koniec wojny otrzymał nominację na stopień kapitana.

Profesor Kazimierz Zając swoje życie zawodowe związał z Krakowem oraz z jego uczelnią ekonomiczną. Studiował na Akademii Handlowej na kierunku konsularnym w latach 1938/39 oraz 1945-1945/46, wiążąc po wojnie swoje studia i zainteresowania naukowe z Profesorem Jerzym Fierichem, ówczesnym Kierownikiem Katedry Ekonomii Akademii Handlowej. Już w czasach studenckich zainteresował się badaniami statystycznymi i z tego zakresu przedstawił pracę magisterską pt. „Ruch płac nominalnych i realnych robotników przemysłu naftowego w Krośnie w latach 1927-1945”. Dnia 31 maja 1947 roku, po przedstawieniu wymienionej pracy i zdaniu egzaminów z postępowaniem bardzo dobrym: z ekonomii, polityki ekonomicznej wraz z skarbowością, statystyki matematycznej i naukowych metod badania koniunktur, statystyki gospodarczej, spółdzielczości, ustroju i zadań samorządu, geografii gospodarczej, uzyskał na kierunku konsularnym Akademii Handlowej w Krakowie stopień naukowy magistra nauk ekonomiczno-handlowych.

Jeszcze w trakcie studiów, w 1946 roku, podjął pracę w charakterze asystenta-wolontariusza w Katedrze Ekonomii, a po ich ukończeniu w 1947 r. został asystentem. Bezpośrednio po ukończeniu studiów magisterskich podjął studia doktoranckie w Szkole Głównej Handlowej w Warszawie uczestnicząc w seminarium doktorskim z ekonomii u Profesora Edwarda Lipińskiego, studia te odbywał w latach 1947-1948. W roku 1949 złożył Prof. Lipińskiemu rękopis pracy doktorskiej, niestety była to praca z ekonomii klasycznej i jako niemarksistowska „burżuazyjna” ekonomia nie mogła być przedstawiona do dalszego postępowania w rozpoczynającym się okresie stalinowskim.

W 1950 roku wobec szykan pod adresem Prof. J. Fiericha, jako przedstawiciela niesłusznej, burżuazyjnej teorii ekonomii, wraz z Profesorem odszedł z Katedry Ekonomii, która stała się katedrą ekonomii marksistowskiej, do nowo utworzonej Katedry Statystyki. Taki był początek istnienia Katedry Statystyki na Wyższej Szkole Ekono-

micznej w Krakowie. W latach 1954-1961 pracował w niej na stanowisku zastępcy profesora.

Przełom „października 1956 roku” przyniósł odejście od „okresu błędów i wypaczeń” okresu stalinowskiego. Nastąpił powrót do prowadzenia badań statystycznych. W pierwszym szeregu młodych statystyków prowadzących badania był mgr Kazimierz Zając, który w swojej pracy doktorskiej przeprowadził, zakazaną w poprzednim okresie, analizę statystyczną płac roboczych, nawiązując tym samym do tematyki swojej pracy magisterskiej. Profesor Kazimierz Zając otrzymał w dniu 26 czerwca 1957 r. stopień Kandydata (Doktora) Nauk Ekonomicznych na podstawie złożonych egzaminów oraz pracy pt. „Analiza płac roboczych w przemyśle na podstawie badań statystycznych”, nadany przez Radę Wydziału Towaroznawstwa Wyższej Szkoły Ekonomicznej w Krakowie, uchwałą z dnia 17 lutego 1958 r., zatwierdzoną przez Centralną Komisję Kwalifikacyjną dla Pracowników Nauki. Promotorem pracy był prof. dr inż. Jerzy Fierich.

W pięć lat po uzyskaniu stopnia naukowego doktora Profesor Zając habilitował się na podstawie pracy: *Ekonometryczne metody badania budżetów domowych*, Zeszyty Naukowe WSE w Krakowie, seria specjalna: Monografie nr 3, 1963 r. W 1965 roku, po śmierci Profesora Jerzego Fiericha został Kierownikiem Katedry Statystyki, którą kierował aż do przejścia w 1986 roku na emeryturę. Tytuł naukowy profesora nadzwyczajnego otrzymał w roku 1971, tytuł naukowy profesora zwyczajnego w roku 1976.

Przechodząc do syntetycznego przypomnienia wkładu naukowego Profesora Kazimierza Zająca w rozwój badań statystyczno-ekonometrycznych należy wymienić główne nurty Jego twórczości naukowej. Niewątpliwie jest on pionierem badań statystyczno-ekonometrycznych dochodów i wydatków ludności oraz płac w Polsce po okresie stalinowskim. W tych latach Profesor był niekwestionowanym autorytetem w zakresie badań poziomu życia ludności. Nurt badań ekonomiczno-społecznych przewija się w całym okresie aktywności naukowej Profesora Zająca, owocując m.in. kolejnymi po pracy habilitacyjnej, książkami: *Ekonometryczne metody ustalania rejonów konsumpcyjnych* (współautor: B. Podolec) (1978), *Metody badania usług rynkowych*, praca zbiorowa pod red. K. Zająca (1982) i wieloma artykułami naukowymi.

Drugim nurtem badawczym, rozwijanym przez Profesora Kazimierza Zająca są badania demograficzne. Jest on jednym z pionierów mikrodemograficznych badań historycznych, czego przykładem może być praca: *Studium nad ruchem naturalnym miasta Rymanowa w świetle ksiąg parafialnych z lat 1850-1950*, „Przeszłość Demograficzna Polski” (1969). Jest on uznanym autorytetem z zakresu demografii historycznej. Z kolei z połączenia badań demograficznych z badaniami społeczno-ekonomicznymi rodzi się monografia: *Rozwój demograficzny a rozwój gospodarczy*, (1987), (współautor: A. Sokołowski) i wiele innych prac Profesora dotyczących rozwoju demograficznego i społeczno-ekonomicznego.

Innym nurtem badań statystycznych, ściśle powiązanych z badaniami społeczno-ekonomicznymi i demograficznymi jest rozwijanie metodologii i zastosowań proce-

dur taksonomicznych. Znajduje to wyraz w wielu publikacjach Profesora, głównie ze swoimi młodszymi współpracownikami. Tego przykładem jest książka: *Metody taksonomiczne w badaniach społeczno-ekonomicznych*, (1988), (współautorzy: J. Pociecha, B. Podolec, A. Sokołowski) a także szereg publikacji z tego zakresu, m.in. we współautorstwie z T. Grabińskim.

Należy też wspomnieć o prowadzeniu przez Profesora badań w dziedzinie statystycznych metod kontroli jakości, czego wyrazem jest szereg artykułów naukowych na te tematy, a przede wszystkim książka: *Statystyczne metody kontroli jakości*, (1973), (współautorzy: J. Cyran, J. Steczkowski).

Reasumując dokonania naukowe Profesora należy podkreślić, że wniósł on osobisty wkład w rozwój metodologii badań statystyczno-ekonometrycznych i prowadzenie badań empirycznych zwłaszcza w obszarach statystyki społecznej, demografii i statystycznej kontroli jakości. Jego silna aktywność naukowa obejmowała długi okres, blisko 50 lat, począwszy od połowy lat pięćdziesiątych do końca ubiegłego wieku.

Historyczną zasługą Profesora Kazimierza Zajęcia jest jego wkład w kształcenie młodych kadr naukowych macierzystej Uczelni oraz statystyków i ekonometryków polskich. Wypromował na krakowskiej Uczelni 24 doktorów, a do tego trzeba dodać osoby wypromowane na innych uczelniach polskich. Ponadto wykonał ponad 80 recenzji prac doktorskich.

Profesor położył równie wielkie zasługi w promowaniu samodzielnych pracowników naukowych. Sprawował on opiekę merytoryczną nad 22 habilitantami. Wykonał on ponad 60 recenzji prac habilitacyjnych. Jego recenzje habilitacyjne otrzymało wielu doktorów habilitowanych nauk ekonomicznych. Przygotował on także ok. 70 opinii dotyczących awansów na tytuł profesora lub stanowisko profesora uczelnianego. Bez przesady można stwierdzić że znaczna większość obecnie czynnych lub będących już na emeryturze polskich profesorów z zakresu statystyki, ekonometrii i dziedzin pokrewnych była przynajmniej na pewnym etapie kariery naukowej oceniana i dopingowana do pracy przez Profesora Zajęcia. Profesor Kazimierz Zając cieszy się dotąd w ogólnopolskim środowisku naukowym statystyków i ekonometryków dużym autorytetem i poważaniem a osoby, które w swoim czasie oceniał, wyrażają wdzięczność za jego życzliwość i konstruktywne rady, jakich im udzielał.

W trakcie swojej długoletniej pracy na krakowskiej Uczelni, Profesor Zając pełnił wiele różnorodnych funkcji, walczył przyczyniając się do jej rozwoju. Już w latach 1954-1958 był prodziekanem ówczesnego Wydziału Towaroznawstwa Wyższej Szkoły Ekonomicznej w Krakowie a w latach 1964-1968 prodziekanem ówczesnego Wydziału Produkcji i Obrotu Towarowego. W latach 1980-1986 pełnił funkcję dziekana Wydziału Ekonomiki Obrotu Akademii Ekonomicznej w Krakowie.

Od 1965 roku był Kierownikiem Katedry Statystyki, walczył przyczyniając się do jej kadrowego i naukowego rozwoju. W latach 1969-1986 aż do emerytury, w związku z reorganizacją struktury organizacyjnej uczelni pełnił funkcję Kierownika Zakładu Statystyki oraz w latach 1969-1984 Dyrektora Instytutu Metod Rachunku Ekonomicznego. Pod Jego kierownictwem, dzięki staraniom i inspiracji Profesora, Instytut rozwijał się

kadrowo i zyskiwał coraz to silniejszą pozycję w polskim środowisku ilościowych badań ekonomicznych. Sam Zakład Statystyki, powstały w miejsce Katedry, który w 1969 roku zatrudniał jednego samodzielnego pracownika naukowo-dydaktycznego (doc. K. Zając), w chwili jego odejścia na emeryturę w 1986 roku zatrudniał w tym zakładzie oraz zakładach pokrewnych powstałych w międzyczasie a to: Zakładzie SKJ oraz Teorii Prognoz, sześciu samodzielnych pracowników naukowo-dydaktycznych (prof. K. Zając, prof. J. Steczkowski, prof. A. Zeliaś, doc. A. Iwasiewicz, doc. S. M. Kot, doc. J. Pocięcha).

Należy podkreślić że starania Prof. Zająca o rozwój naukowy i co za tym idzie rozwój kadrowy nie dotyczyły jedynie Zakładu Statystyki lecz całego Instytutu. Za czasów dyktorstwa Prof. Zająca w Instytucie Metod Rachunku Ekonomicznego powstał Zakład Informatyki a jego pierwszym kierownikiem był dr Cz. Kulik, dotychczasowy adiunkt w Zakładzie Statystyki. Wielu późniejszych pracowników Zakładu Informatyki doktoryzowało się z metod ilościowych u Prof. Zająca. Przyczynił się on także do rozwoju Zakładu Matematyki Instytutu Metod Rachunku Ekonomicznego, inspirując rozwój naukowy wielu jego pracowników naukowo-dydaktycznych. Integrował także Zakład Ekonometrii z problematyką badawczą całego instytutu.

To, że krakowska uczelnia ekonomiczna intensywnie rozwijała się od lat 60-tych do 90-tych ubiegłego wieku pod względem potencjału naukowo-dydaktycznego, czego formalnym wyrazem była zmiana w 1974 roku jej nazwy z Wyższej Szkoły Ekonomicznej na Akademię Ekonomiczną a następnie na Uniwersytet Ekonomiczny, było w istotnym stopniu zasługą pracy Profesora Zająca na kierowniczych stanowiskach w Uczelni.

Prof. dr hab. Kazimierz Zając swoją pracą organizacyjną i ekspercką oddziaływał na rozwój teorii i praktyki badań statystycznych w Polsce. Spośród wielu funkcji pełnionych poza uczelnią wymienić należy przewodniczenie w latach 1975-1979 Sekcji Demografii Historycznej Komitetu Nauk Demograficznych PAN a w latach 1978-1981 przewodniczenie Sekcji Statystyki Komitetu Statystyki i Ekonometrii PAN. Od roku 1978 był on przewodniczącym Komisji Nauk Ekonomicznych PAN Oddział w Krakowie, od roku 1990 przewodniczył także Komisji Statystyczno-Demograficznej PAN Oddział w Krakowie. Jako przewodniczący tych gremiów zasiadał on w radach redakcyjnych i radach programowych takich czasopism naukowych jak: „Przeszłość Demograficzna Polski”, „Studia Demograficzne”, „Przegląd Statystyczny”. W latach 1986-1990 był on z wyboru członkiem Centralnej Komisji Kwalifikacyjnej przy Prezesie Rady Ministrów, przyczyniając się do promowania rozwoju samodzielnych kadr naukowych w zakresie statystyki i ekonometrii.

Prof. K. Zając położył także duże zasługi dla Głównego Urzędu Statystycznego. W długim okresie lat 1965-1995 był członkiem Rady Naukowej GUS, przyczyniając się do wytyczania kierunków badań statystycznych oraz rozwoju metodologii i praktyki statystyki publicznej w Polsce. Przez długie lata zasiadał w Radzie Naukowej „Wiadomości Statystycznych”. Należy też zaznaczyć jego rolę w Polskim Towarzy-

stwie Statystycznym, gdzie przez długie lata zasiadał w Radzie Głównej PTS i był Przewodniczącym Oddziału Krakowskiego PTS.

Profesor zawsze przykładął dużą wagę do procesu dydaktycznego. Jest on autorem lub współautorem wielu skryptów i podręczników do statystyki. Wśród nich wyróżnia się podręcznik: *Zarys metod statystycznych*, PWE, Warszawa, mający 5 wydań, na którym wychowało się wiele roczników studentów uczelni krakowskiej i wielu innych uczelni polskich.

Profesor Zajęc był znany i ceniony przez studentów jako interesujący wykładowca. Potrafił on o metodach statystycznych i ich zastosowaniach mówić tak, że zdobywał dla nich uważnych słuchaczy, którzy potem niejednokrotnie wybierali je jako przedmiot swoich specjalizacji i tematy prac magisterskich. Profesor Zajęc wypromował ogromną rzeszę magistrantów, którzy nawet po bardzo wielu latach wspominają go jako wybitnego profesora krakowskiej uczelni ekonomicznej. Profesor Zajęc był też długoletnim wykładowcą Uniwersytetu Jagiellońskiego na kierunku socjologia czy psychologia a także Papieskiej Akademii Teologicznej. Także ci studenci wspominają go jako interesującego wykładowcę.

Będąc od 1986 roku formalnie na emeryturze, przez wiele lat przychodził codziennie do pracy w katedrze, brał udział w ogólnopolskim i krakowskim życiu naukowym, jeszcze w ubiegłym roku brał udział w konferencjach naukowych. 26 maja ubiegłego roku Uniwersytet Ekonomiczny odnowił po 53 latach nadanie stopnia naukowego doktora nauk ekonomicznych Panu Prof. dr hab. dr h.c. Kazimierzowi Zajęcowi.

W zmarłym nauka polska i społeczność Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie traci osobowość o niezwykłych zaletach umysłu i charakteru, zasłużonego nauczyciela i wychowawcę wielu pokoleń młodzieży akademickiej, człowieka o wysokiej kulturze osobistej.

Pogrzeb Profesora odbył się dnia 14 maja 2012 roku Na Cmentarzu Salwatorskim w Krakowie.

Józef Pocięcha

RECENZJE

WIESŁAW GOLNAU

RECENZJA KSIĄŻKI POD REDAKCJĄ ZENONA WIŚNIEWSKIEGO, KAMIŁA ZAWADZKIEGO „EFEKTYWNOŚĆ POLITYKI RYNKU PRACY W POLSCE”

Katedra Gospodarowania Zasobami Pracy Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu jest wiodącym ośrodkiem naukowym w Polsce pod względem badań nad ekonomicznymi aspektami funkcjonowania rynku pracy. Efektem prac zrealizowanych przez tę katedrę są liczne publikacje, wśród których trzeba choćby wymienić znaną w gronie specjalistów zajmujących się zasobami ludzkim książkę autorstwa E. Dolnego, J. Mellerera i Z. Wiśniewskiego pt. *Zarys polityki zatrudnienia*, która ukazała się w 1990 r. nakładem PWE. Najnowsza zwarta publikacja pracowników katedry, przygotowana pod redakcją Z. Wiśniewskiego i K. Zawadzkiego, nosi tytuł *Efektywność polityki rynku pracy w Polsce*. Została wydana w 2011 r. przez Wojewódzki Urząd Pracy w Toruniu i Uniwersytet Mikołaja Kopernika. Publikacja powstała w ramach projektu pt. Monitorowanie efektywności polityki rynku pracy – opracowanie metodologii badania efektywności podstawowych aktywnych form przeciwdziałania bezrobociu, zrealizowanego na rzecz Ministerstwa Pracy i Polityki Społecznej ze środków Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki.

Treść książki ujęto w ośmiu rozdziałach pogrupowanych w trzy części. Pierwsza z nich składa się z trzech rozdziałów poświęconych kluczowym aspektom kształtowania aktywnej polityki rynku pracy. Rozpoczyna ją rozdział omawiający teoretyczne i prawne podstawy aktywnej polityki rynku pracy. Zawarto w nim odpowiedzi na podstawowe pytania nurtujące osoby pragnące poznać sens aktywnej polityki państwa na rynku pracy, rozumianej przez autorów książki jako „celowa interwencja państwa na rynku pracy, mająca poprawić efektywność jego funkcjonowania, tworzyć w sposób pośredni lub bezpośredni miejsca pracy oraz zwiększać zdolność do zatrudnienia grup defaworyzowanych” (s. 9). W rozdziale tym znalazły się usystematyzowane informacje o: argumentach przemawiających za stosowaniem interwencji na rynku pracy, celach stawianych przed aktywną polityką rynku pracy, aktywnych i pasywnych środkach wykorzystywanych do realizacji tych celów, w tym usługach i instrumentach stosowanych w Polsce, a także o nowych koncepcjach prowadzenia polityki rynku pracy, takich jak: flexicurity, przejściowe rynki pracy i państwo pracy. Dla toku dalszego wywodu niezwykle ważne są stwierdzenia iż stosowanie instrumentów polityki rynku pracy nie gwarantuje zrównoważenia popytu na pracę i podaży pracy, szczególnie w warunkach

permanentnego niedoboru miejsc pracy. Mają one wówczas pełnić jedynie funkcję komplementarną w stosunku do innych środków polityki gospodarczej państwa. Dzieje się tak, gdyż poza subwencjonowaniem zatrudnienia, nie oddziałują na popytową stronę rynku pracy, która jest kształtowana przez decyzje pracodawców o wielkości i strukturze tworzonych miejsc pracy (s. 25).

Drugi rozdział książki stanowi kontynuację rozdziału pierwszego w zakresie usług i instrumentów rynku pracy stosowanych w Polsce. Zaprezentowano w nim bowiem wyniki badań nad skalą wykorzystania i efektywnością poradnictwa zawodowego, pomocy w aktywnym poszukiwaniu pracy, szkoleń, prac interwencyjnych, robót publicznych, prac społecznie użytecznych, staży, przygotowania zawodowego w miejscu pracy (od 2010 r. przygotowania zawodowego dorosłych), środków na podjęcie działalności gospodarczej oraz wyposażenie i doposażenie stanowiska pracy. Do oceny efektywności poszczególnych instrumentów wykorzystano wskaźnik ponownego zatrudnienia i koszt ponownego zatrudnienia. Pierwsza z tych miar jest ilorazem liczby osób, które w okresie do 3 miesięcy po zakończeniu udziału w danej formie aktywizacji bezrobotnych uzyskały zatrudnienie, inną pracę zarobkową lub podjęły działalność na własny rachunek oraz liczby osób, które zakończyły udział w tej formie. Natomiast druga jest stosunkiem wydatków poniesionych na daną formę aktywizacji bezrobotnych do liczby osób, które po zakończeniu udziału w tej formie aktywizacji w okresie do 3 miesięcy uzyskały zatrudnienie, inną pracę zarobkową lub podjęły działalność na własny rachunek. Na podstawie danych z lat 2005-2010 ustalono, że najwyższymi wskaźnikami ponownego zatrudnienia charakteryzują się dotacje na podjęcie działalności gospodarczej oraz wyposażenie i doposażenie stanowiska pracy. Jednocześnie te dwa instrumenty odznaczają się najwyższym kosztem ponownego zatrudnienia. Komentując uzyskane wyniki badań wskazano na wady miar zastosowanych do oceny efektywności instrumentów rynku pracy.

Trzeci rozdział książki zawiera wyczerpujące rozważania nad metodyką oceny efektywności aktywnej polityki rynku pracy. Aby miała ona kompleksowy charakter, powinna dotyczyć czterech następujących wymiarów: oceny celów i wdrożenia programów, monitoringu skuteczności, oceny efektów netto programów, analizy kosztów i korzyści (s. 60). Autorzy książki koncentrują swoją uwagę na ocenie efektów netto programów, zaznaczając iż wymaga ona zastosowania złożonych procedur niezbędnych do odseparowania od zaobserwowanych efektów brutto tych, które wystąpiły niezależnie od zrealizowanych programów. Tego typu badania można prowadzić na poziomie mikroekonomicznym i makroekonomicznym. W książce gros uwagi poświęcono badaniom mikroekonomicznym, które mogą być realizowane w formie eksperymentalnej lub quasi-eksperymentalnej. W obu przypadkach efekt netto aktywnej polityki rynku pracy ustala się poprzez porównanie grupy poddanej interwencji i grupy kontrolnej, która nie została objęta działaniami aktywizującymi. Różnica pomiędzy tymi metodami polega na tym, że w przypadku eksperymentu dobór osób do obu grup ma charakter losowy, natomiast przeprowadzający quasi-eksperyment, nie mając takiej możliwości, są zmuszeni do zastosowania metody badawczej pozwalającej wyeliminować wpływ efektu

selekcji na uzyskany wynik. Do tego typu metod autorzy książki zaliczają analizę regresji, która umożliwia ustalenie wpływu uczestnictwa w programach na prawdopodobieństwo podjęcia pracy, przy jednoczesnej kontroli oddziaływania na uzyskany wynik innych czynników, takich jak: płeć, wiek, wykształcenie czy uwarunkowania lokalne. Innym rozwiązaniem jest dopasowanie do każdej osoby z grupy badanej jednej osoby o identycznych obserwowalnych cechach społeczno-demograficznych i zawodowych, która nie uczestniczyła w aktywnych programach rynku pracy. Ze względu na dużą liczbę cech, które należy wziąć pod uwagę przy dopasowywaniu poszczególnych osób z grupy badanej do osób z grupy kontrolnej i ograniczonymi danymi charakteryzującymi bezrobotnych, zastosowanie tego podejścia badawczego może być trudne. Alternatywnym rozwiązaniem jest dopasowanie poszczególnych osób z grupy kontrolnej do osób tworzących grupę badaną na podstawie jednego syntetycznego wskaźnika *propensity score*, szacowanego za pomocą modelu regresji logistycznej, wyrażającego skłonność do partycypacji w programach rynku pracy (s. 67). W końcowej części trzeciego rozdziału książki omówiono możliwość wykorzystania systemu informatycznego Syriusz do badania efektywności aktywnej polityki rynku pracy w Polsce.

Druga część książki dotyczy założeń metodycznych przeprowadzonych badań efektywności polityki rynku pracy w Polsce. W jej skład wchodzi dwa rozdziały. W pierwszym z nich omówiono: cel badań, zakres podmiotowy badań i metody wykorzystane do ich przeprowadzenia. Drugi rozdział tej części opracowania zawiera opis wykorzystanych źródeł informacji i obszerną charakterystykę bezrobotnych poddanych badaniom.

Głównym celem badań była ocena efektywności instrumentów aktywnej polityki rynku pracy stosowanych w Polsce w 2009 r. (s. 79). Ocenie poddano szkolenia zawodowe, staże, prace interwencyjne, prace społecznie użyteczne, roboty publiczne i dotacje na podjęcie działalności gospodarczej. Badania przeprowadzono w sześciu powiatach zróżnicowanych pod względem wybranych wielkości ekonomicznych, w tym przede wszystkim charakteryzujących rynek pracy. Powiaty wyłoniono drogą losowania z grup utworzonych drogą hierarchicznego grupowania. Rejestry bezrobotnych w tych powiatach, prowadzone w programie Syriusz, posłużyły za operat wyboru prób – badanej i kontrolnej (s. 85). Do oceny efektywności aktywnych programów rynku pracy wykorzystano metody *propensity score matching* i analizę regresji.

Dane statystyczne niezbędne do przeprowadzenia badań zaczerpnięto z dwóch źródeł. Były nim system informatyczny Syriusz i oryginalne badania sondażowe bezrobotnych. Z systemu informatycznego Syriusz można pozyskać informacje o cechach społeczno-zawodowych i historii zatrudnienia bezrobotnych. Z rejestrów bezrobotnych sześciu badanych powiatów zaczerpnięto dane o blisko 66 tys. osób spełniających kryteria włączenia do grupy badanej lub grupy kontrolnej. Ze względu na fakt, iż dane posiadane przez urzędy pracy nie są pełne lub rzetelne (s. 119), badacze zdecydowali się uzupełnić je drogą sondażu. Badania ankietowe miały dostarczyć dodatkowych informacji na temat historii zawodowej respondentów z minionych dwóch lat. Udało się je przeprowadzić wśród 2 tys. bezrobotnych pogrupowanych w pary według *propensity scores*, złożone z osoby bezrobotnej uczestniczącej w danym programie rynku pracy

i osoby należącej do grupy kontrolnej. Informacje pozyskane w ten sposób posłużyły nie tylko do oceny efektywności aktywnych programów rynku pracy, ale i do poznania opinii uczestniczących w nich osób na temat znaczenia tych programów dla możliwości uzyskania niesubsydiowanego zatrudnienia.

W trzeciej części książki zebrano uzyskane wyniki badań efektywności polityki rynku pracy w Polsce. W jej skład wchodzi trzy rozdziały. Pierwszy z nich dotyczy wyników badań ilościowych. W drugim omówiono wyniki badań ankietowych przeprowadzonych wśród bezrobotnych. Trzecią część i jednocześnie całą książkę zamyka rozdział w którym ujęto usystematyzowane wnioski z badań i wynikające z nich rekomendacje. Wyniki badań ilościowych uzyskane dzięki zastosowaniu metody *propensity score matching* i analizy regresji oraz dzięki wykorzystaniu danych z systemu Syriusz i danych pochodzących z badań sondażowych omówiono w czterech podrozdziałach. Na podstawie metody *propensity score matching* i danych pochodzących z systemu Syriusz ustalono, że skutecznymi narzędziami wspierającymi zatrudnienie są dotacje na rozpoczęcie działalności gospodarczej i prace interwencyjne. Pozytywny wpływ na zatrudnienie, jednakże nie tak duży jak dotacje i prace interwencyjne, wywierają również szkolenia zawodowe i staże. Natomiast uczestnictwo w robotach publicznych lub w pracach społecznie użytecznych nie miało znaczenia lub wpływało negatywnie na przyszłe podjęcia pracy niesubsydiowanej (s. 140).

Zbliżone wyniki uzyskano za pomocą tej samej metody, ale gdy do obliczeń użyto danych pochodzących z badań sondażowych. Wskazują one na pozytywny efekt zatrudnieniowy dotacji na podjęcie działalności gospodarczej, staży i prac interwencyjnych. Wpływ robót publicznych na podjęcia zatrudnienia był nieistotny statystycznie, a uczestnictwo w szkoleniach zawodowych i w pracach społecznie użytecznych miało wpływ negatywny. Efekt netto polityki rynku pracy w Polsce rozumiany jako odsetek bezrobotnych podejmujących pracę dzięki partycypacji w różnych formach aktywizacji wynosił 7,6%. Szacunki przeprowadzone na podstawie danych z systemu Syriusz dały wynik wyższy o 3 punkty procentowe (s. 149).

Ze względów metodycznych w badaniach efektywności aktywnych programów rynku pracy prowadzonych przy użyciu analizy regresji i danych pochodzących z systemu Syriusz pomięto dotacje na podjęcie działalności gospodarczej. Do oceny pozostałych programów wykorzystano sześć dwumianowych modeli logitowych, w których uwzględniono 62 zmienne binarne. Na podstawie wyników estymacji modeli ustalono, iż pozytywny wpływ na zatrudnienie wywiera udział w szkoleniach zawodowych i w pracach interwencyjnych. Natomiast podejmowanie staży, uczestnictwo w robotach publicznych lub w pracach społecznie użytecznych nie zwiększało szans bezrobotnych na podjęcie zatrudnienia, albo wręcz je zmniejszało.

Analiza regresji przeprowadzona według danych pochodzących z badań sondażowych prowadzi do zbliżonych wniosków. Wyniki estymacji 18 modeli logitowych wskazują na pozytywny wpływ zatrudnieniowy dotacji na rozpoczęcie działalności gospodarczej, prac interwencyjnych i staży. Oddziaływanie szkoleń na prawdopodobieństwo zatrudnienia nie jest jednoznaczne. Do 3 miesięcy od ukończenia szkolenia

jest ono negatywne, a od 7 do 12 miesięcy - pozytywne. W przypadku prac społecznie użytecznych i robót publicznych uzyskano jednoznacznie negatywny wpływ udziału w tych programach na prawdopodobieństwo uzyskania zatrudnienia (s. 165).

Wyniki badań sondażowych, przedstawione w kolejnym rozdziale, stanowią cenne uzupełnienie powyższych ustaleń. Są one bowiem źródłem wiedzy o metodach poszukiwania ofert pracy przez bezrobotnych, przyczynach niepowodzeń w staraniach o zatrudnienie czy cechach miejsc pracy, które udało się pozyskać bezrobotnym.

W rozdziale zawierającym wnioski z badań i rekomendacje autorzy stwierdzają, że dotacje na podjęcie działalności gospodarczej i prace interwencyjne są instrumentami polityki rynku pracy o wysokiej skuteczności zatrudnieniowej. Jednakże oceny efektywności tych instrumentów uzyskane na podstawie przeprowadzonych badań są prawdopodobnie zawyżone z racji obowiązujących w Polsce regulacji prawnych, obligujących ich beneficjentów do pracy przez okres nie krótszy niż 6 lub 12 miesięcy. Z tego względu i z powodu wysokich kosztów jednostkowych dotacji na podjęcie działalności gospodarczej autorzy rekomendują ograniczony zakres wykorzystania obu wymienionych instrumentów polityki rynku pracy.

Szkolenia zawodowe i staże okazały się elementami polityki rynku pracy o umiarkowanej skuteczności zatrudnieniowej. Autorzy badań są jednak przekonani, że uzyskane wyniki w przypadku tych instrumentów są niedoszacowane ze względu na ujawnianie się pozytywnych efektów ich stosowania w dłuższym okresie i brak wiarygodnych danych na ten temat. Biorąc pod uwagę powyższe względy autorzy książki są zwolennikami rozwoju szkoleń zawodowych i staży na szerszą skalę.

W grupie instrumentów o niskiej skuteczności w zakresie pomocy bezrobotnym w pozyskiwaniu zatrudnienia znajdują się prace społecznie użyteczne i roboty publiczne. W zasadzie należałoby stwierdzić, iż zgodnie z uzyskanymi wynikami badań udział w tych programach obniża prawdopodobieństwo uzyskania pracy niesubsydowanej. Wpływ na uzyskane wyniki badań bez wątpienia ma dobór bezrobotnych do udziału w tych programach. Są one kierowane do osób o najniższych kwalifikacjach i najniższej motywacji do podjęcia stałej pracy zawodowej. Z tego względu postrzegane są raczej jako instrument pomocy społecznej, a nie polityki rynku pracy. Ponadto jednostkowy koszt uczestnictwa w robotach publicznych jest wysoki, dlatego autorzy książki rekomendują zaniechanie stosowania tego instrumentu.

Recenzowana książka jest rzetelnym opracowaniem naukowym. Przygotowano ją według standardowego układu prac badawczych, w którym wyróżnia się dotychczasowe wyniki badań, metodykę badań, wyniki badań własnych, wnioski dla teorii i praktyki. Autorzy dołożyli wszelkich starań, aby uzyskać wiarygodne wyniki badań – dobrali odpowiednią metodę badań, wykorzystali dostępne źródła informacji, uzupełnili je oryginalnymi badaniami sondażowymi, przeprowadzili badania na szeroką skalę, wyciągnęli wyważone wnioski. Z tych względów z pełnym przekonaniem można polecić książkę politykom i specjalistom decydującym o kształcie polityki rynku pracy w Polsce, specjalistom zajmującym się problematyką rynku pracy, w tym pracownikom urzędów

pracy i nauczycielom akademickim, a także studentom pragnącym zdobyć wiedzę na temat ekonomicznych aspektów funkcjonowania rynku pracy.

Efektywność polityki rynku pracy w Polsce pod redakcją Z. Wiśniewskiego i K. Zawadzkiego jest bez wątpienia kolejną wartą uwagi książką na temat rynku pracy w Polsce, przygotowaną przez pracowników Katedry Gospodarowania Zasobami Pracy Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu. Jest ona dostępna w wersji PDF na stronie internetowej <http://almp.umk.pl>, poświęconej projektowi monitorowania efektywności polityki rynku pracy.

SPIS TREŚCI

Emil P a n e k, Henryk J. R u n k a – Dwa twierdzenia o magistrali w modelu von Neumanna...	127
Sławomir D o r o s i e w i c z – Potoki w sieciach transportowych. Rozkład przestrzenny i jego własności dynamiczne.....	140
Agata K l i b e r, Paweł K l i b e r, Piotr P ł u c i e n n i k – Zależności pomiędzy stopami procentowymi rynku międzybankowego w Polsce.....	151
Anna B ł a c z k o w s k a, Alicja G r z e ś k o w i a k, Anna K r ó l, Agnieszka S t a n i m i r – Wykorzystanie analizy korespondencji w badaniu czynników różnicujących wyniki z dwóch części egzaminu gimnazjalnego uzyskanych przez uczniów z różnych obszarów terytorialnych	165
Wioletta G r z e n d a – Analiza płodności kobiet w Polsce z wykorzystaniem bayesowskiego modelu regresji Poissona	181

POLSCY STATYSTYCY I MATEMATYCY

Józef P o c i e c h a – Wspomnienie Profesora Kazimierza Zająca.....	201
--	-----

RECENZJE

Wiesław G o l n a u – Recenzja książki pod redakcją Zenona Wiśniewskiego, Kamila Zawadzkiego „Efektywność polityki rynku pracy w Polsce”.....	207
---	-----

CONTENTS

Emil P a n e k, Henryk J. R u n k a – Two Turnpike Theorems in the von Neumann Growth Model	127
Sławomir D o r o s i e w i c z – Flows in Transportation Networks. Spatial Distribution and its Dynamic Properties.....	140
Agata K l i b e r, Paweł K l i b e r, Piotr P ł u c i e n n i k – Interdependences Between Interest Rates on the Polish Interbank Market.....	151
Anna B ł a c z k o w s k a, Alicja G r z e ś k o w i a k, Anna K r ó l, Agnieszka S t a n i m i r – Comparative Analysis of the Results of Two Parts of the Gymnasium Exam Achieved by Students from Various Territorial Areas	165
Wioletta G r z e n d a – Fertility Analysis of Women in Poland Using Bayesian Poisson Regression Model	181

POLISH STATISTICIANS AND MATHEMATICIANS

Józef P o c i e c h a – In Memory of Professor Kazimierz Zając	201
--	-----

REVIEWS

Wiesław G o l n a u – Book review: Efficiency of the Labour Market Policy in Poland edited by Zenon Wiśniewski and Kamil Zawadzki	207
--	-----