

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET STATYSTYKI I EKONOMETRII

PRZEGLĄD STATYSTYCZNY

STATISTICAL REVIEW

TOM 59

3

2012

WARSZAWA 2012

WYDAWCA

Komitet Statystyki i Ekonometrii Polskiej Akademii Nauk

RADA REDAKCYJNA

Andrzej S. Barczak, Marek Gruszczyński, Krzysztof Jajuga, Stanisław M. Kot, Tadeusz Kufel,
Władysław Milo (Przewodniczący), Jacek Osiewalski, Aleksander Welfe, Janusz Wywiał

KOMITET REDAKCYJNY

Magdalena Osińska (Redaktor Naczelny)
Marek Walesiak (Zastępca Redaktora Naczelnego)
Piotr Fiszeder (Sekretarz Naukowy)
Michał Majsterek (Redaktor)
Anna Pajor (Redaktor)

Wydanie publikacji dofinansowane przez Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego

© Copyright by Komitet Statystyki i Ekonometrii PAN

Strona WWW „Przegląd Statystyczny”:
<http://www.przegladstatystyczny.pan.pl>

Nakład: 250 egz.

PAN Warszawska Drukarnia Naukowa
00-056 Warszawa, ul. Śniadeckich 8
Tel./fax: +48 22 628 76 14

ARTUR PRĘDKI

WYBRANE METODY ESTYMACJI W SEMIPARAMETRYCZNYM MODELU GRANICZNYM¹

1. WSTĘP

Niniejsza praca poświęcona jest metodom CNLS (z ang. *Convex Nonparametric Least Squares*) oraz StoNED² (z ang. *Stochastic Non-smooth Envelopment of Data*) będących analogonami odpowiednio MNK i zmodyfikowanej MNK. Celem głównym pracy jest omówienie i ilustracja empiryczna wspomnianych metod w ramach modelu regresji semiparametrycznej, służącemu analizie procesu produkcyjnego. Model ów różni się od stochastycznego modelu granicznego jedynie brakiem założenia o analitycznej postaci funkcji produkcji. Początki metody CNLS, zmodyfikowanej MNK i stochastycznych modeli granicznych sięgają lat 70-tych³. Jednak dopiero w roku 2006 pojawiły się pewne nowe rezultaty dotyczące metody CNLS oraz powstała jej modyfikacja zwana metodą StoNED (praca Kuosmanen, 2006). W pracy zawarta jest również krytyczna ocena własności statystycznych estymanty funkcji produkcji oraz możliwości wnioskowania statystycznego na podstawie skonstruowanego modelu. W części empirycznej porównano oceny nieefektywności technicznej, uzyskane za pomocą metody StoNED z ich odpowiednikami, otrzymanymi za pomocą metod SMNK i DEA, zastosowanymi na bazie odpowiednich modeli⁴.

2. MODEL REGRESJI SEMIPARAMETRYCZNEJ

Zacniemy od konstrukcji modelu regresyjnego w ramach, którego stosowane są obecnie metody CNLS i StoNED.

¹ Praca wykonana w ramach Badań Statutowych finansowanych przez Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie. Autor chciałby w tym miejscu podziękować za cenne uwagi merytoryczne pracownikom Katedry Ekonometrii i Badań Operacyjnych UEK, w szczególności: prof. dr hab. Jackowi Osiewalskiemu, dr hab. Jerzemu Marcowi, dr hab. Annie Pajor oraz dr Błażejowi Mazurowi.

² Do roku 2011 w nazwie metody funkcjonowało słowo „*nonparametric*” jednak, ze względu na semiparametryczny charakter modelu, zastąpiono je słowem „*non-smooth*” (zob. Kuosmanen i Kortelainen, 2012, przypis 1).

³ Przykładowe prace źródłowe: Hanson i Pledger (1976) – metoda CNLS, Richmond (1974) – zmodyfikowana MNK (nie mylić ze skorygowaną MNK), Aigner, Lovell i Schmidt (1977) – stochastyczny model graniczny.

⁴ Szczegóły w części empirycznej pracy. DEA – *Data Envelopment Analysis*, SMNK – skorygowana MNK.

Założenie 1

$$y_i = g(x_i) + \varepsilon_i = g(x_i) - u_i + v_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie: n – liczba obserwacji,

g – nieznana funkcja regresji,

$y_i \in \mathbb{R}$ – zmienna objaśniana, dla i – tej obserwacji,

$x_i = [x_{i1}, \dots, x_{iK}] \in \mathbb{R}^K$ – wektor zmiennych objaśniających, odpowiadający i -tej obserwacji,

$\varepsilon_i = v_i - u_i$ – i -ty, złożony składnik losowy, gdzie $u_i > 0$.

Opisywany model jest stosowany do analizy procesu produkcyjnego, stąd rolę funkcji regresji pełni tu funkcja produkcji, indeks „ i ” numeruje jednostki produkcyjne, zmienną objaśnianą jest obserwowana produkcja jednostek gospodarczych, zaś rolę zmiennych objaśniających pełnią nakłady potrzebne dla jej wytworzenia. Mamy tu do czynienia z tzw. złożonym składnikiem losowym ε_i , charakterystycznym dla stochastycznych modeli granicznych. Składa się on z elementu v_i , który odzwierciedla czynniki losowe (tzw. szoki) wpływające na wielkość produkcji oraz elementu u_i , który jest miernikiem nieefektywności technicznej i -tej jednostki produkcyjnej. W przeciwieństwie jednak do wspomnianych modeli, nie przyjmujemy tu arbitralnie analitycznej postaci funkcji produkcji, lecz jedynie nakładamy na nią pewne warunki regularności zawarte w kolejnym założeniu.

Założenie 2 Funkcja g jest ciągła, niemalejąca i globalnie wklęsła⁵. Rodzinę wszystkich takich funkcji oznaczmy przez G .

Definiowany model ma stanowić teoretyczną podstawę umożliwiającą zgodną estymację w punkcie nieznanej funkcji produkcji g oraz miernika nieefektywności technicznej u_i . Ma także umożliwić wnioskowanie statystyczne związane z tymi wielkościami (np. przedziały ufności dla miernika nieefektywności technicznej⁶). Stąd konieczność narzucenia pewnych założeń na elementy złożonego składnika losowego.

Założenie 3 $\{v_i\}_{i=1}^n \sim \text{iid}(0, \sigma_v^2)$, o rozkładzie symetrycznym.

Założenie 4 $\{u_i\}_{i=1}^n \sim \text{iid}(\mu, \sigma_u^2)$, gdzie $\mu > 0$ oraz rozkład jest asymetryczny.

Założenie 5 v_i, u_j są stochastycznie niezależne od siebie oraz od regresorów x_{mk} , dla dowolnych $i, j, m = 1, \dots, n, k = 1, \dots, K$.

W praktyce, przy realizacji danej metody estymacji, konieczne staje się również przyjęcie bardziej szczegółowych założeń o postaci rozkładów składowych v_i, u_i . W literaturze przedmiotu istnieje wiele propozycji w tym zakresie (zob. np. Kumbhakar

⁵ Globalna wklęsłość jest własnością dość restrykcyjną, co podkreślają sami autorzy metody StoNED w pracy Kuosmanen i Kortelainen (2012, str. 14). Jest ona zakładana ze względu na wykazane przez nich związki metody CNLS z metodą DEA, gdzie obowiązuje założenie wypukłości zbioru możliwości produkcyjnych. Z tego samego powodu nie wymaga się tu również różniczkowalności funkcji produkcji.

⁶ Zaznaczmy wyraźnie, że mówimy tu o zgodnej estymacji i przedziale ufności dla zmiennej losowej u_i , a nie parametru. Sytuacja jest więc analogiczna jak w prognozie, gdzie estymujemy przyszłą wartość zmiennej objaśnianej będącej zmienną losową. Definicja zgodności nie ulega zmianie, ponieważ w dalszym ciągu badamy zbieżność wg prawdopodobieństwa różnicy $\hat{u}_i - u_i$ (zob. np. Serfling, 1991, str. 16 i 56).

i Lovell, 2000, str. 74 – 90). Za pracę Kuosmanen i Kortelainen (2012) przyjmujemy w tej kwestii następujące założenie.

Założenie 6 v_i – zmienna losowa o rozkładzie normalnym, u_i – zmienna losowa o rozkładzie półnormalnym⁷.

Przy powyższych założeniach $E(\varepsilon_i) = -E(u_i) = -\mu < 0$, wprowadza się więc tzw. „przeciętną” funkcję produkcji $f(x) = g(x) - \mu$, zapisując założenie 1 w postaci:

$$y_i = [g(x_i) - \mu] + [\varepsilon_i + \mu] = f(x_i) + v_i.$$

„Nowy” składnik losowy v_i spełnia już standardowe założenia twierdzenia Gaussa-Markowa, tzn. $\{v_i\}_{i=1}^n \sim \text{iid}(0, \sigma_v^2)$. Z drugiej strony funkcja f „dziedziczy” po g własności niemalejącości oraz globalnej wypukłości, ze względu na to, iż μ jest stałą. Na gruncie stochastycznych modeli granicznych, z liniową lub sprowadzalną do liniowej funkcją produkcji⁸, założenia te pozwalają dowieść zgodność estymatora MNK współczynników stojących przy regresorach. Czy w przypadku nieparametrycznej funkcji produkcji możliwa jest zgodna estymacja? Pytanie to pozostaje jak na razie bez odpowiedzi, przynajmniej dla metod estymacji rozważanych w tej pracy. Powróćmy do tego problemu w kolejnych częściach opracowania.

3. METODA CNLS

Estymacji będzie więc podlegać funkcja f (a nie wyjściowa funkcja g). Zgodnie z wprowadzonymi wcześniej oznaczeniami, reszty $y_i - \hat{y}_i$ oznaczmy przez $\hat{v}_i$. Na początek przedmiotem rozważań stanie się tzw. metoda CNLS. Autor niniejszego opracowania nie znalazł w polskiej literaturze tłumaczenia nazwy metody (stąd użycie angielskojęzycznego skrótu). Nazwa wypukła, nieparametryczna MNK, wynikająca z dosłownego tłumaczenia, wydaje się autorowi właściwa, oddaje bowiem istotę metody oraz określa założenia leżące u jej podstaw. Jest to metoda estymacji nieznanej funkcji regresji stosowana w modelach, w których jej postać analityczna nie jest z góry przyjmowana. Przykładem takiego modelu jest ten opisany w części drugiej pracy, gdzie metoda ta stanowi jedynie pierwszy etap estymacji w ramach szerszej metody StoNED (zob. część czwarta pracy). W nieparametrycznych lub semiparametrycznych modelach regresji z białoszumowym składnikiem losowym jest ona jednak często w pełni „samodzielna” metodą estymacji.

O możliwości jej zastosowania wspomina się już w połowie lat 50-tych (zob. Hildreth, 1954, str. 602), jednak dopiero w roku 1976 dowiedziono zgodność estymatora uzyskanego tą metodą. Dokonano tego jednak tylko dla jednego regresora, za to przy dużo słabszych i ogólniejszych założeniach stochastycznych⁹. Idea estymacji, za

⁷ Tzn. $u_i = |U_i|$, gdzie $U_i \sim N(0, \sigma^2)$.

⁸ Np. funkcja Cobb’a i Douglasa czy Translog.

⁹ Nie wprowadza się tam explicite pojęcia składnika losowego. Założenia dotyczą rozkładu wyrażonego dystrybuantą ze średnią pełniącą rolę funkcji regresji (szczegóły Hanson i Pledger, 1976).

pomocą CNLS, polega na tym, że szukamy funkcji $\hat{f}$, takiej, że:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{f}(x_i))^2 = \min_{f \in G} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2.$$

Jest to więc swoisty odpowiednik metody najmniejszych kwadratów o charakterze nieparametrycznym. W latach 80-tych (m.in. prace Fraser i Massam, 1989 oraz Wu, 1982) stworzono efektywne algorytmy poszukiwania $\hat{f}$, lecz ponownie jedynie dla jednego regresora¹⁰. Kwestia odpowiedniej implementacji CNLS dla wielu regresorów pozostawała nierozstrzygnięta przez wiele lat, aż do roku 2008. W pracy Kuosmanen, (2008, str. 311) dowiedziono następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1

$$\min_{f \in G} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 = \min_{l \in L} \sum_{i=1}^n (y_i - l(x_i))^2,$$

gdzie L jest rodziną funkcji niemalejących, „kawałkami liniowych”¹¹.

Implikacją tego twierdzenia jest możliwość zapisania CNLS, jako zadania kwadratowego postaci:

$$\text{Z.1} \quad \min_{v, \alpha, \beta} \sum_{i=1}^n v_i^2$$

$$y_i = \alpha_i + \beta_i^T x_i + v_i, \beta_i = [\beta_{i1}, \dots, \beta_{iK}] \geq \mathbf{0},$$

$$\alpha_i + \beta_i^T x_i \leq \alpha_h + \beta_h^T x_i \quad \forall h, i = 1, \dots, n.$$

Powyższe zadanie można rozwiązać za pomocą ogólnie dostępnych pakietów (zob. Kuosmanen, 2008, przypis 1). Ze względu jednak na liczbę zmiennych i warunków ograniczających w programie oraz osobliwość macierzy formy kwadratowej tworzącej funkcję celu nie jest to zadanie standardowe¹².

¹⁰ Istnieje wtedy możliwość posortowania obserwacji ze względu na jego wartości, co ma duże znaczenie przy konstrukcji odpowiedniego algorytmu.

¹¹ Formalna definicja rodziny L znajduje się w pracy (Kuosmanen, 2008, str. 311). Dowiedziono ponadto, że $L \subset G$. Pomysł estymacji dowolnych funkcji za pomocą funkcji „kawałkami liniowych” oraz zapisu wklęsłości, przy użyciu liniowych warunków ograniczających były oczywiście znane wcześniej (zob. np. prace Afriat, 1967, Varian, 1982 czy Yatchew i Bos, 1997).

¹² Problemy te są dokładnie omówione w innym opracowaniu autora Prędkie (2011) i w związku z tym nie będą przedmiotem szczegółowej analizy w niniejszej pracy.

Szczególny problem, z punktu widzenia statystycznej estymacji, stanowi wielość rozwiązań optymalnych tego programu. Oznaczmy takie przykładowe rozwiązanie przez¹³ $[\hat{\alpha}, \text{vec}(\hat{\beta})', \hat{v}]$, gdzie:

$$\hat{\alpha} = [\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n], \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{11} & \dots & \hat{\beta}_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\beta}_{n1} & \dots & \hat{\beta}_{nK} \end{bmatrix}, \hat{v} = [\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n].$$

Wartości $\hat{v}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (\hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i^T x_i)$, czyli tzw. reszty, są jednoznacznie wyznaczone¹⁴. Nie dotyczy to jednak wartości $\hat{\alpha}_i$ oraz $\hat{\beta}_i$. Prowadzi to do problemu identyfikowalności estymanty oraz ocen charakterystyk przeciętnej funkcji produkcji (zob. Kuosmanen, 2008, str. 314). Zaproponowano początkowo dość naturalną definicję estymanty:

$$\hat{f}(x) = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \{\hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i^T x\}$$

oraz oceny charakterystyk f w punkcie x_i :

$\hat{\beta}_{ik}$ – ocena produktywności krańcowej k -tego nakładu,

$\hat{\beta}_{ik} x_{ik} / \hat{f}(x_i)$ – ocena elastyczności k -tego nakładu,

$\hat{\beta}_{ik} / \hat{\beta}_{im}$ – ocena krańcowej stopy substytucji między nakładem k -tym, a m -tym,

gdzie $k, m = 1, \dots, K$ i $k \neq m$.

Jednak dla wektora wartości x różnego od x_i definicja tej estymanty nie jest jednoznaczna¹⁵, właśnie ze względu na częstą „wielość” optymalnych wartości $\hat{\alpha}_i$ i $\hat{\beta}_i$. Stąd inna propozycja:

$$\hat{f}_{\min}(x) = \min_{\alpha \in R, \beta \in R_+^K} \{\alpha + \beta^T x : \alpha + \beta^T x_i \geq \hat{y}_i \quad \forall i = 1, \dots, n\},$$

gdzie $\hat{y}_i = y_i - \hat{v}_i$. Estymanta ta jest jednoznacznie zdefiniowana dla dowolnego wektora¹⁶ x , ponadto $\hat{f}_{\min} \in L$ oraz:

$$\hat{f}_{\min}(x_i) = \hat{f}(x_i), \text{ dla } i = 1, \dots, n.$$

Twierdzenie 3.1 pozwala więc zastosować metodę CNLS w modelu dla wielu regresorów, w wyniku czego otrzymujemy jednoznaczną estymantę $\hat{f}_{\min}$ przeciętnej funkcji produkcji f . Jednak jakie własności ma ten estymator? Czy, przy założeniach opisanych w części drugiej pracy, jest on zgodny? Na dzień dzisiejszy nie znamy niestety odpowiedzi na to fundamentalne pytanie, co przyznają również Kuosmanen

¹³ $\text{vec}(\cdot)$ jest operatorem ustawiającym kolumny macierzy jedna pod drugą.

¹⁴ Dowód tego faktu w pracy Prędkie (2011), zob. również Kuosmanen (2008, str. 314).

¹⁵ Dla $x = x_i$ uzyskujemy wartości $\hat{f}(x_i) = \hat{y}_i$, których jednoznaczność wynika z jednoznaczności reszt.

¹⁶ Zob. Kuosmanen i Kortelainen (2012, str. 17). Dla zainteresowanych, w tym samym miejscu podano również związek łączący estymantę $\hat{f}_{\min}$ z tzw. estymatorem DEA. W dalszym ciągu pozostaje jednak problem zdefiniowania jednoznacznych ocen charakterystyk przeciętnej funkcji produkcji.

i Kortelainen (2012, str. 16). Problem przekłada się oczywiście także na inne metody estymacji¹⁷, których składową jest CNLS. Oznacza to, że wyniki w części empirycznej pracy należy traktować wyłącznie jako ilustrację zastosowania odpowiednich metod, a wszelkie interpretacje muszą być traktowane z dużą ostrożnością. Metody te są jednak już stosowane w praktyce do analizy efektywności technicznej jednostek gospodarczych¹⁸. Wynika stąd konieczność rzetelnego ich opisu oraz wskazania problemów teoretycznych i praktycznych związanych ze stosowaniem tychże metod.

Podsumowując, dla jednego regresora dowiedziono już zgodność estymatora CNLS w pracy Hanson i Pledger (1976). Wykazano również, iż tempo zbieżności tej estymanty wynosi $n^{-2/5}$ i przedstawiono postać jej asymptotycznego rozkładu¹⁹. Brak jest jednak jakichkolwiek wyników teoretycznych dotyczących własności statystycznych estymatora CNLS w modelu z wieloma regresorami.

4. METODA STONED

Jak wspomniano we wstępie, metoda StoNED jest odpowiednikiem zmodyfikowanej MNK, stosowanym na gruncie modelu semiparametrycznego, opisanego w części drugiej tej pracy. Zmodyfikowana MNK była początkowo wykorzystywana w tzw. deterministycznych modelach granicznych dla uzyskania oceny $\hat{u}_i$ miernika nieefektywności technicznej i -tej jednostki produkcyjnej²⁰. Modele te nie zawierały składnika białoszumowego v_i , zaś związany z nieefektywnością techniczną, składnik u_i był wielkością deterministyczną, bądź zmienną losową o jednostronnym rozkładzie²¹. Przyjęcie złożonej postaci składnika losowego powoduje dodatkowe trudności z wyodrębnieniem jego części u_i . Procedura obliczenia oceny tego miernika jest wtedy dalej oparta na zmodyfikowanej MNK, lecz nieco się komplikuje i składa się z kilku etapów²². Została ona przeniesiona praktycznie w całości, poza jedną modyfikacją, na grunt naszego modelu semiparametrycznego i nazwana metodą StoNED. Jej celem jest więc głównie uzyskanie oceny miernika nieefektywności technicznej $\hat{u}_i$. Prócz tego uzyskujemy ponownie estymantę przeciętnej funkcji produkcji f , a także wyjściowej funkcji produkcji g .

Pierwszym etapem metody StoNED jest użycie metody CNLS dla uzyskania reszt $\hat{v}_i$ oraz estymanty $\hat{f}_{\min}$. W analogicznej procedurze używanej na gruncie stochastycz-

¹⁷ W naszym przypadku chodzi przede wszystkim o metodę StoNED. Dotyczy to jednak również tzw. metody C²NLS będącej analogonem metody COLS (opis tej metody w Kuosmanen i Johnson, 2010).

¹⁸ Zob. praca Kuosmanen i Kuosmanen (2009) dotycząca sektora farm mlecznych w Finlandii, czy informacja na stronie źródłowej www.nomepre.net/stoned/ odnośnie współpracy z sektorem energetycznym w tymże kraju.

¹⁹ Zob. praca Groeneboom (2001). Jest to jednak mało użyteczny wynik, ponieważ w rozkładzie tym występują nieznane stałe, dla których brak jest propozycji zgodnej estymacji.

²⁰ Zob. np. praca źródłowa Richmond (1974).

²¹ Zmodyfikowaną MNK stosowano w tym drugim przypadku.

²² Zob. np. Kumbhakar i Lovell (2000, str. 72-93).

nych modeli granicznych stosuje się tu MNK²³. W drugim etapie estymujemy wariancje σ_u^2 , σ_v^2 składowych złożonego składnika losowego używając metody momentów lub pseudowiarygodności²⁴. Jest to etap pośredni umożliwiający estymację miernika nieefektywności technicznej w etapie 3.

Etap pierwszy został już dokładnie opisany w części trzeciej pracy, przejdźmy więc do etapu drugiego. Przedstawimy tu przykładowo metodę momentów, która jest mniej złożona obliczeniowo. Korzystając z założeń 3-6 można dowieść²⁵, iż momenty centralne złożonego składnika losowego ε_i mają postać:

$$M_1 = E(\varepsilon_i) = -E(u_i) = -\mu = -\sigma_u \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right),$$

$$M_2 = E(\varepsilon_i - M_1)^2 = \left[\frac{\pi - 2}{\pi} \right] \sigma_u^2 + \sigma_v^2,$$

$$M_3 = E(\varepsilon_i - M_1)^3 = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) (1 - 4/\pi) \sigma_u^3.$$

Ze stałości μ wynika, iż wzory na drugi i trzeci moment v_i są analogiczne. Stąd estymatorami tych wielkości będą odpowiednie momenty obliczone z rozkładu empirycznego reszt $\hat{v}_i$, uzyskanych w etapie I:

$$\hat{M}_2 = \left[\sum_{i=1}^n (\hat{v}_i - \hat{E}(v_i))^2 \right] / n,$$

$$\hat{M}_3 = \left[\sum_{i=1}^n (\hat{v}_i - \hat{E}(v_i))^3 \right] / n,$$

gdzie $\hat{E}(v_i) = \left[\sum_{i=1}^n \hat{v}_i \right] / n$. Interesujące nas oceny wariancji możemy więc obliczyć z układu równań:

$$\hat{M}_2 = \left[\frac{\pi - 2}{\pi} \right] \hat{\sigma}_u^2 + \hat{\sigma}_v^2,$$

$$\hat{M}_3 = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) (1 - 4/\pi) \hat{\sigma}_u^3.$$

²³ Jest to właśnie owa jedyna modyfikacja wprowadzona przez autorów metody StoNED. W sposób naturalny, wobec braku analitycznej specyfikacji f , unikamy też problemu zgodnej estymacji stałej (zob. Kumbhakar i Lovell, 2000, str. 71 lub 92).

²⁴ Z ang. *pseudolikelihood method* (zob. praca źródłowa Fan i Weersink, 1996).

²⁵ Zob. np. praca źródłowa Aigner, Lovell i Schmidt (1977).

Po jego rozwiązaniu otrzymujemy ostatecznie:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \left(\frac{\hat{M}_3}{\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \left(1 - \frac{4}{\pi} \right) \right)^{2/3},$$

$$\hat{\sigma}_v^2 = \hat{M}_2 - \left(\frac{\pi - 2}{\pi} \right) \hat{\sigma}_u^2.$$

W etapie trzecim, uzyskane oceny wariancji wykorzystujemy do estymacji miernika nieefektywności technicznej i-tej jednostki. W pracy Jondrow, Lovell, Materov i Schmidt (1982) dowiedziono, iż przy założeniach 3-6 otrzymujemy:

$$E(u_i | \varepsilon_i) = \mu_{*i} + \sigma_* \left(\frac{\varphi(-\mu_{*i}/\sigma_*)}{1 - \Phi(-\mu_{*i}/\sigma_*)} \right),$$

gdzie $\mu_{*i} = -\varepsilon_i \left(\frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} \right)$, $\sigma_* = \left(\frac{\sigma_u^2 \sigma_v^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} \right)^{1/2}$, zaś φ , Φ oznaczają odpowiednio gęstość i dystrybucję standardowego rozkładu normalnego. W literaturze przedmiotu zmienna losowa $E(u_i | \varepsilon_i)$ jest jedną z propozycji²⁶ estymatora punktowego u_i . Jednak wartość ta zależy od nieznanymi wielkości wymagających dodatkowej, zgodnej estymacji. Przypomnijmy, iż:

$$v_i = \varepsilon_i + \mu, \mu = \sigma_u \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right),$$

$$f(x) = g(x) - \mu, \hat{f}(x) = \hat{f}_{\min}(x).$$

Stąd, korzystając z ocen wariancji otrzymanych w etapie drugim, naturalnym estymatorem ε_i jest $\hat{\varepsilon}_i = \hat{v}_i - \hat{\sigma}_u \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)$, zaś estymantą wyjściowej funkcji produkcji

$\hat{g}(x) = \hat{f}_{\min}(x) + \hat{\sigma}_u \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)$. W następnej kolejności uzyskujemy ostateczną wersję estymatora miernika nieefektywności technicznej postaci²⁷:

$$\hat{E}(u_i | \hat{\varepsilon}_i) = \hat{\mu}_{*i} + \hat{\sigma}_* \left(\frac{\varphi(-\hat{\mu}_{*i}/\hat{\sigma}_*)}{1 - \Phi(-\hat{\mu}_{*i}/\hat{\sigma}_*)} \right),$$

$$\text{gdzie } \hat{\mu}_{*i} = -\hat{\varepsilon}_i \left(\frac{\hat{\sigma}_u^2}{\hat{\sigma}_u^2 + \hat{\sigma}_v^2} \right), \hat{\sigma}_* = \left(\frac{\hat{\sigma}_u^2 \hat{\sigma}_v^2}{\hat{\sigma}_u^2 + \hat{\sigma}_v^2} \right)^{1/2}.$$

²⁶ Inną propozycją jest modalna rozkładu warunkowego $u_i | \varepsilon_i$ (zob. np. Kumbhakar i Lovell, 2000, str. 78).

²⁷ Jest to poprawiona wersja z pracy Kuosmanen i Kortelainen (2012, str. 18). We wcześniejszych pracach z tego zakresu postuluje się obliczenie ocen nieznanymi wartości za pomocą algorytmów opartych na metodzie MNW (zob. np. Kumbhakar i Lovell, 2000, str. 77 lub Fan i Weersink, 1996).

5. UWAGI KRYTYCZNE

Jak widać metoda StoNED jest stosunkowo prosta w aplikacji w wersji przedstawionej powyżej²⁸. Ma ona jednak swoje wady oraz ograniczenia. Po pierwsze może się zdarzyć, że realizacja $\hat{M}_3$ jest dodatnia²⁹, co powoduje z kolei ujemny znak $\hat{\sigma}_u^2$. Przyjmuje się wtedy arbitralnie, iż $\hat{\sigma}_u^2 = 0$ (zakładamy tym samym pełną efektywność wszystkich jednostek produkcyjnych w grupie) albo podejrzewa się błędną specyfikację modelu³⁰. Po drugie może zaistnieć sytuacja, iż realizacja $\hat{M}_3$ jest wprawdzie ujemna, lecz w takim stopniu, że powoduje to z kolei ujemny znak $\hat{\sigma}_v^2$. W takiej sytuacji naturalnym wyjściem jest przyjęcie $\hat{\sigma}_v^2 = 0$, czyli braku składnika „białoszumowego” w danych. Oznacza to, że zakładamy, iż jedynym źródłem odstępstwa zrealizowanej wielkości produkcji od produkcji maksymalnej jest nieefektywność techniczna jednostki produkcyjnej.

Trzecim problemem jest kwestia własności statystycznych wprowadzonych estymatorów. Wobec braku dowodu zgodności³¹ estymanty $\hat{f}_{\min}$ uzyskanej za pomocą metody CNLS w etapie pierwszym, nie mamy pewności, czy zgodna jest również estymanta $\hat{g}$. Co do własności estymatorów związanych z parametrami rozkładów zmiennych losowych u_i , v_i oraz rozkładem u_i warunkowym względem ε_i , to najistotniejsze byłoby dowiedzenie choćby zgodności $\hat{\sigma}_u^2$, $\hat{\sigma}_v^2$. Są one bowiem podstawą do definiowania innych estymatorów przedstawionych w tym opracowaniu. W pracy Kuosmanen i Kortelainen (2012, str. 18) stwierdza się, iż są one nie tylko zgodnymi, ale także nieobciążonymi estymatorami odpowiednio σ_u^2 , σ_v^2 . Następuje jednak odwołanie do prac Aigner, Lovell i Schmidt (1977) oraz Greene (2008), które dotyczą rezultatów uzyskanych dla modeli, gdzie granica produkcyjna zadana jest parametrycznie. W naszej sytuacji, wobec braku analitycznej postaci f oraz nie udowodnionej zgodności jej estymanty $\hat{f}_{\min}$, mocno wątpliwe jest bezkrytyczne przełożenie tych wyników na grunt modelu semiparametrycznego przedstawionego w części drugiej pracy. Na koniec warto zaznaczyć, że wprowadzony estymator miernika nieefektywności technicznej jest niezgodny i to z powodów niezależnych od tych opisanych przed chwilą³².

Problemem czwartym, wynikającym po części z trzeciego, jest brak możliwości wnioskowania statystycznego oraz weryfikowania hipotez dotyczących np. miernika nieefektywności, czy wartości funkcji produkcji w punkcie. Wspominają o tym sami

²⁸ Przypomnijmy, że możliwe są różne jej warianty zależne od typu rozkładu nałożonego na składową u_i oraz wybranej metody szacowania parametrów σ_u^2 , σ_v^2 .

²⁹ Tzw. błędny kierunek skośności reszt.

³⁰ Sugerowana jest wtedy zmiana zestawu regresorów lub postaci f (dla modeli parametrycznych) – zob. Kumbhakar i Lovell (2000, str. 92). Wydaje się także, iż warto by wtedy narzucić multiplikatywną specyfikację składnika losowego w tym modelu, używaną zresztą częściej w stochastycznych modelach granicznych.

³¹ Przypomnijmy, że chodzi o zgodność do wartości punktowej $f(x_o)$ dla przypadku wielu regresorów.

³² Wynika to ze stałości wariancji rozkładu u_i pod warunkiem ε_i (zob. Kumbhakar i Lovell, 2000, str. 78). Niestety, jak do tej pory, nie zaproponowano w literaturze przedmiotu zgodnego estymatora wielkości u_i .

autorzy metody w pracy Kuosmanen i Kortelainen (2012, str. 22). W nieopublikowanej pracy Kuosmanen (2006, str. 9) pojawia się jednak konstrukcja przedziału ufności dla miernika nieefektywności u_i . Jest to ponownie propozycja wzięta z literatury dotyczącej modeli parametrycznych (praca Horrace i Schmidt, 1996, str. 262), bazująca na postaci rozkładu warunkowego u_i względem ε_i . Przedziały ufności mają następującą postać:

$$[\mu_{*i} + z_U \sigma_*, \mu_{*i} + z_L \sigma_*],$$

gdzie:

$$z_U = \Phi^{-1}[1 - (1-\alpha/2)\Phi(\mu_{*i}/\sigma_*)], z_L = \Phi^{-1}[1 - (\alpha/2)\Phi(\mu_{*i}/\sigma_*)],$$

oraz α – zadany poziom istotności i Φ – dystrybuenta $N(0,1)$.

W pracy Kuosmanen i Kortelainen (2012, str. 22) stwierdza się jednak, iż przedziały te nie biorą pod uwagę rozkładu próbkowego estymatora miernika nieefektywności i w związku z tym wykazują słabe własności pokrycia (zob. Simar i Wilson, 2010).

6. PRZYKŁAD EMPIRYCZNY

Wykorzystano standardowy zestaw danych używany już wielokrotnie przez autora w jego poprzednich pracach³³. Są to dane rzeczywiste z roku 1995 dotyczące 32 polskich elektrowni i elektrociepłowni, których efektywność techniczną będziemy analizować. Za nakłady przyjęto:

- kapitał (wartość brutto środków trwałych liczona w zł.);
- pracę (liczba pracowników);
- energię wsadu (liczoną w TJ).

Produktem działalności jednostek jest wytworzona energia (liczona w TJ³⁴).

Odpowiednie wyniki zastosowania metody CNLS zestawiono w tabeli 1. Za pomocą autorskiego programu w języku R, przy wykorzystaniu gotowej procedury „solve.QP”, rozwiązano program kwadratowy Z.1. i uzyskano jego przykładowe rozwiązanie optymalne $[\hat{\alpha}, \text{vec}(\hat{\beta})', \hat{v}]$ (kolumny 2, 8-11 w tabeli 1). Następnie, na podstawie wektora reszt $\hat{v}$, obliczono wartości $\hat{y}_i = y_i - \hat{v}_i$, dla $i = 1, \dots, n$ (kolumna 3). Posłużyły one do rozwiązania, za pomocą Solvera w Excelu, n programów liniowych związanych z definicją wartości:

$$\hat{f}_{\min}(x_j) = \min_{\alpha \in R, \beta \in R_+^K} \{\alpha + \beta^T x: \alpha + \beta^T x_i \geq \hat{y}_i \quad \forall i = 1, \dots, n\}, \text{ dla } j = 1, \dots, n.$$

Wartości tej estymanty w punkcie, zgodnie z oczekiwaniami³⁵, okazały się być równe wartościom niejednoznacznej estymanty $\hat{f}(x_j) = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \{\hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i^T x_j\}$. Następnie uzyskano wartości optymalne odpowiednich współczynników (kolumny 4-7). Okazały się

³³ Zob. np. Prędkie (2003). Źródło danych: praca Osiewalski i Wróbel-Rotter (2002).

³⁴ 1GWh = 3,6TJ (teradżul).

³⁵ Zachodzi równość $\hat{y}_i = \hat{f}(x_j) = \hat{f}_{\min}(x_j)$, dla $j = 1, \dots, n$.

Tabela 1.

Wyniki związane z realizacją metody CNLS

i	$\hat{v}_i$	$\hat{y}_i$	współczynniki dla estymanty $\hat{f}_{\min}$				współczynniki dla estymanty $\hat{f}$			
			$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\beta}_{i1}$	$\hat{\beta}_{i2}$	$\hat{\beta}_{i3}$	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\beta}_{i1}$	$\hat{\beta}_{i2}$	$\hat{\beta}_{i3}$
1	3560,89	97188,11	1604,33	5,85	-0,000056	0,2234	444,47	8,20	0,000000	0,1764
2	250,43	54426,57	2026,37	5,38	0,004297	0,1614	-13,94	10,12	0,013368	0,0000
3	3702,96	47796,54	1604,33	5,85	-0,000056	0,2234	822,00	5,78	0,001805	0,2007
4	5949,63	28407,07	426,94	8,34	-0,000122	0,1753	2618,36	16,61	0,000000	0,0000
5	-8543,68	42535,38	1136,76	6,01	-0,000005	0,2211	1127,04	6,01	0,000000	0,2210
6	-3500,78	37232,18	2026,30	5,38	0,004297	0,1614	2026,35	5,38	0,004297	0,1614
7	-3963,23	36127,63	2026,36	5,38	0,004297	0,1614	2026,37	5,38	0,004297	0,1614
8	1049,93	28354,37	1604,33	5,85	-0,000056	0,2234	362,69	3,70	0,000000	0,4731
9	3768,16	24847,54	1138,16	6,00	-0,000005	0,2211	1127,04	6,01	0,000000	0,2210
10	-4820,62	33357,32	879,74	5,78	0,002285	0,1897	879,75	5,78	0,002285	0,1897
11	643,59	19516,81	822,69	5,79	0,001781	0,2011	-83,58	2,94	0,003550	0,4829
12	-2533,70	22265,30	1604,33	5,85	-0,000056	0,2234	1009,01	6,15	0,000000	0,2184
13	-2883,34	20757,54	879,74	5,78	0,002285	0,1897	879,74	5,78	0,002285	0,1897
14	3080,18	13540,53	1125,00	6,01	-0,000003	0,2210	765,76	5,80	0,001609	0,2060
15	5400,04	11028,67	879,75	6,03	0,000905	0,2066	92,61	6,26	0,003843	0,1780
16	-553,65	15872,35	-807,66	6,75	0,008849	0,1194	-807,86	6,75	0,008850	0,1194
17	-388,57	15029,67	-807,87	6,75	0,008850	0,1194	-807,87	6,75	0,008850	0,1194
18	1371,65	11381,25	765,76	5,80	0,001609	0,2060	168,13	6,24	0,004260	0,1679
19	0,00	10185,10	502,14	5,12	0,000000	0,3280	-151,32	0,34	0,000000	0,8320
20	614,79	9504,41	-807,87	6,75	0,008850	0,1194	-807,86	6,75	0,008850	0,1194
21	-2027,64	11434,14	765,76	5,80	0,001609	0,2060	765,76	5,80	0,001609	0,2060
22	-1974,08	10938,08	-1060,84	7,05	0,007670	0,1301	-1060,84	7,05	0,007670	0,1301
23	2028,84	5893,26	1009,01	6,15	0,000000	0,2184	-8,35	9,56	0,000000	0,1572
24	430,16	6099,84	910,64	5,81	-0,000154	0,2511	-61,67	5,96	0,000000	0,3433
25	-405,53	5306,23	-1060,84	7,05	0,007670	0,1301	-1060,84	7,05	0,007670	0,1301
26	-655,74	5189,64	-1082,13	7,03	0,007681	0,1329	-1082,13	7,03	0,007681	0,1329
27	-628,77	5101,27	-997,20	5,65	0,004951	0,2893	-997,20	5,65	0,004951	0,2893
28	-9,58	4434,28	-1082,12	7,03	0,007681	0,1329	-1082,13	7,03	0,007681	0,1329
29	695,90	3230,70	-1082,13	7,03	0,007681	0,1329	-997,20	5,65	0,004951	0,2893
30	319,26	3001,64	-4127,38	22,67	-0,001618	0,0000	-1044,65	7,32	0,009924	0,1002
31	0,00	3153,10	-1526,10	3,59	0,030198	0,1108	-96,38	0,00	0,041969	0,1400
32	22,59	1916	-997,20	5,65	0,004951	0,2893	-541,46	0,00	0,017276	0,5560

Źródło: Opracowanie własne.

one różne od tych zestawionych w wektorach $\hat{\alpha}$ i $\text{vec}(\hat{\beta})'$. Mimo to, na mocy definicji obu estymant i jednoznaczności reszt, stanowią one, wraz z wektorem $\hat{v}$, rozwiązanie optymalne programu Z.1. Potwierdza to empirycznie możliwość istnienia dwóch, różnych rozwiązań optymalnych tego zadania, a tym samym niejednoznaczność ocen charakterystyk w punkcie podanych w części trzeciej pracy.

Po zastosowaniu metody CNLS (etap pierwszy metody StoNED), przystąpiono do obliczeń związanych z kolejnymi etapami. Uzyskane wyniki zestawiono w tabeli 2. W pierwszej kolejności obliczono oceny składowych wariancji złożonego składnika losowego (dół tabeli 2). Następnie za ich pomocą, wykorzystując również reszty i wartości estymanty $\hat{f}_{\min}(x_i)$, obliczono ocenę punktową złożonego składnika losowego, dla każdej obserwacji (kolumna 3). Otrzymano także wartości punktowe estymanty maksymalnej produkcji (kolumna 2), ze wzoru:

$$\hat{g}(x) = \hat{f}_{\min}(x) + \hat{\sigma}_u \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right).$$

Wykorzystując te rezultaty otrzymano ostatecznie oceny miernika nieefektywności technicznej (kolumna 4) oraz aproksymację 95% przedziałów ufności dla tego miernika (kolumny 5 i 6). Przedziały te zawierają wprowadzone oceny z kolumny 4, lecz są dość szerokie i niosą niewielką informację o rzeczywistej wartości u_i . Zwróćmy uwagę, że środki tych przedziałów (kolumna 7) leżą zawsze powyżej oceny punktowej odpowiedniego miernika. Wyjątek stanowi jednostka nr 5, o największej nieefektywności, gdzie środek przedziału pokrywa się z oceną miernika. Potwierdza to empirycznie związki tej metody uzyskiwania przedziałów ufności ze skorygowaną MNK sygnalizowane w źródłowej pracy Horrace i Schmidt (1996, str. 259-261).

Własności statystyczne metody StoNED nie są znane, procedura ta jest już jednak stosowana w praktyce gospodarczej (zob. przypis 18). Autor niniejszego opracowania przedstawia więc przykład empiryczny jej zastosowania w celach ilustracyjnych, bez szerszej interpretacji uzyskanych rezultatów. Wobec braku dowodów formalnych na zgodność procedury przeprowadza się badania o charakterze symulacyjnym, których celem jest wykazanie zbieżności wyników otrzymanych przy wykorzystaniu innych metod estymacji, z tymi uzyskanymi za pomocą metody StoNED (zob. Kuosmanen i Kortelainen, 2012, str. 22-25). W niniejszej pracy dokonano również porównania wyników uzyskanych różnymi metodami zastosowanych dla tego samego zestawu danych.

W tabeli 3, w kolumnach 2-4, znajdują się oceny miernika nieefektywności u_i obliczone odpowiednio za pomocą metody StoNED (por. tabela 2, kolumna 4), DEA i skorygowanej MNK (SMNK). Należy jednak wyraźnie zaznaczyć, iż zgodność dwóch ostatnich procedur warunkowana jest ich zastosowaniem w odpowiednio zdefiniowanym modelu. Można przyjąć w szczególności³⁶ model opisany w części drugiej pracy, ale bez składnika białoszumowego v_i . Dodatkowo, w przypadku skorygowanej MNK,

³⁶ Ogólniejsza klasa modeli których estymatory DEA zachowują własność zgodności jest opisana np. w pracach Banker (1993), czy Simar i Wilson (2008).

Tabela 2.

Wyniki związane z realizacją drugiego i trzeciego etapu metody StoNED

i	$\hat{g}(x_i)$	$\hat{\varepsilon}_i$	$\hat{E}(u_i \hat{\varepsilon}_i)$	L	P	(L+P)/2
1	100097,21	651,79	1182,11	42,55	3460,66	1751,61
2	57335,67	-2658,67	2440,56	188,49	5488,48	2838,49
3	50705,64	793,86	1149,04	40,70	3391,57	1716,13
4	31316,17	3040,53	767,46	22,99	2494,61	1258,80
5	45444,47	-11452,77	8979,46	5658,60	12300,32	8979,46
6	40141,28	-6409,88	5033,94	1746,37	8347,57	5046,97
7	39036,73	-6872,33	5392,51	2087,90	8709,59	5398,75
8	31263,47	-1859,17	2037,49	120,15	4932,90	2526,52
9	27756,64	859,06	1134,30	39,89	3360,38	1700,14
10	36266,41	-7729,71	6061,55	2744,47	9381,41	6062,94
11	22425,91	-2265,51	2233,80	149,90	5211,10	2680,50
12	25174,40	-5442,80	4295,90	1099,00	7592,52	4345,76
13	23666,64	-5792,44	4560,20	1318,85	7865,04	4591,95
14	16449,62	171,08	1304,29	49,96	3706,06	1878,01
15	13937,76	2490,94	840,49	25,92	2682,10	1354,01
16	18781,45	-3462,75	2912,97	313,28	6076,26	3194,77
17	17938,77	-3297,67	2810,82	281,27	5953,68	3117,47
18	14290,34	-1537,44	1894,52	102,00	4719,49	2410,74
19	13094,20	-2909,10	2580,74	219,69	5668,87	2944,28
20	12413,51	-2294,31	2248,39	152,36	5231,16	2691,76
21	14343,24	-4936,74	3920,91	820,00	7199,61	4009,80
22	13847,18	-4883,18	3881,87	793,56	7158,16	3975,86
23	8802,36	-880,26	1635,48	75,26	4304,59	2189,93
24	9008,94	-2478,94	2344,00	169,45	5360,75	2765,10
25	8215,33	-3314,63	2821,19	284,38	5966,23	3125,31
26	8098,74	-3564,84	2977,40	335,09	6152,49	3243,79
27	8010,37	-3537,87	2960,29	329,17	6132,33	3230,75
28	7343,38	-2918,68	2586,23	221,00	5675,82	2948,41
29	6139,80	-2213,20	2207,54	145,56	5174,78	2660,17
30	5910,74	-2589,84	2403,18	180,90	5439,39	2810,14
31	6062,20	-2909,10	2580,74	219,69	5668,87	2944,28
32	4825,50	-2886,50	2567,83	216,63	5652,49	2934,56
		$\hat{\sigma}_u^2 =$	13293414,28	$\hat{\sigma}_v^2 =$	3661555,50	

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 3.

Oceny nieefektywności technicznej uzyskane za pomocą metod StoNED, DEA i skorygowanej MNK oraz współczynniki korelacji liniowej i rang Spearmana

Lp.	StoNED	DEA	SMNK	r(DEA,StoNED)=	0,9285
1	1182,11	0,00	48135,59	r_rang(DEA,StoNED)=	0,8399
2	2440,56	0,00	30495,11	r(SMNK,StoNED)=	0,4362
3	1149,04	0,00	21127,74	r_rang(SMNK,StoNED)=	0,3581
4	767,46	0,00	6560,22		
5	8979,46	12891,67	35704,52		
6	5033,94	8403,69	25261,00		
7	5392,51	8986,77	24751,14		
8	2037,49	0,00	12662,66		
9	1134,30	815,43	12773,90		
10	6061,55	9752,29	23958,49		
11	2233,80	0,00	8079,03		
12	4295,90	7481,62	23318,36		
13	4560,20	8063,59	14186,72		
14	1304,29	387,25	4179,13		
15	840,49	0,00	0,00		
16	2912,97	3302,32	8873,66		
17	2810,82	3333,69	8811,24		
18	1894,52	0,00	3141,37		
19	2580,74	342,38	4452,23		
20	2248,39	474,32	5312,29		
21	3920,91	4260,55	7636,98		
22	3881,87	6267,13	7749,96		
23	1635,48	0,00	515,33		
24	2344,00	1360,61	2228,35		
25	2821,19	1359,38	4171,53		
26	2977,40	1953,60	3460,43		
27	2960,29	1658,23	3392,66		
28	2586,23	739,73	2840,93		
29	2207,54	0,00	1512,54		
30	2403,18	0,00	2624,93		
31	2580,74	0,00	3486,62		
32	2567,83	0,00	1642,82		

Źródło: Opracowanie własne.

zakładamy parametryczną postać Cobba i Douglasa granicy produkcyjnej oraz multiplikatywną postać składnika u_i . W metodzie DEA za ocenę u_i przyjmujemy (za pracą Kuosmanen i Kortelainen, 2012, str. 23) wyrażenie $(\theta_{DEA} - 1)y_i$, gdzie θ_{DEA} tzw. miara efektywności technicznej zorientowana na produkty³⁷. Natomiast w SMNK oceną miernika nieefektywności jest $y_i[\exp(e_i^*) - 1]$, gdzie $e_i^* = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} e_i - e_i$ oraz e_i oznaczają reszty MNK uzyskane dla wersji zlogarytmowanej modelu.

W celu określenia stopnia zbieżności wyników uzyskanych tymi, trzema metodami obliczono współczynniki korelacji liniowej między ocenami nieefektywności technicznej oraz współczynniki rang Spearmana, zestawione w prawej części tabeli 3. Wskazują one na silną korelację zarówno ocen miar nieefektywności, jak i rankingów jednostek produkcyjnych otrzymanych za pomocą metod StoNED i DEA. Zatem, mimo że własności metody StoNED nie są poznane (formalnie udowodnione), to jej zastosowanie prowadzi w tym przypadku do bardzo podobnych wyników, jak te uzyskane za pomocą metody DEA.

Dużo słabsza zależność, która jednak wydaje się być dodatnia i istotnie różna od zera, występuje pomiędzy odpowiednimi rezultatami uzyskanymi przy wykorzystaniu metod StoNED i SMNK. Różnice w ocenie nieefektywności technicznej wynikają zapewne z różnych struktur modeli, w ramach których te metody były stosowane, a nie własności statystycznych metody StoNED.

7. ZAKOŃCZENIE

Oprócz problemów fundamentalnych, opisanych w części trzeciej i piątej pracy, występują również inne, o charakterze technicznym, których rozwiązanie mogłoby rozszerzyć zakres stosowania metody StoNED. Chodzi m.in. o przystosowanie metody do multiplikatywnej specyfikacji składników losowych w modelu, stosowanej bardzo często, szczególnie w modelach parametrycznych (zob. przypis 30). Inne, interesujące zagadnienia to:

- zbadanie możliwości rozszerzenia tej metody na dane panelowe,
- uwzględnienie w jej ramach określonego typu globalnego efektu skali,
- zastosowanie metody StoNED dla tzw. funkcji kosztów będących alternatywnym, w stosunku do funkcji produkcji, sposobem modelowania technologii produkcji,
- zbadanie możliwości i konsekwencji uchylenia założenia o stałości wariancji elementów złożonego składnika losowego,
- uchylenie założenia o globalnej wklęsłości funkcji produkcji (np. założenie tzw. quasi-wklęsłości),
- rozszerzenie metody na przypadek wieloproduktowy (np. za pomocą tzw. funkcji odległości).

³⁷ Liczona dla każdego obiektu za pomocą odpowiedniego programu liniowego, szczegóły np. w pracy Kuosmanen i Johnson (2010, str. 152).

Pewne, wstępne podejście do niektórych z powyższych zagadnień zostało już zasygnalizowane w pracy Kuosmanen i Kortelainen (2012, rozdział 4). W opracowaniu tym wymienia się ponadto dużo więcej potencjalnych kierunków przyszłych badań (zob. Kuosmanen i Kortelainen, 2012, str. 26). Jednak ich podjęcie jest uwarunkowane rozwiązaniem w pierwszej kolejności problemów podstawowych opisanych wcześniej. Dotyczy to również ewentualnych zastosowań metody w praktyce gospodarczej (zob. przypis 18).

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

LITERATURA

- [1] Afriat S.N., (1967), *The construction of a utility function from expenditure data*, "International Economic Review" Vol. 8, 67-77.
- [2] Aigner D., Lovell C.A.K., Schmidt P., (1977), *Formulation and estimation of stochastic frontier models*, "Journal of Econometrics" Vol. 6, 21-37.
- [3] Banker R.D., (1993), *Maximum Likelihood, Consistency and Data Envelopment Analysis: A Statistical Foundation*, "Management Science" Vol. 39 (No. 10), 1265-1273.
- [4] Fan Y., Li Q., Weersink A., (1996), *Semiparametric estimation of stochastic production frontier models*, "Journal of Business and Economic Statistics" Vol. 14 (No 4), 460-468.
- [5] Fraser D.A.S., Massam H., (1989), *A mixed primal-dual bases algorithm for regression under inequality constraints: Application to concave regression*, "Scandinavian Journal of Statistics" Vol. 16, 65-74.
- [6] Greene W.H., (2008), *The econometric approach to efficiency analysis*, rozdział 2 w: Fried H., Lovell K., Schmidt S. (eds) "The measurement of productive efficiency and productivity growth", Oxford University Press, New York.
- [7] Groeneboom P., Jongbloed G., Wellner J.A., (2001), *Estimation of a convex function: characterizations and asymptotic theory*, "Annals of Statistics" Vol. 29, 1653-1698.
- [8] Hanson D.L., Pledger G., (1976), *Consistency in concave regression*, "Annals of Statistics" Vol. 4 (No 6), 1038-1050.
- [9] Hildreth C., (1954), *Point estimates of ordinates of concave functions*, "Journal of the American Statistical Association" Vol. 49, 598-619.
- [10] Horrace W.C., Schmidt P., (1996), *Confidence statements for efficiency estimates from stochastic frontier models*, "Journal of Productivity Analysis" Vol. 7, 257-282.
- [11] Jondrow J., Lovell C.A.K., Materov I.S., Schmidt P., (1982), *On estimation of technical inefficiency in the stochastic frontier production function model*, "Journal of Econometrics" Vol. 19, 233-238.
- [12] Kumbhakar S.C., Lovell C.A.K., (2000), *Stochastic frontier analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [13] Kuosmanen T., (2006), *Stochastic nonparametric envelopment of data: combining virtues of SFA and DEA in a unified framework*, MTT Discussion Paper 3/2006 (dostępny na stronie: www.nomepre.net/stoned/).
- [14] Kuosmanen T., (2008), *Representation theorem for convex nonparametric least squares*, "Journal of Econometrics" Vol. 11, 308-325.
- [15] Kuosmanen T., Johnson A., (2010), *Data envelopment analysis as nonparametric least squares regression*, "Operations Research" Vol. 58 (No 1), 149-160.

- [16] Kuosmanen T., Kortelainen M., (2012), *Stochastic non-smooth envelopment of data: semi-parametric frontier estimation subject to shape constraints*, "Journal of Productivity Analysis" Vol. 38, 11-28.
- [17] Kuosmanen T., Kuosmanen N., (2009), *Role of benchmark technology in sustainable value analysis: an application to Finnish dairy farms*, "Agricultural and Food Science" Vol. 18, 302-316.
- [18] Osiewalski J., Wróbel-Rotter R., (2002), *Bayesowski model efektów losowych w analizie efektywności kosztowej (na przykładzie elektrowni i elektrociepłowni polskich)*, „Przegląd Statystyczny” Vol. 50 (No 2), 47-68.
- [19] Prędko A., (2003), *Analiza efektywności za pomocą metody DEA: podstawy formalne i ilustracja ekonomiczna*, „Przegląd Statystyczny” Vol. 50 (No 1), 87-100.
- [20] Prędko A., (2011), *Spojrzenie na metody estymacji w modelach regresyjnych przez pryzmat programowania matematycznego*, wysłane do druku w Wyd. UE we Wrocławiu.
- [21] Richmond J., (1974), *Estimating the efficiency of production*, "International Economic Review" Vol. 15 (No 2), 515-521.
- [22] Serfling R.J., (1991), *Twierdzenia graniczne statystyki matematycznej*, PWN Warszawa.
- [23] Simar L., Wilson P.W., (2008), *Statistical Inference in Nonparametric Frontier Models: Recent Developments and Perspectives*, rozdział 4 w: Fried H., Lovell K., Schmidt S. (eds) "The measurement of productive efficiency and productivity growth", Oxford University Press, New York.
- [24] Simar L., Wilson P.W., (2010), *Estimation and inference in crosssectional stochastic frontier models*, "Econometric Reviews" Vol. 29 (No 1), 62-98.
- [25] Varian H., (1982), *The nonparametric approach to demand analysis*, "Econometrica" Vol. 50, 945-973.
- [26] Wu C.F., (1982), *Some algorithms for concave and isotonic regression*, "TIMS Studies in Management Science" Vol. 19, 105-116.
- [27] Yatchew A.J., Bos L., (1997), *Nonparametric regression and testing in economic models*, "Journal of Quantitative Economics" Vol. 13, 81-131.

WYBRANE METODY ESTYMACJI W SEMIPARAMETRYCZNYM MODELU GRANICZNYM

Streszczenie

W artykule przedstawiono metody estymacji funkcji produkcji używane w ramach szczególnego modelu granicznego. Ma on semiparametryczny charakter, co wynika z faktu, iż sama granica produkcyjna nie jest zadana analitycznie. Założenia dotyczące składnika losowego mają jednak charakter parametryczny. W celu estymacji granicy stosuje się procedurę wieloetapową zwaną StoNED (z ang. *Stochastic Non-smooth Envelopment of Data*). Jej pierwszą część stanowi tzw. metoda CNLS (z ang. *Convex Nonparametric Least Squares*) będąca nieparametrycznym odpowiednikiem MNK. Kolejne etapy przebiegają wg schematu używanego, od wielu lat, na gruncie stochastycznych modeli granicznych. W wyniku uzyskuje się nie tylko estymantę funkcji produkcji w punkcie, lecz także ocenę miernika nieefektywności technicznej dla danej jednostki produkcyjnej. W pracy przedstawiono również pewne uwagi krytyczne dotyczące wad i ograniczeń stosowanej metodologii oraz zilustrowano działanie procedury na przykładzie empirycznym. Na koniec przedstawiono potencjalne kierunki badań w tym zakresie.

Słowa kluczowe: semiparametryczny model graniczny, funkcja produkcji, metoda CNLS, metoda StoNED

SELECTED ESTIMATION METHODS IN THE SEMIPARAMETRIC FRONTIER MODEL

A b s t r a c t

In the paper estimation methods of the production function which are used in the special frontier model are described. The frontier model is of a semiparametric nature, as the production frontier is not given analytically. However, assumptions related to the model errors have parametric character. In order to estimate the frontier, the so-called StoNED (Stochastic Non-smooth Envelopment of Data) multi-stage procedure is used. The first step forms the CNLS method (Convex Nonparametric Least Squares), which is a nonparametric counterpart of OLS. Next stages run according to a scheme, which has been used on the ground of the stochastic frontier models for many years. As a result not only the estimator of the production function is received, but also the estimator of the inefficiency term for a given production unit. In the paper some critical remarks are presented. They are related to faults and limitations of the research methodology. Next, the procedure is illustrated with an empirical study. Finally, potential directions for further research in the area are presented.

Key words: semiparametric frontier model, production function, CNLS method, StoNED method

AGNIESZKA LIPIETA

THE ECONOMY WITH PRODUCTION AND CONSUMPTION SYSTEMS CHANGING IN TIME

1. INTRODUCTION

The Debreu private ownership economy (see Debreu, 1959) models the situation, where two groups of agents: producers and consumers operate in a market. Both of them tend to realize their aims: maximizing the profit on the one hand and maximizing the preferences on the budget sets on the other hand. If the total supply equals the total demand (so Walras Law is satisfied) at given prices, then the economy is in equilibrium, producers and consumers do not have the incentives to change their activities. In the initial model, we do not observe the change of agents' activities in time. In the spirit of comparative statics, the influence of the change of prices on the production and the consumption plans is usually elaborated.

In the real world, the production and the consumption plans are often changed in time. Consequently, the models of the market, elaborated the changes of production and consumption in time, were also constructed. Some of the results, the reader can find in Radner (1970), Chiang (1992), Aliprantis (1996), Panek (1997), Malawski (2001), Magill, Quinzii (2002), Malawski (2005), Malawski, Woerter (2006), Panek (2006).

In this paper, the changes, in the production and consumption systems observed in time, are also elaborated, but the dynamic structure of the economy has its origin in Lipieta (2010), where the influence of the specific properties of consumption sphere on the production plans was studied. Hence, the mathematical tools used in this paper, differ from that what have been used so far, in connection to the description of changes of production or consumption in time. In Lipieta (2010), the case of the consumption system in which all consumption plans are contained in a proper subspace of the commodity – price space was studied. According to the idea of the competitive mechanism, the producers, thinking about the losses' minimization, adjust the quantities of commodities in their production plans to the given relationship. The modification needs alterations in time. The geometric properties of consumption sets and modification of production sets make that the equilibrium in the economy will not be disturbed during the adjustment process. This change of the production sphere leads to the definition of the economy defined on the basis of the Debreu economy, in which the production and consumption plans are continuous functions defined on the (time) interval $[0, 1]$.

The paper is organized as follows: in the next section, the construction of the Debreu private ownership economy is presented. In the third part, the description of the change of production sphere in a Debreu economy, where consumption sets are contained in the proper subspace of the commodity – price space, is presented; the forth part focuses on the definition and the structure of action of the economy with the commodity – price space dependent on time.

2. MODEL

A model of the private ownership Debreu economy described in Debreu (1959) is defined in the form of a relational system consisted of the combination of the production and the consumption systems (see for instance Malawski, 2005; Lipieta, 2010). The linear space $\mathbb{R}^\ell$, $\ell \in \{1, 2, \dots\}$ with the scalar product

$$(x \circ y) = (x_1, \dots, x_\ell) \circ (y_1, \dots, y_\ell) = \sum_{k=1}^{\ell} x_k \cdot y_k,$$

is interpreted as the ℓ – dimensional space of commodities and prices. Let $n \in \{1, 2, \dots\}$. Then

- $J = \{1, \dots, n\}$ is a finite set of producers,
- $y : J \ni j \rightarrow Y^j \subset \mathbb{R}^\ell$ is the correspondence of production sets, which to every producer j assigns a production set $Y^j \subset \mathbb{R}^\ell$ of the producer's feasible production plans,
- $p \in \mathbb{R}^\ell$ denotes a price vector.

Now we can assume the following definitions:

Definition 1. If for the given price vector $p \in \mathbb{R}^\ell$

$$\forall j \in J \quad \eta^j(p) \stackrel{\text{def}}{=} \{y^{j*} \in Y^j : p \circ y^{j*} = \max\{p \circ y^j : y^j \in Y^j\}\} \neq \emptyset, \quad (1)$$

then

- $\eta : J \ni j \rightarrow \eta^j(p) \subset \mathbb{R}^\ell$ is called the correspondence of supply, which to every producer $j \in J$ assigns the set $\eta^j(p)$ of production plans maximizing their profit at given price system p ; the plans belonging to set $\eta^j(p)$ will be called optimal plans of producer j ,
- $\pi : J \ni j \rightarrow \pi^j(p) \in \mathbb{R}$ is the maximal profit function at given price system p , where for every $j \in J$, $\pi^j(p) = p \circ y^{j*}$ for $y^{j*} \in \eta^j(p)$.

Definition 2. The two – range relational system

$$P = (J, \mathbb{R}^\ell; y, p, \eta, \pi)$$

is called the production system.

Similarly, let $m \in \{1, 2, \dots\}$. Then

- $I = \{1, \dots, m\}$ is a finite set of consumers,
- $\Xi \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell$ is the family of all preference relations defined on commodity space $\mathbb{R}^\ell$,
- $\chi : I \ni i \rightarrow X^i \subset \mathbb{R}^\ell$ is the correspondence of consumptions sets which to every consumer $i \in I$ assigns a consumption set $\chi(i) = X^i$ being a subset of the commodity space and representing the consumer's feasible consumption plans,
- $e : I \ni i \rightarrow e^i \in X^i$ is an initial endowment mapping which to every consumer $i \in I$ assigns an initial endowment vector $e^i \in X^i$,
- $\varepsilon \subset I \times (\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell)$ is a correspondence of preference relations, which to every consumer $i \in I$ assigns a preference relation $\preceq^i$ from the set Ξ restricted to the consumption set X^i ,
- $p \in \mathbb{R}^\ell -$ is a price vector.

Notice that the expenditures of every consumer $i \in I$ are not greater than the value

$$w^i = p \circ e^i. \quad (2)$$

The following definitions may be assumed on the basis of the above:

Definition 3. If for the given price vector $p \in \mathbb{R}^\ell$

$$\forall i \in I \quad \beta^i(p, w^i) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \chi(i) : p \circ x \leq w^i\} \neq \emptyset \quad (3)$$

$$\forall i \in I \quad \varphi^i(p, w^i) \stackrel{\text{def}}{=} \{x^{i*} \in \beta^i(p, w^i) : \forall x^i \in \beta^i(p, w^i) \quad x^i \preceq^i x^{i*}, \preceq^i \in \Xi\} \neq \emptyset, \quad (4)$$

then

- $\beta : I \ni i \rightarrow \beta^i(p, w^i) \subset \mathbb{R}^\ell$ is the correspondence of budget sets, which to every consumer assigns his set of budget constraints $\beta^i(p, w^i) \subset \chi(i)$ at the price system p and the initial endowment $e(i)$,
- $\varphi : I \ni i \rightarrow \varphi^i(p, w^i) \subset \mathbb{R}^\ell$ is the demand correspondence at given price system p , which to every consumer $i \in I$ assigns his consumption plans maximizing his preference on the budget set $\beta^i(p, w^i)$; the plans belonging to set $\varphi^i(p, w^i)$ will be called optimal plans of consumer i .

Definition 4. The three – range relational system

$$C = (I, \mathbb{R}^\ell, \Xi; \chi, e, \varepsilon, p, \beta, \varphi)$$

is called the consumption system.

Let $p \in \mathbb{R}^\ell$ be a price vector, P – a production system and C – a consumption system in the same space $\mathbb{R}^\ell$. Suppose that the mapping $\theta : I \times J \rightarrow [0, 1]$ satisfying

$$\forall j \in J \quad \sum_{i \in I} \theta(i, j) = 1 \quad (5)$$

is given. Let's assume that every consumer shares in the producers' profits. Number $\theta(i, j)$ indicates that part of the profit of producer j which is owned by consumer i . Then the value w^i ($i \in I$) in (2) is changed by the rule

$$w^i = p \circ e^i + \sum_{j \in J} \theta(i, j) \cdot \pi^j(p). \quad (6)$$

Let

$$\omega = \sum_{i \in I} e(i) \in \mathbb{R}^\ell. \quad (7)$$

If, at the given $p \in \mathbb{R}^\ell$, conditions (1), (3) and (4) are satisfied with w^i for every consumer i calculated by (6), then the following definition may be formulated:

Definition 5. The relational system

$$E_p = (P, C, \theta, \omega)$$

is called the Debreu private ownership economy (shortly called the Debreu economy).

The vector (7) is called the total endowment of the economy E_p .

It is well known that a Debreu private ownership economy E_p operates as follows. Let a price vector $p \in \mathbb{R}^\ell$ be given. Every producer j chooses a production optimal plan $y^{j*} \in \eta^j(p) \subset Y^j$ maximizing his profit at the price system p . The vector

$$y^* = y^{1*} + \dots + y^{n*} \quad (8)$$

is called the optimal total production plan. Maximal profit of each producer is divided among all consumers according to function θ (see (5)). Now the expenditures of every consumer i cannot be greater than value w^i (see (6)). In this situation, every consumer i chooses his optimal consumptions plan $x^{i*} \in \varphi^i(p, w^i) \subset X^i$ maximizing his preference on the budget set $\beta^i(p, w^i)$. The vector

$$x^* = x^{1*} + \dots + x^{m*} \quad (9)$$

is called the optimal total consumption plan. If

$$x^* - y^* = \omega, \quad (10)$$

which means the total supply equals the total demand (so Walras Law is satisfied), then vector p is called the equilibrium price vector and it is denoted by p^* , vector (8) is called the equilibrium total production plan and vector (9) – the equilibrium total consumption plan. Consequently, the sequence

$$((x^{i*})_{i \in I}, (y^{j*})_{j \in J}, p^*) \stackrel{\text{def}}{=} (x^{1*}, \dots, x^{m*}, y^{1*}, \dots, y^{n*}, p^*) \in (\mathbb{R}^\ell)^{m+n+1}$$

is called the state of Walras equilibrium in the private ownership economy E_p (see Malawski, 2005).

3. DEBREU ECONOMY WITH REDUCED CONSUMPTION OR PRODUCTION SPHERE

At the beginning of this part of the paper, some properties of subspaces of space $\mathbb{R}^\ell$, will be presented. Let $V \subset \mathbb{R}^\ell$ be a subspace of dimension $\ell - k$, $k \in \{1, \dots, \ell - 1\}$. Then there exist linearly independent vectors $h^1, \dots, h^k \in \mathbb{R}^\ell$ ($h^s = (h_1^s, \dots, h_\ell^s)$, $s \in \{1, 2, \dots, k\}$) such that

$$V = \bigcap_{s=1}^k \ker \tilde{h}^s \quad (11)$$

where

$$\tilde{h}^s : \mathbb{R}^\ell \ni x \rightarrow x_1 h_1^s + \dots + x_\ell h_\ell^s \in \mathbb{R} \quad (12)$$

are, for every $s \in \{1, 2, \dots, k\}$, the linear and continuous functions.

Let $E_p = (P, C, \theta, \omega)$ be a Debreu economy. Assume that there exists a proper subspace V of the commodity – price space $\mathbb{R}^\ell$ such that

$$\forall i \in I \ X^i \subset V \quad (13)$$

(see Lipieta, 2010). The economy $E_p = (P, C, \theta, \omega)$ in which condition (13) is satisfied for some subspace V of commodity – price space $\mathbb{R}^\ell$ will be called the Debreu economy with reduced the consumption sphere. The consumption plans satisfying condition (13) are often seen in the real economy. We can observe the commodities, so called complementary commodities (see Varian, 1999; Lipieta, 2010), which quantities are proportional (or at least approximately proportional). This dependency may be caused by nature of commodities or their application. It may also appear that the consumers are not interested in the consumption at least one of the commodities offered by producers. We show that in the above cases the condition (13) is satisfied.

Let x^i be a consumption plan of consumer i ($x^i \in X^i$). If the quantities of commodities $k_1, k_2 \in \{1, \dots, \ell\}$ ($k_1 \neq k_2$) of plan x^i are proportional, then there exists $a > 0$ such that

$$x_{k_1}^i = a \cdot x_{k_2}^i. \quad (14)$$

Hence $\tilde{h}(x^i) = 0$, where

$$\tilde{h} : \mathbb{R}^\ell \ni x \rightarrow x_{k_1} - a \cdot x_{k_2} \in \mathbb{R} \quad (15)$$

is the linear and continuous function. By the above, $x^i \in \ker \tilde{h} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^\ell : \tilde{h}(x) = 0\}$. Let us recall, that set $\ker \tilde{h}$ is the linear subspace of $\mathbb{R}^\ell$ of dimension $\ell - 1$. If condition (14) is seen for all plans $x^i \in X^i$ then

$$X^i \subset \ker \tilde{h}. \quad (16)$$

If condition (16) is hold for every consumer $i \in I$, then condition (13) is satisfied for $V = \ker \tilde{h}$. Let us notice that, if commodities $k_1, k_2 \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ satisfy condition (14), then they are (perfect) complementary. Hence the economy with reduced consumption

sphere, in which all functionals $\tilde{h}^s$, $s \in \{1, \dots, k\}$, are of the form (15), is also called the economy with complementary commodities (see Lipieta, 2010).

Now, suppose that there exists vector h , of the form

$$h = \begin{cases} 1 & \text{for } k = k_0 \\ 0 & \text{for } k \neq k_0 \end{cases} \quad (17)$$

for some $k_0 \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ for which $X^i \subset \ker \tilde{h}$ and $\tilde{h}$ is of the form (12) with vector h by (17). Then coordinate k_0 is equal 0 in every plan of consumer i . Hence consumer i is not interested in consumption of the commodity k_0 .

Notice that productions sets Y^j ($j \in J$) sometimes also satisfy condition

$$\forall j \in J \ Y^j \subset V \quad (18)$$

Condition (18) can be satisfied, if the quantities of commodities (inputs or outputs) are proportional in production plans or if there exists an commodity which, for every producer, is neither output nor input. Generally production sets do not have to be contained in a subspace of commodity space $\mathbb{R}^\ell$. The economy $E_p = (P, C, \theta, \omega)$, in which condition (18) is satisfied for some subspace V of commodity – price space $\mathbb{R}^\ell$, will be called the Debreu economy with reduced production sphere.

4. THE ECONOMY WITH DYNAMICAL PRODUCTION SYSTEM

Assume that there exists at least two commodities which quantities are proportional in plans of all consumers in a Debreu economy E_p . The producers, observing consumers' activity are aware of this dependency. The change of the production sphere, to get the same dependency in production plans, is the simplest way to avoid the surplus of outputs. Similarly, if there exists a commodity – the output of some producers – which is not the input for any producer and which is not desired by consumers, then producers may, thinking about the increase of the profit, want to eliminate this commodity from their production plans even if there exists an equilibrium in the economy. The existence of undesired or complementary commodities can lead to the changing production plans (notice that the non consumable goods, which are outputs of some producers and inputs for the others, play important role in production sphere and in the trade, so the producers, in their own interest, will not want to give up these commodities from production plans). To sum up, in the spirit of the competitive mechanism, the producers, in some cases, change their production activities (represented by production sets) to meet the consumers' requirements.

The construction of the Debreu economy with reduced both consumption and production spheres on the basis of the economy with reduced consumption sphere presented in Lipieta (2010) leads to the construction of the economy, where production and consumption plans are functions dependent on time (the economy with production and consumption systems changing in time).

Firstly, we present the details about the economy with reduced consumption sphere, which will be of use later. Let $E_p = (P, C, \theta, \omega)$ be a private ownership Debreu economy, where condition (13) is satisfied. Suppose, that subspace V of dimension $\ell - k$ ($k \in \{1, \dots, \ell - 1\}$) satisfying assumption (13), is of the form (11) with linearly independent functionals $\tilde{h}^1, \dots, \tilde{h}^k$ satisfying (12). Let $q^1, \dots, q^k \in \mathbb{R}^\ell$ be the solution of the system of equations

$$\tilde{h}^s(q^r) = \delta^{sr} \quad \text{for } s, r \in \{1, \dots, k\}, \quad (19)$$

where

$$\delta^{sr} = \begin{cases} 1 & \text{if } s = r \\ 0 & \text{if } s \neq r \end{cases}$$

is Kronecker delta. Let mapping $Q : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ be of the form

$$Q(x) = x - \sum_{s=1}^k \tilde{h}^s(x) \cdot q^s \quad (20)$$

and mapping $\hat{Q} : \mathbb{R}^\ell \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ be defined by

$$\hat{Q}(x, t) = x - t \cdot \sum_{s=1}^k \tilde{h}^s(x) \cdot q^s. \quad (21)$$

We say that vectors $q^1, \dots, q^k$ assign the direction of mappings Q and $\hat{Q}$. Let us notice, that mapping Q is the linear and continuous operator and

$$\forall x \in \mathbb{R}^\ell \quad Q(x) \in V \quad \text{and} \quad \forall v \in V \quad Q(v) = v. \quad (22)$$

By (22), mapping Q is the (linear and continuous by (20) and (12)) projection from $\mathbb{R}^\ell$ into V . Moreover, if mappings Q and $\hat{Q}$ are assigned by the same vectors $q^1, \dots, q^k$ then

$$\forall x \in \mathbb{R}^\ell \quad \hat{Q}(x, 1) = Q(x),$$

so

$$\forall v \in V \quad \forall t \in [0, 1] \quad \hat{Q}(v, t) = v.$$

Let subspace $V \subset \mathbb{R}^\ell$ be of the form (11). Notice that if $p \notin V^T$, then the system of equalities

$$\begin{cases} \tilde{h}^s(x) = \delta^{sr} \\ p \circ x = 0 \end{cases} \quad s, r \in \{1, \dots, k\} \quad (23)$$

also, for every $r \in \{1, \dots, k\}$, has a solution.

Keeping the above assumptions and notations, reasoning analogously as in the proof of theorem 4.2 in Lipieta (2010), we get that the following is true:

Theorem 1. Let E_p be a Debreu economy satisfying (13). Let vectors $q^1, \dots, q^k \in \mathbb{R}^\ell$ satisfy (19) and additionally (23) if $p \notin V^T$. Assume that $Q : \mathbb{R}^\ell \rightarrow V$ is the projection of the form (20) assigned by vectors $q^1, \dots, q^k$. Then

1. $\forall j \in J$ if $y^{j*} \in \eta^j(p)$, then $Q(y^{j*})$ maximizes at price p the profit of the j -th producer on the modified production set $Q(Y^j)$,
2. $\forall i \in I$ if $x^{i*} \in \varphi^i(p, w^i)$, then x^{i*} maximizes at price p the preference of the i -th consumer on the set $\{x \in X^i : p \circ x \leq p \circ e^i + \sum_{j \in J} \theta(i, j) \cdot (p \circ Q(y^{j*}))\}$.

Analogously to the proof of theorem 4.2 in Lipieta (2010), we can prove the following:

Theorem 2. Let E_p be a Debreu economy satisfying (13). Let vectors $q^1, \dots, q^k \in \mathbb{R}^\ell$ satisfy (19) and additionally (23) if $p \notin V^T$. Assume that mapping $\hat{Q} : \mathbb{R}^\ell \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ of the form (21) is assigned by vectors $q^1, \dots, q^k \in \mathbb{R}^\ell$. Then

1. $\forall j \in J$ if $y^{j*} \in \eta^j(p)$ then, for every $t \in [0, 1]$, vector $\hat{Q}(y^{j*}, t)$ maximizes (at price p) the profit of producer j on the modified production set $\hat{Q}(Y^j, t) = \{\hat{Q}(y^j, t) \in \mathbb{R}^\ell : y^j \in Y^j\}$.
2. $\forall i \in I$ if $x^{i*} \in \varphi^i(p, w^i)$ then x^{i*} maximizes (at price p) the preference of consumer i on the set $\{x \in X^i : p \circ x \leq p \circ e^i + \sum_{j \in J} \theta(i, j) \cdot p \circ \hat{Q}(y^{j*}, t)\}$.

Now we define the private ownership economy with the commodity – price space of continuous functions defined on the time interval $[0, 1]$, on the basis of Debreu economy E_p satisfying condition (13). The elements of such commodity – price space will be streams of production and constant mappings of consumption and prices.

Let E_p be a Debreu private ownership economy satisfying (13). Let vectors $q^1, \dots, q^k \in \mathbb{R}^\ell$ be obtained by condition (19). Moreover, if $p^* \notin V^T$, we assume that $q^1, \dots, q^k$ satisfy additionally system of equalities (23). Let $\hat{Q} : \mathbb{R}^\ell \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ be the mapping of the form (21) assigned by vectors $q^1, \dots, q^k$. For every $z \in \mathbb{R}^\ell$ we put the constant mapping:

$$\bar{z} : [0, 1] \ni t \rightarrow z \in \mathbb{R}^\ell.$$

It is obvious that for every $z \in \mathbb{R}^\ell$, mapping $\bar{z}$ is continuous. The sets of all continuous mappings from $[0, 1]$ into $\mathbb{R}^\ell$ will be noted by $C([0, 1], \mathbb{R}^\ell)$.

Remark 1. The mapping:

$$C([0, 1], \mathbb{R}^\ell) \times C([0, 1], \mathbb{R}^\ell) \ni (f, g) \rightarrow \int_0^1 f(t) \circ g(t) dt \in \mathbb{R}$$

is the scalar product in space $C([0, 1], \mathbb{R}^\ell)$, which for every $z, s \in \mathbb{R}^\ell$ satisfies:

$$\bar{z} \circ \bar{s} = z \circ s.$$

Let P be a production system (see def. 2). The following is justified:

Definition 6. The two – range relational system $\check{P} = (J, C([0, 1], \mathbb{R}^\ell); \check{y}, \check{p}, \check{\eta}, \check{\pi})$ where

- $J = \{1, 2, \dots, n\}$ is the finite set of producers from system P ,
- $\check{y} : J \ni j \rightarrow \check{Y}^j \subset C([0, 1], \mathbb{R}^\ell)$ is the correspondence of production sets changing in (depended on) time, which to every j -th producer ($j \in J$) assigns the production set

$$\check{Y}^j = \{\hat{Q}(y^j, \cdot) \in C([0, 1], \mathbb{R}^\ell) : y^j \in Y^j\}$$

where set $\{\hat{Q}(y^j, t) : y^j \in Y^j\}$ means the set of producer's plans at time t ,

- $\check{p} = \bar{p} \in C([0, 1], \mathbb{R}^\ell)$ is the price (constant) mapping,
- $\check{\eta} : J \ni j \rightarrow \check{\eta}^j(\check{p}) \subset C([0, 1], \mathbb{R}^\ell)$ is the correspondence of supply, which to every producer $j \in J$ assigns set $\check{\eta}^j(\check{p})$ of production plans maximizing his profit at the price system $\check{p}$ on set $\check{Y}^j$, $\check{\eta}^j(\check{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\hat{Q}(y^{j*}, \cdot) \in C([0, 1], \mathbb{R}^\ell) : y^{j*} \in \eta^j(p)\}$,
- $\check{\pi} : J \ni j \rightarrow \check{\pi}^j(\check{p}) \in C([0, 1], \mathbb{R})$ is the maximal profit function, where for every $j \in J$

$$(\check{\pi}^j(\check{p}))(t) = \int_0^1 \check{p}(t) \circ \hat{Q}(y^{j*}, t) dt = \begin{cases} 0 & \text{if } p \in V^T \\ \pi^j(p) & \text{if } p \notin V^T \end{cases},$$

is the dynamical production system assigned by mapping $\hat{Q}$ on the basis of production system P (see def. 2).

Now, similarly to the above, we consider the consumption system defined in time, on the basis of consumption system C by definition 4. Let

- $I = \{1, \dots, m\}$ be the finite set of consumers from system C ,
- $\check{\Xi} \subset [0, 1] \times \Xi$ be the family of preference relations defined on the commodity space $\mathbb{R}^\ell$ constant in time, where $\Xi \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell$ is the family of preference relations on space $\mathbb{R}^\ell$,
- $\check{\chi} : I \ni i \rightarrow \check{X}^i \subset C([0, 1], \mathbb{R}^\ell)$ be the correspondence of consumptions sets which to every consumer i assigns the consumption set $\check{\chi}(i) = \check{X}^i$,

$$\check{X}^i = \{\hat{Q}(x^i, \cdot) \in C([0, 1], \mathbb{R}^\ell) : x^i \in X^i\} = \{\bar{x}^i \in C([0, 1], \mathbb{R}^\ell) : x^i \in X^i\}$$

being a subset of the commodity space and representing the consumer's feasible consumption plans $(\check{\chi}(i))(t)$ at time $t \in [0, 1]$, with respect to his psycho – physical structure,

- $\check{e} : I \ni i \rightarrow e^i \in C([0, 1], \mathbb{R}^\ell)$ be the function of initial endowment which to every consumer i assigns an initial endowment vector e^i at time $t \in [0, 1]$; $\check{e}(i) = \bar{e}^i \in \check{X}^i$; precisely $\forall t \in [0, 1] (\check{e}(i))(t) = e^i$,
- $\check{\Xi} \subset [0, 1] \times I \times \Xi$ be the correspondence of preference relations, which at every time $t \in [0, 1]$, to every consumer $i \in I$ assigns a preference relation $\preccurlyeq^i$ from the set Ξ ,
- $\check{p} = \bar{p} \in C([0, 1], \mathbb{R}^\ell)$ is the price (constant) mapping.

We assume, as in the economy E_p , that the expenditures of every consumer i at the time $t \in [0, 1]$, cannot be greater than the constant value

$$\check{w}^i(t) = \check{p}(t) \circ (\check{e}(i))(t) = p \circ e^i = w^i. \quad (24)$$

Similarly, (see remark 1) for every $i \in I$, $x^i \in X^i$ and $t \in [0, 1]$

$$(\check{p} \circ \check{x}^i)(t) = \check{p}(t) \circ \check{x}^i(t) = p \circ x^i.$$

Now, let

$$\check{\beta}^i(\check{p}, \check{w}^i) \stackrel{\text{def}}{=} \{\check{x}^i = \bar{x}^i \in \check{X}(i) : \check{p} \circ \check{x}^i \leq \check{w}^i\}$$

and

$$\check{\varphi}^i(\check{p}, \check{w}^i) \stackrel{\text{def}}{=} \{\check{x}^{i*} \in \check{\beta}^i(\check{p}, \check{w}^i) : \forall \check{x}^i \in \check{\beta}^i(\check{p}, \check{w}^i) \quad \check{x}^i \preceq^i \check{x}^{i*}, \preceq^i \in \check{\Xi}\} \neq \emptyset.$$

Hence for every $t \in [0, 1]$ and $i \in I$

$$(\check{\beta}^i(\check{p}, \check{w}^i))(t) = \beta^i(p, w^i) \text{ and } (\check{\varphi}^i(\check{p}, \check{w}^i))(t) = \varphi^i(p, w^i)$$

and consequently, for every $t \in [0, 1]$ and $i \in I$,

$$\check{\beta}^i(\check{p}, \check{w}^i)(t) \neq \emptyset \text{ and } \check{\varphi}^i(\check{p}, \check{w}^i)(t) \neq \emptyset.$$

In this situation we put the following:

- $\check{\beta} : I \ni i \rightarrow \check{\beta}^i(\check{p}, \check{w}^i) \subset C([0, 1], \mathbb{R}^\ell)$ – the correspondence of budget sets at time, which to every consumer $i \in I$ assigns his function of budget constrains, at price system $\check{p}$ and initial endowment $\check{e}(i)$; moreover

$$\forall i \in I \quad \forall t \in [0, 1] \quad (\check{\beta}(i))(t) \subset (\check{X}(i))(t) \wedge (\check{\beta}(i))(t) = \beta(i)$$

- $\check{\varphi} : I \ni i \rightarrow \check{\varphi}^i(\check{p}, \check{w}^i) \subset C([0, 1], \mathbb{R}^\ell)$ – the demand correspondence, which to every consumer $i \in I$ assigns his consumption plans $(\check{\varphi}(i))(t)$ maximizing at time $t \in [0, 1]$ his preference on budget set $(\check{\beta}(i))(t)$

$$\forall i \in I \quad \forall t \in [0, 1] \quad (\check{\varphi}(i))(t) = \varphi(i).$$

The above leads as to the next definition:

Definition 7. The three – range relational system

$$\check{C} = (I, C([0, 1], \mathbb{R}^\ell), \check{\Xi}; \check{\chi}, \check{e}, \check{\varepsilon}, \check{p}, \check{\beta}, \check{\varphi})$$

is called the (constant at time) consumption system.

Let $\check{p} \in C([0, 1], \mathbb{R}^\ell)$ be the price vector not changing in time ($\check{p} = \bar{p}$), $\check{P}$ – a production system and $\check{C}$ – a consumption system in space $C([0, 1], \mathbb{R}^\ell)$. Let $\check{\theta} :$

$[0, 1] \times I \times J \rightarrow [0, 1]$ be the mapping defined on the basis of function θ (by (5)). Then, for every $t \in [0, 1]$:

$$\check{\theta}(t, i, j) = \theta(i, j) \quad (25)$$

Moreover, by conditions (5) and (25), we get that

$$\forall t \in [0, 1] \quad \forall j \in J \quad \sum_{i \in I} \check{\theta}(t, i, j) = 1.$$

Every consumer shares in the producers' profits. Number $\check{\theta}(t, i, j)$ indicates that part of the profit of producer j which is owned by consumer i at time t . In this situation function value $\check{w}^i$ in (24) is changed by the rule

$$\check{w}^i(t) = \check{p}(t) \circ (\check{e}(i))(t) + \sum_{j \in J} \check{\theta}(t, i, j) \cdot \check{\pi}^j(\check{p}) \quad (26)$$

By (24), (25), (6) and (26), for every $i \in I$, $t \in [0, 1]$,

$$\check{w}^i(t) = w^i.$$

Let

$$\check{\omega} = \check{e}^1 + \dots + \check{e}^m \in C([0, 1], \mathbb{R}^\ell). \quad (27)$$

Mapping (27) is called the mapping of total endowment. In this situation the finally definition may be formulated:

Definition 8. The relational system $\check{E}_p = (\check{P}, \check{C}, \check{\theta}, \check{\omega})$ is called the dynamical private ownership economy with changing production. The state of economy $\check{E}_p$ at the time $t \in [0, 1]$ will be denoted by $\check{E}_p(t)$.

By definitions 7 and 8, we additionally get that the state of economy $\check{E}_p$ at the time $t \in [0, 1]$ (denoted by $\check{E}_p(t)$) is the Debreu private ownership economy.

At the end of that paper we present the structure of action of economy $\check{E}_p$. Let $t = 0$ be the beginning of process of changing of production system. At time $t = 0$, the action of economy $\check{E}_p$ is the same as in the Debreu private ownership economy E_p . Assume that every producer manages to maximize his profit and every consumer manages to maximize his preference on the budget at the same price vector $p \in \mathbb{R}^\ell$. At every (later) point of time t_1 , $0 < t_1 \leq 1$, the producers change their production which is reflected in modified production sets $\hat{Q}(Y^j, t_1)$. The plan $\hat{Q}(y^{j*}, t_1)$, for every $j \in J$, maximizes the profit of producer j at price vector $\check{p}(t_1) = p$. The optimal consumers' plans remain unchanged. At time $t = 1$, economy $\check{E}_p(t)$ is the Debreu economy with reduced production and consumption sphere with the same subspace of space $\mathbb{R}^\ell$. Moreover, if sequence

$$(x^{1*}, \dots, x^{m*}, y^{1*}, \dots, y^{n*}, p^*) \in \mathbb{R}^\ell$$

is the state of Walras equilibrium in the private ownership economy E_p for $p = p^*$, then for every $t \in [0, 1]$, the sequence

$$(x^{1*}, \dots, x^{m*}, \hat{Q}(y^{1*}, t), \dots, \hat{Q}(y^{n*}, t), p^*) \in \mathbb{R}^\ell$$

is also the state of Walras equilibrium in the private ownership economy $\check{E}_p(t)$ (see theorems 1 and 2, conditions (24)–(27)).

5. CONCLUSIONS

In the contemporary economy, consumers deals with the great number of pairs of complementary commodities. There are also some commodities which are not wanted by all consumers. The Debreu economy with reduced consumption sphere reflects these situations. That two economic properties of consumption sphere leads to the geometrical properties of consumption plans. The producers will want to change their production to offer production plans satisfying the same properties. The dynamical private ownership economy with changing production models such situation. As the result, the Debreu private ownership economy $\check{E}_p(1)$ (see def. 8) is obtained, in which, in case of the existence of the equilibrium, the producers do not have motivation to change their production plans.

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

REFERENCES

- [1] Aliprantis C.D., (1996), Problems in Equilibrium Theory, Springer – Verlag Berlin – Heidelberg, Germany.
- [2] Balasko Y., (1998), Foundations of the Theory of General Equilibrium, Academic Press, INC, Orlando, Florida, USA.
- [3] Cheney E.W., (1966), Introduction to Approximation Theory, Mc Grow Hill, New York.
- [4] Chiang A.C., (1992), Elements of Dynamic Optimization, New York: McGraw-Hill, Inc.
- [5] Debreu G., (1959), Theory of value, New York, Wiley.
- [6] Lipieta A., (2010), The Debreu private ownership economy with complementary commodities and prices, Economic Modelling, 27, 22-27.
- [7] Magill M., Quinzii M., (2002), Theory of Incomplete Markets, MIT Press, Cambridge.
- [8] Malawski A., (2001), Metoda aksjomatyczna w ekonomii. Studia nad strukturą i ewolucją systemów ekonomicznych, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław.
- [9] Malawski A., (2005), A dynamical system approach to the Arrow – Debreu theory of general Equilibrium, The 9 – th World Multi – Conference on Systemics, Cybernetics, and Informatics, Proceeding 2005, vol. 7, July 10-13, Orlando, Florida, USA.
- [10] Malawski A., Woerter M., (2006), Diversity Structure of the Schumpeterian Evolution. An axiomatic approach, Arbeitspapiere/Working Papers of the Swiss Institute for Business Cycle Research, No 153, Zurich.
- [11] Panek E., (1997), Elementy ekonomii matematycznej. Równowaga i wzrost, PWN, Warszawa.
- [12] Panek E., (2006), Dynamika niestacjonarnych systemów ekonomicznych, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.
- [13] Radner R., (1972), Existence of Equilibrium of Plans, Prices and Price Expectations in a Sequence of Markets, Econometrica, 40, 289-303.
- [14] Varian H.R., (1999), Intermediate Microeconomics. A Modern Approach, W. W. Norton & Company, New York, London.

EKONOMIA ZE ZMIENIAJĄCYMI SIĘ W CZASIE SYSTEMAMI PRODUKCJI I KONSUMPCJI

Streszczenie

Założmy, że w ekonomii E_p Debreu z własnością prywatną, istnieją przynajmniej dwa towary, których ilości we wszystkich planach konsumpcji są proporcjonalne. Ta zależność powoduje, że producenci zmieniają swoje plany produkcji, tak aby dopasować je do wymagań konsumentów. W artykule analizowany jest proces dostosowawczy producentów, spowodowany przez wspomnianą własność zbiorów konsumpcji. W rezultacie zdefiniowano ekonomię $\check{E}_p$, ze zmieniającymi się w czasie systemami produkcji i konsumpcji, której przestrzeń towarów i cen jest przestrzenią funkcji ciągłych określonych na przedziale czasu $[0, 1]$, o wartościach w przestrzeni towarów i cen początkowej ekonomii E_p .

Słowa kluczowe: ekonomia Debreu, dobra komplementarne, projekcje, równowaga

THE ECONOMY WITH PRODUCTION AND CONSUMPTION SYSTEMS CHANGING IN TIME

Abstract

Assume that, in a private ownership Debreu economy E_p , among all the commodities there are at least two whose quantities, employed by consumers in all their plans of action, are proportional. This property leads producers change their production plans to satisfy the consumers' requirements. The producers' adjustment process, caused by the special form of consumers' plans, is modeled. As the result, the economy $\check{E}_p$ with dynamical production and consumption systems is defined. The commodity – price space of economy $\check{E}_p$ is the space of continuous functions defined on time interval $[0, 1]$ with values in the commodity – price space of economy E_p .

Key words: Debreu economy, complementary commodities, projections, equilibrium

ANETA ZGLIŃSKA-PIETRZAK

ZASTOSOWANIE METODY BOOTSTRAPOWEJ W ANALIZIE PORTFELOWEJ

1. WSTĘP

Metody bootstrapowe, zwane też sznurowadłowymi (zob. np. Domański, Pruska, 2000) to metody zwrotnego losowania prób w celu ich wykorzystania do liczenia wartości bootstrapowych różnych funkcji (statystyk, funkcjonałów). Znalazły one zastosowanie w wielu dziedzinach nauki. Po raz pierwszy zostały zaprezentowane przez Efrona (1979) we wnioskowaniu statystycznym. Od tej pory popularność tych metod nieustannie wzrasta. W literaturze z zakresu wnioskowania statystyczno-ekonometrycznego w ramach tych metod można wyróżnić m.in. ich zastosowanie do badania przedziałów ufności i do rozwiązywania problemów analizy szeregów czasowych.

Pierwsze z wymienionych zastosowanie algorytmu bootstrapowego dotyczyło wyznaczania standardowych błędów estymatorów parametrów rozkładu zmiennej losowej oraz przedziałów ufności dla wartości wybranej statystyki (Efron, 1979; Efron, Tibshiriani, 1993).

W przypadku szeregów czasowych metody bootstrapowe stosuje się m.in. do analizy struktury szeregu czasowego lub do weryfikacji hipotezy zakładającej postać lub rząd zintegrowania szeregu. Powszechnie jest również stosowanie tych metod do badania mocy testów, gdyż w porównaniu z metodami Monte Carlo dostarczają one dokładniejszego przybliżenia asymptotycznego przez zastosowanie tzw. rozwinięcia Edgewortha (Hall, 1992).

Metody bootstrapowe należą do klasy metod symulacyjnych polegających na wnioskowaniu o danej wartości procesu na podstawie wielokrotnego losowania obserwacji z próby pierwotnej (*resampling methods*). Losowania biorą pod uwagę wszystkie możliwe kombinacje elementów pochodzących z próby, bazując na danych rzeczywistych. Wykorzystanie losowań zwrotnych może być praktycznym rozwiązaniem w sytuacjach, gdy jakość lub ilość zebranych informacji nie pozwala na zastosowanie klasycznych metod statystycznych.

W analizach dotyczących rynku finansowego, w szczególności opartych na informacjach pochodzących z giełd, z uwagi na ich częstotliwość, zazwyczaj nie ma problemu z dostępnością i liczebnością danych. Jednak i w tym przypadku założenie przeprowadzenia analiz na bardzo długich szeregach wiąże się z potrzebą zebranie ogromnej ilości danych, co bywa kłopotliwe. Dlatego interesujące wydaje się zastosowanie metod bootstrapowych „powielających” możliwości zachowania się rynku z za-

chowaniem dziennych korelacji między poszczególnymi notowaniami. W szczególności można wykorzystując bootstrapowe wartości stóp zwrotu $\{R_{i,t}^*\}$, $\bar{R}_i^*$ i ryzyka $(S_{p,t}^2)^*$ wyznaczyć bootstrapowe wartości procentowych udziałów w_i^* poszczególnych akcji takich, że ryzyko związane z portfelem jest minimalne.

Metody bootstrapowe stosowano w analizach finansowych już wielokrotnie i w różnych celach. Przegląd zastosowań tych metod w modelowaniu finansowych szeregów czasowych można znaleźć między innymi w pracach Domańskiego i Pruskiej (2000), Horowitza (2001) oraz Li i Maddali (1996). Za pomocą metod bootstrapowych podjęto też próbę wyznaczania gęstości predyktorów stóp zwrotu lub ich przedziałów dla różnych modeli (por. np. Pscual, Romo, Ruiz, 2000; Thombs, Schucany, 1990) oraz szacowania VaR (*Value-at-Risk*) (np. Vlaar, 2000).

W analizie portfolio metody te były stosowane m.in. do testowania efektywności portfela (np. Shanken, 1996), konstruowania portfela z wykorzystaniem teorii Markowitza dla którego stopa zwrotu byłaby maksymalna (Zhidong i in., 2009), analizy wariancji mierzącej ryzyko i konstrukcji portfela dla zadanych wartości skłonności do ryzyka (np. Markowitz, Usman, 2003; Michaud, 1998) jak również do optymalizacji portfela przy założeniu, że stopy zwrotu oraz macierz wariancji-kowariancji jest nieznana (Lai, Xing, Chen, 2011).

2. METODOLOGIA

W przeprowadzonej analizie punktem wyjścia była teoria Markowitza. Stopy zwrotu zostały zdefiniowane jako tempo wzrostu kursów akcji poszczególnych spółek według formuły:

$$R_{i,t} = \ln \left(\frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \right), \quad (1)$$

gdzie $p_{i,t}$ – kurs i -tego instrumentu finansowego w czasie $t = 1, 2, \dots, n$.

W teorii Markowitza zakłada się, że stopy zwrotu akcji są zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną utożsamianą z oczekiwaną stopą zwrotu i odchyleniem standardowym utożsamianym z ryzykiem. Zakłada się, że zarówno stopy zwrotu jak i macierz wariancji-kowariancji między nimi są znane. Jednak w praktyce są one nieznane i muszą być estymowane np. na podstawie danych empirycznych z przeszłości. Oczekiwaną stopę zwrotu dla instrumentów „ i ” wyznaczono jako średnią arytmetyczną poszczególnych przeszłych stóp zwrotu

$$\bar{R}_i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n R_{i,t}, \quad (2)$$

zaś ryzyko jako odchylenie standardowe

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (R_{i,t} - \bar{R}_i)^2} \quad (\text{np. Haugen, 1996}). \quad (3)$$

Dla portfela złożonego z m składników oczekiwaną stopę zwrotu $E_p(R)$ wyznacza się jako średnią ważoną wyrażoną wzorem

$$E_p(R) = \bar{R} = \sum_{i=1}^m w_i \bar{R}_i, \quad (4)$$

gdzie w_i – udział akcji i w portfelu, przy czym $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ oraz $\forall_i w_i \geq 0$, m – liczba spółek wchodzących w skład portfela. Ryzyko portfela mierzone jest wariancją przeszłych stóp zwrotu poszczególnych instrumentów finansowych

$$S_p^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m w_i w_j \hat{\sigma}_{ij}, \quad (5)$$

gdzie $\hat{\sigma}_{ij}$ – empiryczna kowariancja (wariancja dla $i = j$) pomiędzy stopą zwrotu akcji i -tej oraz j -tej (por. np. Haugen, 1996). W notacji macierzowej stopę zwrotu (4) oraz ryzyko portfela (5) można krócej zapisać jak:

$$E_p(R) = \mathbf{w}^T \mathbf{R}, \quad S_p^2 = \mathbf{w}^T \sum \mathbf{w}, \quad (6)$$

gdzie $\mathbf{R}$ – wektor stóp zwrotu $\mathbf{R} = [\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_m]^T$, $\mathbf{w}$ – wektor udziałów poszczególnych akcji w portfelu $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T$, $\sum$ – macierz wariancji-kowariancji stóp zwrotu.

Teoria Markowitza (1952) dotyczy metody efektywnego doboru aktywów do portfela. Chodzi o wybór spośród wielu (a nawet wszystkich) akcji takiego zbioru, który spełni najlepiej oczekiwania inwestora. Formuła Markowitza jest zapisywana w postaci funkcji f opisującej zależność między stopą zysku a ryzykiem: $f = -AE_p(R) + S_p^2$ dla $0 \leq A < \infty$ gdzie A – wskaźnik skłonności do podejmowania ryzyka (Haugen, 1996; Markowitz, 1952). Formuła ta nie określa optymalnego portfela inwestycyjnego, ale można na jej podstawie uzyskać zbiór portfeli „opłacalnych” czyli dających maksymalny zysk przy danym poziomie ryzyka lub minimalne ryzyko przy danym poziomie zysku. ($A=0$ to portfel o najniższej stopie zwrotu). Poszukując portfela optymalnego, wystarczy rozwiązać optymalizacyjny problem programowania kwadratowego, mający na celu wyznaczenie takiego wektora wag $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T$, aby:

$$S_p^2 = \mathbf{w}^T \sum \mathbf{w} \rightarrow \min \quad (7)$$

przy warunkach ograniczających:

$$\mathbf{w}^T \mathbf{R} = r_0, \quad \sum_{i=1}^m w_i = 1, \quad \text{gdzie } w_i \geq 0 \quad \forall_i \quad (8)$$

Składowe wektora $\mathbf{R}$ wyznaczamy stosując stopy zwrotu zdefiniowane formułą (1) dla empirycznych kursów akcji. Wymagana jest jak najdłuższa próba. Z uwagi na specyfikę rynku finansowego z portfelem akcji o niskim ryzyku związana będzie też niska stopa zwrotu. Stąd rozwiązując taki problem należy założyć najniższą stopę zysku możliwą do zaakceptowania przez inwestora.

Alternatywą może być dokonanie tych samych obliczeń na próbach bootstrapowych. Ogólna idea symulacyjnej metody bootstrapowej jest następująca: jako populację generalną traktuje się zbiór obserwacji $\mathbf{Z}_n = \{Z_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ z którego (stosując różne schematy) losuje się z powtórzeniem (zwracaniem) próby bootstrapowe i na ich podstawie dokonuje wnioskowania. Innymi słowy jeżeli $\mathbf{Z}_n = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$ jest próbą losową z rozkładu charakteryzowanego przez parametr θ o którym wnioskujemy na podstawie statystyki ϕ , to próbę bootstrapową uzyskuje się przez n' -krotne (gdzie $\frac{2}{3}n \leq n' \leq n$, ale zazwyczaj $n' = n$) losowanie ze zwracaniem ze zbioru $\mathbf{Z}_n = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$ uzyskując $\mathbf{Z}_{n'}^* = \{Z_1^*, Z_2^*, \dots, Z_{n'}^*\}$. Procedurę tworzenia takiego ciągu $\mathbf{Z}_{n'}^*$ powtarza się wielokrotnie (np. 10000) razy. W ten sposób uzyskuje się zadaną liczbę prób bootstrapowych $\mathbf{Z}_{n',j}^*$, (gdzie np. $j = 1, 2, \dots, 10000$) na podstawie których dokonuje się wnioskowania np. wyliczając odpowiednią statystykę ϕ . Uzyskany rozkład empiryczny służy do przeprowadzenia wnioskowania o parametrze θ . Dzięki temu można definiować statystyki testowe i przedziały ufności w sytuacjach, gdy standardowe rozkłady lub procedury nie mogą być stosowane lub ich zastosowanie nie daje jednoznacznych rozwiązań.

Podejście takie można również zastosować do obserwacji dotyczących notowań na rynku akcji, gdzie $\mathbf{Z}_{n,i} = \{R_{1,i}, R_{2,i}, \dots, R_{n,i}\}$. Dokonując losowania zwrotnego należy pamiętać o zachowaniu dziennych korelacji między poszczególnymi notowaniami. Zakłócenie tych korelacji spowodowałoby zupełną zmianę macierzy wariancji-kowariancji, co uniemożliwiłoby porównywanie wyników. Dla prób bootstrapowych, korzystając z tych samych wzorów (2)-(6) dokonuje się ponownego rozwiązania problemu (7)-(8) a następnie jako rozwiązanie podaje średnią z wag wszystkich portfeli (Michaud, 1998).

W badaniu uwzględniono notowania 150 spółek GPW posiadających notowania ciągłe od 3 stycznia 2010 roku do 14 lutego 2012 roku. Lista spółek z podziałem na sektory znajduje się w tabeli 1. Obliczając stopy zwrotu według formuły (1) uzyskano dla każdej spółki szeregi 553 obserwacji dziennych. Dane pochodzą ze strony www.stooq.pl oraz www.money.pl. Obliczeń dokonano z użyciem pakietu MATLAB. Na początek wyznaczono portfel optymalny klasycznie, na podstawie otrzymanych szeregów dziennych stóp zwrotu, a następnie procedurę powtórzono dla prób bootstrapowych. Dla każdego szeregu stóp zwrotu zostało wylosowanych 10000 prób bootstrapowych i na ich podstawie rozwiązano powyższy problem, uzyskując dla zadanych 10 różnych wartości stóp zwrotu portfele efektywne.

3. WYNIKI ANALIZY

W wyniku rozwiązania klasycznego zadania Markowitza oraz zagadnienia w wersji bootstrapowej otrzymano krzywe (rys. 1 i 2) będące zbiorem portfeli efektywnych.

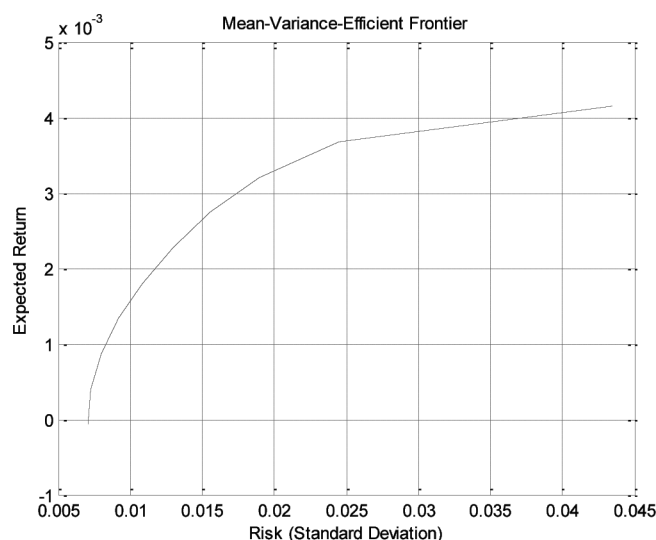
Tabela 1.

Spółki uwzględnione w analizie z podziałem na sektory

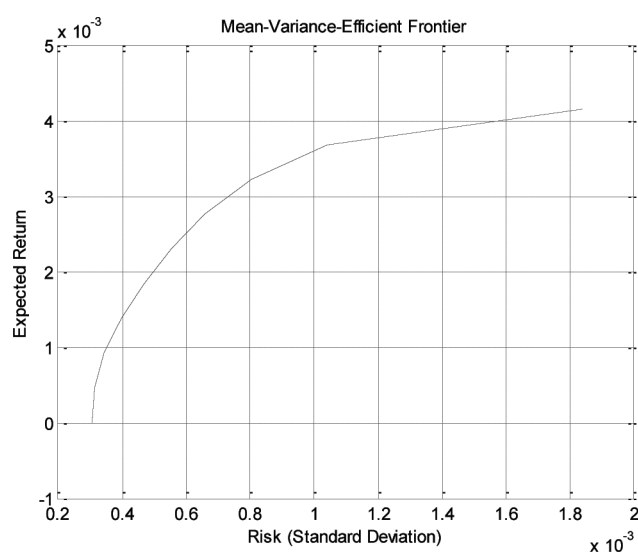
SEKTOR	SPÓŁKI										
BANKI	BHW	BPH	BRE	BSK	GNB	KRB	MIL	PEO	PKO		
BUDOWNICTWO	AWB	BDL	BDX	EPD	HBP	HRS	MRB	MSP	MSX	MSZ	
	PBG	PXM	TRK								
DEWELOPERZY	BBD	DOM	ECH	GNT	GTC	JWC	KCI	LCC	OPG	PND	
	RHD	TRI	TUP								
ENERGETYKA	CEZ	ENA	PEP	PGE							
FINANSE INNE	BBC	BBZ	BLI	CFL	CPA	EFH	IDM	JPR	KRI	KZS	
	MCI	MWT	RBC	SKL	VIN						
HANDEL	ADS	BMI	COG	DPL	EMF	ETL	EUR	IPO	JAG	KCH	
	KOM	MON	PEL	TEL	VST						
INFORMATYKA	ACP	ATG	CDR	CTC	PCG	SGN	SME				
MEDIA	AGO	CIA	CPS	IGR	K2I	MIT	TVN				
TELEKOMUNIKACJA	HWE	MNI	NET	TPS							
USŁUGI INNE	ATS	CHS	EEX	FON	INC	ITG	MVP	ZST			
Przemysł:											
CHEMICZNY	ATT	CIE	PCE	SNS							
ELEKTROMASZYNOWY	AMC	BMC	KPX	LEN	PUE	RFK	RLP	WFM			
FARMACEUTYCZNY	BIO	CRM	EUI	MIR							
HOTELE I RESTAUR	PLJ										
LEKKI	BTM	LBW	PRC	SKT							
MAT. BUDOWLANYCH	ARM	BRK	CNG	IZO	MCR	RSE	TIN				
METALOWY	ALC	BRS	CZP	FER	FSG	HTM	IPX	KGH	OBL	STP	
MOTORYZACYJNY	GCN										
PALIWOWY	LWB	LTS	OIL	PGN							
SPOŻYWCZY	ALM	COL	GRL	KER	MAK	MSO	PBF				
TWORZYWA SZTUCZNE	EEF	ERG	RDL								

Poszczególne wielkości ryzyka dla wybranych z tej krzywej dziesięciu portfeli są podane w tabeli 2.

Okazuje się, że przy przyjęciu takiego samego poziomu stopy zwrotu na podstawie prób bootstrapowych jesteśmy w stanie uzyskać „lepsz” portfel ze względu na funk-



Rysunek 1. Ryzyko i stopa zwrotu dla portfeli efektywnych wyznaczonych klasycznie



Rysunek 2. Ryzyko i stopa zwrotu dla portfeli efektywnych wyznaczonych z prób bootstrapowych

cję celu. Poprzez zastosowanie takiej symulacji uzyskujemy udziały poszczególnych akcji w portfelu, które zapewniają prawie 20-krotnie mniejszą wariancję (czyli około 4-krotnie niższe ryzyko) niż w przypadku udziałów otrzymanych metodą klasyczną. Rezultat taki jest zgodny z wcześniejszymi sugestiami Michaud'a (1998), który zaproponował procedurę wyznaczania wag dla portfela optymalnego i stwierdził, że prowadzi ona do lepszego rozmieszczenia aktywów, które jednocześnie jest pokrewne wynikom metody klasycznej opartej na przeszłych obserwacjach. Przedstawiona w pracy Mil-

Tabela 2.

Stopa zwrotu i ryzyko związane z portfelami „opłacalnymi”

Stopa zwrotu	Ryzyko portfela	
	z próby empirycznej	z prób bootstrapowych
0,0001	0,0071	0,0003
0,0004	0,0073	0,0003
0,0009	0,0080	0,0003
0,0013	0,0092	0,0004
0,0018	0,0109	0,0005
0,0023	0,0130	0,0006
0,0027	0,0155	0,0007
0,0032	0,0190	0,0008
0,0037	0,0245	0,0010
0,0041	0,0434	0,0018

haud’a (1998) procedura wykorzystywała zależność między ryzykiem a stopą zwrotu, a wagi były wyznaczane dla różnych wartości skłonności do podejmowania ryzyka. Ostateczne rezultaty prowadziły do portfeli o lepszych parametrach niż te uzyskane metodą klasyczną. Można zatem stwierdzić, że stosując próby bootstrapowe dostajemy portfele, dla których oszacowana wariancja ma mniejszą wartość. Szczegółowe wyniki zamieszczone są w tabeli 3.

Podano skład 5 przykładowych portfeli efektywnych o zadanej stopie zwrotu. Spośród 150 spółek wziętych pod uwagę w skład portfela najbardziej rozbudowanego, jednocześnie portfela o najmniejszym ryzyku weszło ponad 35 spółek, a portfela o najwyższej z rozważanych stóp zwrotu ponad 19 spółek. W tabeli pominięto spółki, których udziały były mniejsze niż 0,1%. Zgodnie z teorią, ryzyko zmniejsza się już poprzez samą dywersyfikację portfela, co jest zgodne z prezentowanymi wynikami, gdyż im mniejsze jest ryzyko związane z danym portfelem, tym więcej spółek wchodzi w skład portfela.

W prezentowanych portfelach, dla pierwszego z nich największe udziały mają spółki CEZ, PGN i TPS. Analizując poszczególne udziały spółek zauważamy różnice nie tylko w wartościach wag, ale również w samym składzie. W portfelach dla najniższej stopy zwrotu 32 składowe z 35 spółek wchodzących w ich skład są te same. Jednak ich udziały są inne. Spółki ALC, EMF i CFL zostały wykluczone z portfela przez optymalizację na podstawie prób bootstrapowych, a znalazły się w portfelu wyznaczonym klasycznie z wagami kolejno 2%, 1,% oraz 0,2%. Dla portfeli o stopie zwrotu 0,4% różnice między dwoma uzyskanymi innymi metodami są zdecydowanie większe. Portfel klasyczny składa się tylko z 28 składowych, natomiast drugi z nich ma ich 32.

Tabela 3.
Skład przykładowych portfeli uzyskanych z próby empirycznej i z prób bootstrapowych

Stopa zwrotu 0,0004				Stopa zwrotu 0,0009				Stopa zwrotu 0,0013				Stopa zwrotu 0,0023			
WAGI DLA PORTELA				WAGI DLA PORTELA				WAGI DLA PORTELA				WAGI DLA PORTELA			
SKRÓT NAZWY SPÓŁKI	KLASY- CZNY	BOOT- STRAP	SKRÓT NAZWY SPÓŁKI	KLASY- CZNY	BOOT- STRAP	SKRÓT NAZWY SPÓŁKI	KLASY- CZNY	BOOT- STRAP	SKRÓT NAZWY SPÓŁKI	KLASY- CZNY	BOOT- STRAP	SKRÓT NAZWY SPÓŁKI	KLASY- CZNY	BOOT- STRAP	SKRÓT NAZWY SPÓŁKI
CEZ	0,1242	0	TPS	0,1197	0,1146	ITG	0,1414	0,1324	ITG	0,1414	0,1324	ITG	0,2436	0,24	ITG
TPS	0,112	0	CEZ	0,117	0,1041	TPS	0,1068	0,1037	TPS	0,1068	0,1037	EEX	0,1147	0,1067	EEX
PGN	0,0814	0,0534	ITG	0,0934	0,0849	CEZ	0,096	0,0822	CEZ	0,096	0,0822	SNS	0,1142	0,0969	SNS
ETL	0,0723	0	RDL	0,0669	0,0647	RDL	0,068	0,0623	RDL	0,068	0,0623	CIA	0,0751	0,0819	CIA
RDL	0,0576	0,0031	ETL	0,0653	0,079	LBW	0,0665	0,0523	LBW	0,0665	0,0523	K2I	0,0738	0,0672	K2I
PGM	0,0545	0,0136	LBW	0,0541	0,0465	EEX	0,0614	0,0557	EEX	0,0614	0,0557	LBW	0,0597	0,0376	LBW
ITG	0,051	0,004	VIN	0,0531	0,0619	SME	0,0494	0,0484	SME	0,0494	0,0484	KZS	0,0549	0,0857	KZS
CNG	0,0424	0	PGN	0,0521	0,0384	VIN	0,0492	0,053	VIN	0,0492	0,053	SME	0,0519	0,0445	SME
BMC	0,0355	0,0037	BMC	0,0448	0,0598	SNS	0,0486	0,0461	SNS	0,0486	0,0461	RDL	0,0416	0,0233	RDL
SME	0,0339	0,006	SME	0,0439	0,0454	K2I	0,0456	0,0494	K2I	0,0456	0,0494	TPS	0,033	0,0425	TPS
LBW	0,0324	0,0281	EEX	0,0374	0,0337	BMC	0,0448	0,0609	BMC	0,0448	0,0609	ATT	0,0307	0,0627	ATT
KRI	0,0237	0	K2I	0,0328	0,0376	ETL	0,0415	0,0561	ETL	0,0415	0,0561	CRM	0,0252	0,0232	CRM
TEL	0,0234	0,1066	ATT	0,0276	0,0441	ATT	0,0336	0,0534	ATT	0,0336	0,0534	BMC	0,0235	0,0399	BMC
AWB	0,0228	0,0258	KCH	0,0204	0,0172	CIA	0,0212	0,0245	CIA	0,0212	0,0245	CDR	0,016	0,0171	CDR
ENA	0,0215	0	AWB	0,0203	0,009	KCH	0,0208	0,018	KCH	0,0208	0,018	PBF	0,0149	0,0029	PBF
K2I	0,0192	0,0026	SNS	0,0178	0,0214	KER	0,0166	0,0059	KER	0,0166	0,0059	EUR	0,0111	0	EUR
EEX	0,0175	0,0016	KRI	0,0173	0,0229	PCE	0,0134	0,0146	PCE	0,0134	0,0146	VIN	0,009	0,0097	VIN
KCH	0,0162	0,0333	RPL	0,0158	0,0027	EUR	0,0113	0	EUR	0,0113	0	PCE	0,0063	0,0126	PCE
ATT	0,0152	0,0323	TEL	0,015	0,0028	PBF	0,0107	0,0046	PBF	0,0107	0,0046	KCH	0	0,0055	KCH

cd. Tabela 3.

BDX	0,0149	0,0514	BDX	0,014	0,0233	RLP	0,0093	0
RLP	0,0144	0,0375	PCE	0,014	0,0133	KZS	0,0077	0,0294
PCE	0,0113	0,0606	KER	0,0138	0,0094	PGN	0,007	0
INC	0,0099	0,0267	CNG	0,0097	0	CRM	0,0062	0,006
FER	0,0089	0,0432	PBF	0,0085	0,0042	KRI	0,0054	0,0097
EMF	0,0053	0,0143	PGM	0,0072	0,0026	AWB	0,0049	0
PBF	0,0037	0,0052	OBL	0,0064	0,0051	CDR	0,0038	0,0066
ALC	0,002	0,0127	PUE	0,0052	0,0149	BDX	0,0036	0,0104
KER	0,0019	0,0134	INC	0,0035	0,0115	OBL	0,0032	0
CDR	0	0,1142	CFL	0,0027	0	PUE	0,002	0,0113
CRM	0	0,0142						
EUR	0	0,0858						
IPO	0	0,0225						
KZS	0	0,0166						
PEP	0	0,0703						
SNS	0	0,0136						
TUP	0	0,0542						
WFM	0	0,0158						

Tabela 4.
Realizacja stóp zwrotu dla uzyskanych portfeli

Portfel uzyskany metodą	Zakładana dzienna stopa zwrotu									
	0,0001		0,0004		0,0009		0,0013		0,0023	
	Rzeczywista stopa zwrotu									
	dzienna	miesięczna	dzienna	miesięczna	dzienna	miesięczna	dzienna	miesięczna	dzienna	miesięczna
klasyczną	0,00037	0,00623	0,00045	0,01007	0,00778	0,03026	0,00960	0,04370	0,01129	0,08446
bootstrapową	0,00034	0,01319	0,00526	0,02261	0,00712	0,02761	0,00878	0,04575	0,00862	0,08569

W zależności od sposobu wyznaczania portfela największe udziały ma spółka CEZ oraz TPS a w przypadku prób bootstrapowych TEL. 22 spółki są składowymi dwóch portfeli jednocześnie, ale ich udziały znacznie się różnią. Dla kolejnych trzech stóp zwrotu wnioski są analogiczne. Spółki o największych udziałach to kolejno CEZ, ITG i TPS a dla ostatniego ITG i EEX. Konstrukcja tych portfeli jest więc inna. Różnica polega nie tylko na doborze wag, ale również na samym składzie poszczególnych portfeli. Dotyczy to zarówno metody jak i założonej wartości stopy zwrotu. Ponieważ jednak większość spółek wchodzących w skład poszczególnych portfeli jest taka sama, można powiedzieć, że portfele te są pokrewne.

Dokładna analiza udziałów procentowych poszczególnych spółek w połączeniu z analizą ich kondycji finansowej i stóp zwrotu została pominięta, gdyż nie była ona celem tej pracy.

4. PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiono możliwości zastosowania bootstrapu do analizy portfelowej. Okazuje się, że przy pomocy prostej symulacji bootstrapowej można skonstruować dla zadanego poziomu stopy zwrotu portfel, z którym związane będzie dużo mniejsze ryzyko niż w przypadku zastosowania metody klasycznej. Składy portfeli uzyskanych dwoma sposobami są inne. Większość spółek wchodzi w ich skład w obu przypadkach, ale ich udziały procentowe (wagi) różnią się między sobą. Z uwagi na prawie 4-krotnie mniejszą wartość ryzyka związaną z portfelem uzyskanym dzięki zastosowaniu prób bootstrapowych, metoda ta może być rekomendowana jako alternatywny sposób rozwiązywania problemu optymalizacji portfela. Jednak należy pamiętać, że dla inwestora ryzyko nie jest jedynym kryterium w podejmowaniu decyzji inwestycyjnych. Aby wnioskować o rzeczywistej przewadze portfeli bootstrapowych nad ich klasycznymi odpowiednikami, zostały prześledzone realizacje stóp zwrotu dla uzyskanych portfeli. Wyniki przedstawia tabela 4. Okazuje się, że konstrukcja portfeli za pomocą metody bootstrapowej w porównaniu z klasyczną nie zapewnia zawsze większej stopy zwrotu, tym samym nie można stwierdzić jednoznacznie, że metoda ta jest z punktu widzenia inwestora efektywniejsza od metody klasycznej. W obu przypadkach uzyskane dzienne stopy zwrotu były zazwyczaj niższe od założonych. Jednak należy zwrócić uwagę, że portfele uzyskane za pomocą symulacji są z założenia obarczone mniejszym ryzykiem, co jest dla inwestora asekuranta niewątpliwą zaletą tej metody. Wymaga ona jednak specjalnego oprogramowania lub użycia specjalnych funkcji, co może stanowić pewne utrudnienie w stosunku do metody klasycznej.

Uniwersytet Łódzki

LITERATURA

- [1] Berkowitz J., Kilian L., (2000), *Recent developments in bootstrapping time series*, *Econometrics Reviews*, vol. 19, 1-48.

- [2] Domański Cz., Pruska K., (2000), *Nieklasyczne metody statystyczne*, PWE Warszawa.
- [3] Efron B., (1979), *Bootstrap methods: another look at the jackknife*, Annals of Statistics, no. 7, 1-26.
- [4] Efron B., Tibshirani R. J., (1993), *The Introduction to the Bootstrap*, Chapman&Hall New York.
- [5] Hall P., (1992), *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*, New York, Springer-Verlag.
- [6] Haugen R.A., (1996), *Teoria nowoczesnego inwestowania. Obszerny podręcznik analizy portfelowej*, WIG-PRESS Warszawa.
- [7] Horowitz J.L., (2001), *The Bootstrap and Hypothesis Tests in Econometrics*, Journal of Econometrics, vol. 100, 37-40.
- [8] Lai T.L., Xing H., Chen Z., (2011), *Mean-Variance portfolio Optimization when Means and Covariances are Unknown*, The Annals of Applied Statistics, vol. 5, no. 2A, 798-823.
- [9] Li H., Maddala G.S., (1996), *Bootstrapping time series models*, Econometric Reviews, vol. 15, 115-158.
- [10] Markowitz H., (1952), *Portfolio selection*, Journal of Finance, vol. 7, no. 1, 77-91.
- [11] Markowitz H., Usmen N., (2003), *Resampled Frontiers versus Diffuse Bayes: An Experiment*, Journal of Investment Management, vol. 1 no. 4, 9-25.
- [12] Michaud R.O., (1998), *Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation*, Massachusetts: Harvard Business School Press.
- [13] Pascual L., Romo J., Ruiz E., (2000), *Forecasting returns and volatilities in GARCH processes using the bootstrap*, Working papers 00-63(31), Universidad Carlos III de Madrid, Spain.
- [14] Shanken J., (1996), *Statistical methods in tests of portfolio efficiency: a synthesis*. In: *Handbooks of Statistics: Statistical Methods in Finance*, edited by G. S. Maddala and C. R. Rao, 693-711, North-Holland.
- [15] Thombs L.A., Schucany W.R., (1990) *Bootstrap prediction intervals for autoregressions*, Journal of the American Statistical Association, 85, 486-492.
- [16] Vlaar P.J.G., (2000), *Value at risk models for Dutch bond portfolios*, Journal of Banking&Finance, vol. 24, 1131-1154.
- [17] Zhidong Bai, Huixia Liu, Wing-Keung Wong (2009), *On the Markowitz mean-variance analysis of self-financing portfolios*, RMI Working Paper no. 09/02.

ZASTOSOWANIE METODY BOOTSTRAPOWEJ W ANALIZIE PORTFELOWEJ

Streszczenie

Celem artykułu jest zastosowanie metodologii bootstrapu do poprawy rozwiązania zadania optymalizacji portfela akcji według modelu Markowitza. Zakładając, że stopy zwrotu i macierz wariancji-kowariancji są znane, w modelu minimalizuje się ryzyko wariancyjno-kowariancyjne przy spełnieniu, m.in. warunku osiągnięcia oczekiwanej lub założonej stopy zwrotu z portfela akcji. Klasyczna metoda Markowitza i jej wersja bootstrapowa dają odmienne rezultaty. W artykule omówiono portfele uzyskane na podstawie danych empirycznych i danych w postaci prób bootstrapowych losowanych zwrotnie oraz dokonano analizy różnic między nimi. Dane empiryczne dotyczą stóp zwrotu dla akcji Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie (GPW). Okazuje się, że zastosowanie losowych prób bootstrapowych pozwala uzyskać portfel o mniejszym ryzyku niż w przypadku portfela otrzymanego klasyczną metodą Markowitza.

Słowa kluczowe: metody bootstrapowe, analiza portfelowa

APPLICATION OF BOOTSTRAP METHOD FOR PORTFOLIO ANALYSIS

A b s t r a c t

This paper presents Markowitz's mean-variance portfolio optimization theory with and without bootstrap simulations. It is assumed that means and covariances of the assets returns are known and the variance with respect to a fixed expected return is minimized. It is concluded that there are significant differences between portfolios with and without bootstrap method and that the resampling data leads to asset allocations that are less risky. This methodology is applied in the Warsaw Stock Exchange.

Key words: bootstrap simulations, portfolio analysis

MICHAŁ PRZYBYLIŃSKI

WRAŻLIWOŚĆ KRAJÓW UNII EUROPEJSKIEJ NA ZMIANY CEN ZEWNĘTRZNYCH

1. WPROWADZENIE

Celem niniejszej pracy jest zbadanie zróżnicowania siły wpływu zmian cen importu na ceny produktów wytwarzanych w poszczególnych krajach Unii Europejskiej, a w konsekwencji na pozycję konkurencyjną eksporterów. Analiza ma charakter makroekonomiczny, a przyjęty model opisuje małą gospodarkę otwartą, co oznacza, że zmiana cen w kraju nie powoduje zmian cen na rynkach światowych. Jako miary użyto mnożników cenowych *input-output*.

Prezentowane w pracy mnożniki pokazują, jak wzrost cen importu, spowodowany na przykład przez deprecjację krajowej waluty, wpływa na zwiększenie konkurencyjności cenowej krajowych producentów. Reakcja realnej strony gospodarki nie jest badana. Tak więc, mnożniki służą do oceny potencjału krajowych producentów, którzy mogą skorzystać z poprawy swojej konkurencyjności cenowej zarówno na rynku krajowym, jak i za granicą. Producenci krajowi decydują, czy wykorzystać ten potencjał utrzymując ceny swoich produktów na niezmiennym poziomie i w ten sposób zwiększając swoje udziały w rynkach czy też podnosząc zyski poprzez podniesienie cen.

Skala reakcji na początkowy impuls w postaci zmiany cen światowych zależy od stopnia penetracji importowej i powiązań surowcowych w gospodarce. Eksporterzy nie będą cieszyć się w pełni ze wzrostu cen za granicą, ponieważ część ich kosztów produkcji stanowią importowane materiały i półprodukty. Wszystkie informacje niezbędne do oceny siły tych powiązań materiałowych podane są w tablicach przepływów międzygałęziowych.

Mnożniki cenowe *input-output* zostały obliczone dla 21 krajów Unii Europejskiej, na podstawie symetrycznych tablic przepływów międzygałęziowych (SIOT – *symmetric input-output table*) opublikowanych przez Eurostat dla 2005 roku. Wybór krajów podyktowany był dostępnością danych.

2. MECHANIZM TRANSMISJI CEN

Zmiany cen zewnętrznych (światowych) wpływają na pozycję konkurencyjną gospodarki kraju i prowadzą do korekty realnych procesów w niej zachodzących. Mogą one być efektem procesów o charakterze długookresowym, takich jak zmiany wydajności pracy, lecz także stanowić wynik jednorazowych lub cyklicznych szoków podażowo-

popytowych (nieurodzaj, kryzys polityczny) a nawet spekulacji. Gwałtowne zmiany cen na rynkach światowych mogą zdestabilizować sytuację gospodarczą w krajach silnie powiązanych z zagranicą. Niniejsza praca prezentuje wyniki badań skali krótkookresowej reakcji cen krajowych na zmiany cen zewnętrznych.

Wzrost cen światowych powoduje osłabienie presji konkurencyjnej ze strony importu i daje krajowym producentom okazję do poprawienia swojej sytuacji na rynku lokalnym. Mogą oni podnieść ceny, zwiększając swój zysk na jednostkę produkcji lub utrzymać ceny swoich produktów na początkowym poziomie, co powinno zachęcić konsumentów do powstrzymania się od zakupu produktów importowanych na rzecz produktów krajowych. Oznacza to zwiększenie zysków poprzez zwiększenie wolumenu sprzedaży. Podobną okazję mieć będą eksporterzy. Postępowanie firm w takiej sytuacji zależy będzie od własnej strategii i możliwości zwiększenia podaży, elastyczności popytu, strategii konkurentów i innych czynników występujących na rynku. Analiza czynników wpływających na te decyzje znajduje się poza zakresem niniejszego opracowania¹.

Z drugiej strony wzrost cen importu zwiększa koszty produkcji krajowych producentów w zależności od udziału importowanych produktów pośrednich w kosztach produkcji. Krajowi producenci, poszukując sposobów zmniejszenia efektów wzrostu cen importowych będą starali się znaleźć tańsze krajowe substytuty importowanych materiałów. Podsumowując, wzrost cen importowanych produktów (np. z powodu deprecjacji waluty krajowej), doprowadzi w różnym stopniu do reakcji takich jak:

- wzrost kosztów produkcji,
- substytucja importu,
- dostosowanie po stronie podaży,
- dostosowanie po stronie popytu odbiorców,
- wzrost cen krajowych.

Oczywiście odwrotne rozumowanie przeprowadzić można w przypadku spadku cen światowych (aprecjacji krajowej waluty).

Niniejsza praca koncentruje się na pomiarze bezpośredniego, początkowego wpływu jaki wzrost cen importu wywiera na koszty produkcji krajowej. Postawione tu pytanie brzmi: W jaki sposób ceny krajowych produktów zareagują na wzrost cen importu w sytuacji gdy nie ma mechanizmów dostosowawczych (następuje pełna transmisja impulsów cenowych)?

Obserwowane w gospodarce zmiany cen są wypadkową początkowego impulsu kosztowego i mechanizmów dostosowawczych. Odpowiedź na postawione pytanie, czyli wyizolowanie bezpośredniego efektu kosztowego jest możliwe przy wykorzystaniu modelu cen *input-output*.

¹ Zachowanie się podmiotów gospodarczych w przypadku zmian cen, czy też szerzej pojętych warunków gospodarowania jest jednym z fundamentalnych zagadnień ekonomii (por. m.in. Smith, 2007).

3. MODEL CEN *INPUT-OUTPUT* DLA GOSPODARKI ZAMKNIĘTEJ

Zmiana ceny dowolnych (poza szczególnymi wyjątkami) produktów, niezależnie od źródła jej pochodzenia, wpływa na ceny pozostałych produktów za pośrednictwem powiązań surowcowo-materiałowych, czyli poprzez fakt, że produkty te stanowią element kosztów wytworzenia innych produktów. Dzieje się tak nawet wówczas, gdy bezpośrednie powiązanie nie jest widoczne. Śledzenie powiązań kosztowych pomiędzy produktami możliwe jest dzięki tablicom przepływów międzygałęziowych.

Tablice te pozwalają obserwować gospodarkę na poziomie działów lub grup produktów (ogólnie mówiąc gałęzi). Tablica przepływów międzygałęziowych na ogół składa się z trzech ćwiartek (por. np. Tomaszewicz, 1994). Pierwsza ćwiartka pokazuje przepływy produktów pośrednich (surowców, materiałów i półproduktów) pomiędzy gałęziami. Druga ćwiartka pokazuje produkcję końcową (finalną) poszczególnych gałęzi, a trzecia ćwiartka zawiera informacje o wartości dodanej. Zamykająca tablicę czwarta ćwiartka, opisująca transfery dochodów jest w praktyce rzadko uwzględniana².

Tablicę można przedstawić w postaci układu równań liniowych, czyli modelu *input-output* opracowanego przez W. Leontiefa w latach trzydziestych ubiegłego wieku (Leontief, 1936, 1941). Aby wykorzystać modele *input-output* do analiz symulacyjnych należy przyjąć założenie o homogeniczności gałęzi.

Mniej więcej w tym samym okresie zaproponowany (Leontief, 1937), a następnie zastosowany (Leontief, 1946) został model cen *input-output*. Od tego czasu pojawiło się wiele zastosowań i propozycji modyfikacji tego modelu (por. np. Sharify, Sanchi, 2011), także w odniesieniu do polskiej gospodarki (Boratyński, 2002).

W modelu *input-output* cena reprezentowana jest jako suma wszystkich kosztów niezbędnych do wytworzenia jednostki produktu. Model cen *input-output* można wyprowadzić z tablicy wyrażonej w jednostkach fizycznych lub wartościowych. Oryginalny model opracowany przez Leontiefa opisywał przepływy w jednostkach fizycznych, ale przedstawiając wyniki obliczeń uzyskane na podstawie tablic publikowanych przez Eurostat w wyrażeniu pieniężnym, bardziej zasadne wydaje się przyjąć za punkt wyjścia ten drugi sposób. Oba wyprowadzenia można znaleźć w pracy Millera, Blaira (2009:43-51).

Model cen *input-output* wywodzi się z równania kosztów, przedstawiającego wartość produkcji każdej gałęzi (X_i) jako sumę wszystkich kosztów poniesionych do jej wytworzenia:

$$X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + d_i, \quad (1)$$

² Oryginalne „zamknięcie” wprowadzone przez Leontiefa polegało na potraktowaniu gospodarstw domowych jako dodatkowej gałęzi. W takim modelu wynagrodzenia przestają być elementem trzeciej ćwiartki, a spożycie gospodarstw domowych – drugiej, gdyż obie te pozycje zostają włączone do pierwszej ćwiartki. Formalnie rzecz biorąc, takie postępowanie nie prowadzi do powstania czwartej ćwiartki, lecz rozszerza pierwszą. Najbliższe pojęciu czwartej ćwiartki są rozszerzenia stosowane w modelach zintegrowanych (por. Tomaszewicz, 1983).

gdzie: x_{ij} – wartość produktów j -tej gałęzi zużytych do wytworzenia produktów i -tej gałęzi (przepływ międzygałęziowy),

d_i – wartość dodana w i -tej gałęzi,

n – liczba gałęzi.

W notacji macierzowej równanie to można zapisać jako:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}'\mathbf{i} + \mathbf{d}, \quad (2)$$

gdzie: $\mathbf{x}$ – n -elementowy wektor produkcji globalnych (X_i),

$\mathbf{X}$ – macierz o wymiarach $n \times n$ zawierająca przepływy międzygałęziowe (elementy x_{ij}),

$\mathbf{i}$ – wektor sumujący o elementach równych 1,

$\mathbf{d}$ – n -elementowy wektor o elementach będących wartościami dodanymi poszczególnych gałęzi. Apostrof oznacza transpozycję.

Stosując klasyczny model cen Leontiefa zakłada się stałość współczynników kosztów:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad (3)$$

które wyrażają wartość produktów i -tej gałęzi zużytych (przeciętnie) do wytworzenia produktów j -tej gałęzi o jednostkowej wartości. W zapisie macierzowym współczynniki te spełniają równość:

$$\hat{\mathbf{x}}\mathbf{A} = \mathbf{X}, \quad (4)$$

gdzie $\hat{\mathbf{x}}$ jest macierzą diagonalną powstałą z wektora $\mathbf{x}$.

Równanie kosztów (2), po uwzględnieniu równania (4) jest następujące:

$$\hat{\mathbf{x}}\mathbf{A}'\mathbf{i} + \mathbf{d} = \mathbf{x}, \quad (5)$$

zaś po przemnożeniu stronami przez $\hat{\mathbf{x}}^{-1}$ przyjmuje postać:

$$\mathbf{A}'\mathbf{i} + \mathbf{v} = \mathbf{i}, \quad (6)$$

gdzie $\mathbf{v}$ to wektor jednostkowych wartości dodanych. Wyrażenie po lewej stronie równania 6 stanowi sumy kosztów niezbędnych do wytworzenia jednostek (wartości) produkcji poszczególnych gałęzi.

Możliwe jest teraz przyjęcie założenia, że ceny wszystkich produktów równe są 1 i zapisanie równania cen w postaci³:

$$\mathbf{A}'\mathbf{p} + \mathbf{v} = \mathbf{p}, \quad (7)$$

³ Odpowiada to wprowadzeniu sztucznej, agregatywnej jednostki fizycznej dla każdej gałęzi, takiej, że wartość tej jednostki jest równa 1. Np. przyjęcie, że cena „produktów rolnictwa, leśnictwa i łowiectwa” jest równa 1 jest równoznaczne zdefiniowaniu przeciętnej jednostki fizycznej tych produktów wartę 1. W takiej sytuacji ceny produktów wyliczone na podstawie oryginalnej tablicy są zawsze równe 1.

gdzie $\mathbf{p}$ jest wektorem cen. Model 7 można następnie zredukować do postaci:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1} \mathbf{v}. \quad (8)$$

Model w postaci 8 pokazuje, że ceny w zamkniętej gospodarce zmieniają się pod wpływem zmian jednostkowych wartości dodanych, np. wzrostu płac (przy stałej wydajności pracy) lub podatków, a skala tych zmian zależy od współczynników a_{ij} ⁴. Wykorzystując model do analiz symulacyjnych zakłada się, że wektor $\mathbf{v}$ i macierz $\mathbf{A}$ zawierają informacje o kosztach wyrażonych na fizyczną jednostkę produkcji. Przy takim założeniu, zmiany cen spowodowane zmianami jednostkowych wartości dodanych nie powodują zmian w technologii produkcji, reprezentowanej przez współczynniki a_{ij} . Innymi słowy, zarówno $\mathbf{A}$ jak i $\mathbf{v}$ traktowane są jako nakłady wyrażone na jednostki fizyczne, przy założeniu, że ceny produktów są równe 1. W otwartej gospodarce jest jeszcze jeden element kształtujący ceny – koszty produktów importowanych.

4. TABLICE INPUT-OUTPUT PUBLIKOWANE PRZEZ EUROSTAT

Eurostat publikuje zestaw tablic podaży i wykorzystania, a także opracowane na ich podstawie tzw. symetryczne tablice *input-output* (*Symmetric Input Output Table* – SIOT)⁵. Określenie „symetryczne” oznacza, że wiersze i kolumny pierwszej ćwiartki są prezentowane w tej samej agregacji. Jest to 55 grup produktów⁶, według klasyfikacji CPA (*Classification of Products by Activity*). Termin „gałąź” oznaczać więc będzie w dalszej części artykułu grupę produktów. Posługiwanie się modelami *input-output*, wymagającymi przyjęcia założenia o homogeniczności gałęzi na tym poziomie agregacji może budzić zastrzeżenia, ale można je zastąpić założeniem o stałej strukturze produktowej wewnątrz gałęzi⁷.

Istnieją dwa warianty SIOT, oba dostępne na stronie internetowej Eurostatu. Pierwszy z nich pokazuje przepływy wszystkich towarów i usług (krajowych i importowanych) razem, drugi składa się z dwóch tablic – dla produktów krajowych i importu osobno. Tablice przedstawione w drugim wariantcie zawierają wszystkie informacje niezbędne dla stworzenia modelu cen wyróżniającego ceny importu.

Baza statystyczna Eurostatu w zakresie tablic przepływów międzygałęziowych jest systematycznie rozwijana. Obejmuje ona obecnie kraje UE, Macedonię, Norwegię i Turcję. Tablice te ukazują się na ogół z kilkuletnim opóźnieniem. Najszerszy materiał

⁴ Elementy macierzy $\mathbf{A}$ uznawane są za parametry modelu określające technologię produkcji i przyjmuje się, że nie zmieniają się w krótkim okresie.

⁵ http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/esa95_supply_use_input_tables/introduction

⁶ Eurostat postuluje 60-gałęziową agregację, jednak większość krajów łączy wybrane gałęzie np. surowce energetyczne, stąd w praktyce porównywalność tablic można osiągnąć na poziomie 55 gałęzi.

⁷ np. gałąź „produkty rolnictwa i łowiectwa” jest wysoce niejednorodna. Może zaistnieć sytuacja, gdy na rynkach światowych wzrośnie cena bananów, przy niezmiennym cenie innych produktów. Indeks cen importu tej gałęzi zmieni się proporcjonalnie do udziału bananów w imporcie produktów tej gałęzi. Ten konkretny impuls cenowy zostanie oszacowany prawidłowo, gdy struktura importu nie zmieni się, tzn. gdy banany będą miały stały udział w imporcie produktów rolnictwa i łowiectwa.

porównawczy zebrany w tej bazie dotyczy roku 2005 i z tego powodu zaprezentowane poniżej wyniki obliczeń dotyczą tego właśnie roku. W 2012 roku opracowane zostały pierwsze zestawienia tablic dla całej Unii, a także dla strefy Euro. Prowadzone są także prace nad tablicami wyrażonymi cenach stałych.

Szczegółowe informacje na temat zasad konstrukcji i zawartości tablic przepływów dostępnych na stronie internetowej Eurostatu można znaleźć w podręczniku Eurostatu (2008). Tablice te są także opisane w ramach rachunków narodowych (Lequiller i Blades, 2006).

Odrębna baza danych obejmujących tablice przepływów opracowywana jest przez OECD (STAN database)⁸. Tablice te przedstawiają gospodarkę w klasyfikacji działowej i nieco mniej dokładnej agregacji (Yamano, Ahmad, 2006).

5. MODEL CEN DLA OTWARTEJ GOSPODARKI

Zestaw tablic przedstawiających przepływy międzygałęziowe z wydzieleniem importu pozwala sformułować model cen dla gospodarki otwartej poprzez modyfikację równania 7:

$$\mathbf{A}^{K'} \mathbf{p}^K + \mathbf{A}^{M'} \mathbf{p}^M + \mathbf{v} = \mathbf{p}^K, \quad (9)$$

gdzie: $\mathbf{A}^K$ – macierz współczynników kosztów krajowych o elementach $a_{ij}^K = \frac{x_{ij}^K}{X_j^K}$, gdzie x_{ij}^K oznacza wartość krajowych produktów pośrednich należących do gałęzi i zużytych do wytworzenia produktów gałęzi j , a X_j^K oznacza wartość produkcji gałęzi j ,

$\mathbf{A}^M$ – macierz współczynników importochłonności o elementach $a_{ij}^M = \frac{x_{ij}^M}{X_j^K}$, gdzie x_{ij}^M oznacza wartość importowanych produktów pośrednich należących do gałęzi i zużytych do wytworzenia produkcji gałęzi j ,

$\mathbf{p}^K$ – wektor cen produktów krajowych,

$\mathbf{p}^M$ – wektor cen produktów importowanych⁹.

W tej wersji modelu ceny produktów wytwarzanych w kraju przedstawione są także jako sumy jednostkowych kosztów produkcji z tym, że wśród tych kosztów występuje rozróżnienie na koszty produktów krajowych i koszty produktów pochodzących z importu. Przekształcając równanie 9 w kilku prostych krokach:

$$\mathbf{A}^{M'} \mathbf{p}^M + \mathbf{v} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{K'}) \mathbf{p}^K, \quad (10)$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{K'})^{-1} (\mathbf{A}^{M'} \mathbf{p}^M + \mathbf{v}) = \mathbf{p}^K, \quad (11)$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{K'})^{-1} \mathbf{A}^{M'} \mathbf{p}^M + (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{K'})^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{p}^K, \quad (12)$$

⁸ www.oecd.org/sti/inputoutput/

⁹ Elementy wektora $\mathbf{v}$ zawierają, oprócz wartości dodanej, także podatki od produktów pomniejszone o dotacje do produktów.

otrzymujemy ostatecznie zredukowane równanie cen, z którego odczytać można mnożniki cenowe:

$$\mathbf{p}^K = \mathbf{\Pi}^M \mathbf{p}^M + \mathbf{L}^{K'} \mathbf{v}, \quad (13)$$

gdzie $\mathbf{L}^K = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^K)^{-1}$, a $\mathbf{\Pi}^M = \mathbf{L}^{K'} \mathbf{A}^{M'}$. Interpretacja mnożników cenowych znajdujących się w macierzy $\mathbf{\Pi}^M$ jest następująca: jeśli cena produktów importowanych j -tej gałęzi wzrośnie o 1 (ponieważ wyjściowa cena równa jest 1 oznacza to, że cena ta się podwoi), krajowa cena produktów i -tej gałęzi wzrośnie o wartość odpowiedniego elementu (π_{ij}^M) macierzy $\mathbf{\Pi}^M$. Oznacza to, że ceny importu wpływają na ceny krajowe z siłą zależną nie tylko od intensywności stopnia penetracji importowej badanej gałęzi, ale także od intensywności przepływów produktów krajowych pomiędzy gałęziami. Mnożniki te opisują reakcję cen w krótkim okresie i nie odzwierciedlają dostosowań po stronie popytu i podaży.

W sposób bardziej zagregowany efekty wzrostu cen importu przedstawić można w postaci mnożników ujętych w wektorze:

$$\boldsymbol{\pi}^M = \mathbf{\Pi}^{M'} \dot{\mathbf{x}}^K, \quad (14)$$

gdzie wektor $\dot{\mathbf{x}}^K$ zawiera wskaźniki struktury produkcji ($\dot{x}_i^K = x_i^K / \sum_i x_i^K$). Wartość takiego mnożnika π_i^M wskazuje, o ile przeciętnie wzrosną ceny w kraju jeśli cena i -tego produktu importowanego wzrośnie o 1 (czyli o 100%). Suma wektora 14 oznacza wzrost przeciętnych cen krajowych w sytuacji, gdy wszystkie ceny importu ulegną podwojeniu. Powodem identycznego wzrostu cen wszystkich produktów importowanych może być deprecjacja krajowej waluty względem koszyka walut obcych¹⁰.

Zakładając, że ceny eksportu kształtowane są w ten sam sposób, co ceny produkcji na rynek krajowy można oszacować mnożniki cen eksportu ze względu na ceny importu:

$$\boldsymbol{\pi}^{Me} = \mathbf{\Pi}^{M'} \dot{\mathbf{e}}, \quad (15)$$

gdzie wektor $\dot{\mathbf{e}}$ wyraża strukturę produktową eksportu ($\dot{e}_i = e_i / \sum_i e_i$). Suma elementów wektora $\boldsymbol{\pi}^{Me}$ (oznaczymy ją jako $\Pi^{M(e)}$) może być, podobnie jak w przypadku sumy elementów wektora $\boldsymbol{\pi}^M$, interpretowana jako efekt deprecjacji lokalnej waluty.

Wszystkie dotychczas prezentowane mnożniki przedstawiały zmiany cen wyrażone w krajowej walucie. Z punktu widzenia eksporterów ważne jest także oszacowanie skali zmiany konkurencyjności cenowej na rynkach światowych, czyli wyrażenie mnożników w walucie obcej. Podwojenie kursu walut obcych podniesie koszty wytworzenia eksportu wyrażone w krajowej walucie o $\Pi^{M(e)}$, lecz jednocześnie spowoduje spadek cen eksportu wyrażonych w walutach obcych. Ostateczny efekt, przy założeniu, że koszyk walut importu jest taki sam jak eksportu, można obliczyć porównując wartość

¹⁰ czyli wszystkich walut, w których rozliczane są transakcje zagraniczne krajowych producentów. Uwaga ta nie dotyczy krajów strefy euro.

eksportu wyrażoną w walucie obcej po zmianie kursu (E_W^*) z pierwotną wartością eksportu (E_W):

$$\frac{E_W^*}{E_W} = \frac{E_L^*/k^*}{E_L/k} = \frac{E_L(1 + \Pi^{M(e)}\delta)/k(1 + \delta)}{E_L/k} = \frac{1 + \Pi^{M(e)}\delta}{1 + \delta}, \quad (16)$$

gdzie: E_L^* – wartość eksportu w walucie lokalnej po zmianie kursu,

E_L – wartość eksportu w walucie lokalnej przed zmianą kursu,

k – kurs walutowy,

δ – wprowadzona zmiana kursu walutowego.

Porównanie to prowadzi do zdefiniowania mnożnika kursu cen eksportu względem kursu walutowego, oznaczonego poniżej jako $\Pi_W^{M(e)}$, który mierzy wzrost cen eksportu wyrażonych w walutach obcych wywołany zmianą kursu walut obcych o δ :

$$\frac{E_W^*}{E_W} = \Pi_W^{M(e)} + 1. \quad (17)$$

Zestawiając wzory 16 i 17 po niewielkich przekształceniach mnożnik ten można wyrazić jako:

$$\Pi_W^{M(e)} = (\Pi^{M(e)} - 1) \frac{\delta}{\delta + 1}, \quad (18)$$

lub też w ujęciu procentowym:

$$\Pi_W^{M(E)}\% = (\Pi^{M(E)}\% - 100) \frac{\delta\%}{\delta\% + 100}. \quad (19)$$

Interpretacja mnożnika (19) jest następująca: jeżeli kurs walut obcych wobec waluty lokalnej wzrośnie o $\delta\%$, przeciętne ceny eksportu liczone w walucie obcej wzrosną o $\Pi_W^{M(E)}\%$.

Wszystkie mnożniki pozwalają zmierzyć wrażliwość krajowych producentów na szoki cenowe występujące na światowych rynkach. Ten ostatni daje także wyobrażenie na temat zmian w konkurencyjności cenowej krajowych producentów na rynku światowym w związku z wahaniami kursów walut.

6. WYNIKI

Baza danych Eurostatu pozwala na obliczenie mnożników cenowych dla 21 krajów UE, czyli uzyskanie 21 macierzy, z których każda zawiera ponad 3000 elementów. Przedstawienie pełnych wyników nie jest więc w tym miejscu możliwe. Tabele 1 i 2 pokazują najwyższe zagregowane mnożniki cen produkcji względem cen importu dla każdego badanego kraju. Liczby przedstawione w tabeli 1 są obliczane ze wzoru 14. Należy je więc interpretować jako pierwotny impuls kosztowy dla całej gospodarki spowodowany wzrostem cen importu wskazanej grupy produktowej. Większość

gospodarek wykazuje wrażliwość przede wszystkim na zmiany cen surowców energetycznych. Gałąź ta jest połączeniem trzech gałęzi CPA (węgiel kamienny i brunatny, ropa naftowa i gaz ziemny, rudy uranu i toru). Największe konsekwencje zmian cen tych produktów ponosi Litwa, kraj, który nie posiadając własnych surowców energetycznych cechuje się wysoką energochłonnością produkcji. Podwojenie światowych cen surowców energetycznych (i tylko surowców energetycznych) wywoła wzrost przeciętnych cen litewskich produktów o 7,79%. Na ogół oszacowany impuls inflacyjny spowodowany podwojeniem światowych cen surowców energetycznych wynosi ok. 3%, co oznacza, że nawet dość silne wahania cen tych surowców same w sobie nie są w stanie zdestabilizować gospodarek europejskich.

Tabela 1.
Mnożniki cen produkcji względem cen importu, najwyższe wartości, pomnożone przez 100

Kraj	Grupa produktowa (gałąź)	Wartość mnożnika
Austria	Surowce energetyczne	6,41
Belgia	Chemikalia, wyroby chemiczne	3,46
Czechy	Surowce energetyczne	3,30
Dania	Usługi wspomagające transport; usługi turystyczne	3,60
Estonia	Sprzęt i wyposażenie radiowe, telewizyjne i telekom.	3,18
Finlandia	Surowce energetyczne	2,59
Francja	Surowce energetyczne	2,82
Grecja	Surowce energetyczne	3,14
Hiszpania	Surowce energetyczne	3,02
Holandia	Surowce energetyczne	3,07
Irlandia	Usługi związane z prowadzeniem dział. gospodarczej	10,84
Litwa	Surowce energetyczne	7,79
Niemcy	Surowce energetyczne	1,99
Polska	Surowce energetyczne	3,21
Portugalia	Chemikalia, wyroby chemiczne	2,38
Rumunia	Surowce energetyczne	4,80
Słowacja	Surowce energetyczne	6,14
Słowenia	Metale	4,50
Szwecja	Usługi badawczo-rozwojowe	2,87
Węgry	Sprzęt i wyposażenie radiowe, telewizyjne i telekom.	4,23
Włochy	Surowce energetyczne	3,06

Źródło: Obliczenia własne na podstawie tablic *input-output* Eurostatu

Najwyższy mnożnik w tabeli 1 przekracza 10 i oznacza, że 100% wzrost ceny importowanych usług związanych z prowadzeniem działalności gospodarczej (*ceteris paribus*) zwiększa ceny irlandzkich produktów o 10,84 proc. Wartość ta jest wyjątkowo wysoka, tylko w trzech spośród pozostałych krajów najwyższe mnożniki są większe niż 5. Wyjątkowa wrażliwość gospodarki irlandzkiej na zmiany cen usług związanych z prowadzeniem działalności gospodarczej wynika z intensywnego napływu bezpośrednich inwestycji zagranicznych (proces ten osłabł w 2004 roku).

Tabela 2 zawiera wartości mnożników cen eksportowych (równanie 15). Liczby te są znacznie wyższe niż w tabeli 1, a struktura produktowa jest bardziej zróżnicowana. Koszty produktów importowanych wpływają na koszty produkcji eksporterów znacznie bardziej niż na przeciętne koszty produkcji krajowej. Stanowić to może potwierdzenie istotnej skali zjawiska fragmentaryzacji procesu produkcji – produkty eksportowane są produkowane w dużej mierze z materiałów i podzespołów pochodzących z importu. Ceny importowanych surowców energetycznych mają stosunkowo mniejsze znaczenie dla cen eksportu niż cen produkcji. W tabeli 2 dużo wyraźniej widać, jakie procesy produkcyjne stanowią specjalizację krajów europejskich. Estonia, Finlandia i Węgry w dużym stopniu opierają swój eksport na wykorzystaniu importowanego sprzętu i wyposażenia radiowego, telewizyjnego i telekomunikacyjnego. Istotnym elementem działalności eksportowej Czech, Niemiec, Polski i Słowenii jest przetwórstwo importowanych metali. Najwyższą wartość, tak jak w tabeli 1, można znaleźć w przypadku irlandzkich usług związanych z prowadzeniem działalności gospodarczej. Jeśli cena importu tej grupy produktów podwaja się, to koszty produkcji dla irlandzkich eksporterów rosną o prawie 20 proc. Podobnie silna reakcja ma miejsce na Litwie w przypadku podwojenia cen importu surowców energetycznych.

Tabela 3 przedstawia wartości wszystkich omawianych powyżej zagregowanych mnożników cenowych. Są to sumy elementów wektorów zdefiniowanych równaniami 14 i 15. Ukazują reakcję przeciętnej ceny produkcji krajowej i przeciętnej ceny eksportu (tam gdzie było to możliwe także w podziale na eksport do UE i poza UE) na podwojenie wszystkich cen importu. Obliczona została także reakcja przeciętnej ceny eksportu wyrażonej w walutach obcych (por. równanie 18).

Krajem najbardziej wrażliwym na wzrost cen zewnętrznych jest Austria. Podwojenie cen importu spowoduje wzrost cen produktów austriackich średnio o 36%, ale ceny austriackiego eksportu wzrosną aż o ponad 64 proc. Tak wysoki wzrost kosztów produkcji na eksport zmniejsza korzyści dla austriackich eksporterów, pochodzące ze wzrostu cen światowych. Ich konkurencyjność cenowa oczywiście poprawia się, ponieważ zewnętrzne ceny rosną dwukrotnie, ale poprawa austriackiej konkurencyjności cenowej jest raczej słaba (względne zmniejszenie cen austriackich eksporterów w porównaniu do cen światowych zaledwie o około 18%).

Austria oczywiście nie jest dobrym przykładem dla interpretacji wyników w kategoriach zmian kursu walutowego, ponieważ kraj ten należy do strefy euro, więc zmiany cen wyrażonych w walucie lokalnej (euro) wobec walut partnerów handlowych (czyli

Tabela 2.

Mnożniki cen eksportu względem cen importu, najwyższe wartości, pomnożone przez 100

Kraj	Grupa produktowa (gałąź)	Wartość mnożnika
Austria	Pojazdy samochodowe, przyczepy i naczepy	10,22
Belgia	Chemikalia, wyroby chemiczne	6,90
Czechy	Metale	5,86
Dania	Usługi wspomagające transport; usługi turystyczne	12,55
Estonia	Sprzęt i wyposażenie radiowe, telewizyjne i telekom.	9,33
Finlandia	Sprzęt i wyposażenie radiowe, telewizyjne i telekom.	5,52
Francja	Chemikalia, wyroby chemiczne	4,41
Grecja	Usługi wspomagające transport; usługi turystyczne	9,08
Hiszpania	Pojazdy samochodowe, przyczepy i naczepy	5,35
Holandia	Surowce energetyczne	6,84
Irlandia	Usługi związane z prowadzeniem dział. gospodarczej	19,43
Litwa	Surowce energetyczne	18,74
Niemcy	Metale	3,97
Polska	Metale	4,26
Portugalia	Chemikalia, wyroby chemiczne	4,79
Rumunia	Surowce energetyczne	5,77
Słowacja	Pojazdy samochodowe, przyczepy i naczepy	9,55
Słowenia	Metale	9,29
Szwecja	Usługi badawczo-rozwojowe	3,97
Węgry	Sprzęt i wyposażenie radiowe, telewizyjne i telekom.	12,70
Włochy	Chemikalia, wyroby chemiczne	5,03

Źródło: Obliczenia własne na podstawie tablic *input-output* Eurostatu

w większości również euro) da znacznie słabsze efekty niż wynikałoby to z wartości mnożnika.

Oprócz Austrii dużą wrażliwość na zmiany cen zewnętrznych wykazują takie kraje jak Irlandia, Słowacja, Estonia, Węgry, Czechy (powyżej 30%) a także Belgia i Słowenia, czyli kraje małe, które z konieczności silnie angażują się w wymianę międzynarodową. W przypadku dużych krajów, takich jak Niemcy, Francja, Włochy czy też Polska i Rumunia, wahania cenowe na rynkach światowych w większym stopniu amortyzowane są przez rynek krajowy.

Tabela 3.

Zagregowane mnożniki cen, pomnożone przez 100

Kraj	Mnożnik cen produkcji krajowej	Mnożniki cen eksportu – w walucie krajowej			Mnożniki cen eksportu – w walutach obcych		
		Ogółem	eksport do UE	eksport poza UE	Ogółem	eksport do UE	eksport poza UE
Austria	36,0	64,2	66,1	60,7	-17,9	-16,9	-19,7
Belgia	29,5	44,5	44,4	44,7	-27,8	-27,8	-27,7
Czechy	32,4	49,4	b.d.	b.d.	-25,3	b.d.	b.d.
Dania	21,7	37,2	33,0	43,8	-31,4	-33,5	-28,1
Estonia	33,9	51,8	b.d.	b.d.	-24,1	b.d.	b.d.
Finlandia	23,0	38,5	38,7	38,3	-30,7	-30,7	-30,8
Francja	15,0	27,3	b.d.	b.d.	-36,4	b.d.	b.d.
Grecja	14,8	27,4	b.d.	b.d.	-36,3	b.d.	b.d.
Hiszpania	19,3	35,7	35,5	36,2	-32,1	-32,2	-31,9
Holandia	23,1	35,4	36,1	33,8	-32,3	-31,9	-33,1
Irlandia	35,7	51,5	b.d.	b.d.	-24,2	b.d.	b.d.
Litwa	21,8	34,3	34,8	33,4	-32,9	-32,6	-33,3
Niemcy	16,5	28,4	28,9	27,8	-35,8	-35,5	-36,1
Polska	20,5	31,9	32,1	31,1	-34,0	-33,9	-34,4
Portugalia	17,4	35,6	b.d.	b.d.	-32,2	b.d.	b.d.
Rumunia	21,5	28,2	b.d.	b.d.	-35,9	b.d.	b.d.
Słowacja	34,2	50,0	b.d.	b.d.	-25,0	b.d.	b.d.
Słowenia	28,6	47,5	48,5	45,4	-26,3	-25,7	-27,3
Szwecja	21,6	34,4	b.d.	b.d.	-32,8	b.d.	b.d.
Węgry	32,7	57,1	58,1	54,1	-21,4	-21,9	-22,9
Włochy	17,5	29,2	b.d.	b.d.	-35,4	b.d.	b.d.

Źródło: Obliczenia własne na podstawie tablic *input-output* Eurostatu

Na tym tle ciekawym wyjątkiem okazuje się Grecja. Pomimo swoich niewielkich rozmiarów wykazuje się najniższym mnożnikiem cen produkcji krajowej. Także porównując wyniki uzyskane dla Portugalii i Litwy z Hiszpanią, można podejrzewać, że istnieją inne, poza wielkością kraju, powody wyjaśniające zróżnicowanie wrażliwości na zewnętrzne szoki cenowe. Mnożniki cen eksportu do UE nie różnią się znacznie od mnożników cen eksportu poza UE. Świadczyć to może o podobnej strukturze eksportu pośredniego badanych krajów do i poza Unię, lub też o dużym znaczeniu przepływów międzygałęziowych dla wielkości mnożnika.

7. WNIOSKI

Wyniki pokazują jak gospodarki krajów UE są wrażliwe na zmiany cen importowych. Podwojenie cen zewnętrznych oznacza, że koszty produkcji dla firm krajowych wzrosną pomiędzy 15% (Grecja, Francja) a 36% (Austria, Irlandia). Efekt ten będzie bardziej dotkliwy dla eksporterów, dla których wzrost kosztów będzie się mieścił w granicach 27-64 proc. Osłabi to ich korzyści z poprawy konkurencyjności cenowej, czasem bardzo znacznie.

Prezentowane wyniki mierzą początkowy efekt w postaci wzrostu kosztów produkcji *ceteris paribus*. Efekt ten jest niemożliwy do zaobserwowania, gdyż w obliczu wzrostu kosztów produkcji krajowe firmy będą stosowały różne strategie w celu ich redukcji. Porównując wyniki uzyskane na podstawie modelu cen *input-output* z rzeczywistymi zmianami cen można wnioskować o sile mechanizmów dostosowawczych w gospodarce.

Przytoczone mnożniki cenowe stanowią miarę natężenia importu poszczególnych rodzajów produktów w gospodarce (penetracji importu). Dlatego mogą być wykorzystane do badania innych aspektów międzynarodowego handlu i produkcji, takich jak handel wewnątrzgałęziowy czy międzynarodowa fragmentaryzacja procesu produkcji (*offshoring*). To ostatnie zjawisko, polegające na rozbiciu procesu produkcji na etapy wykonywane w różnych krajach, można zbadać w skali makroekonomicznej jedynie dzięki obserwacji przepływów pośrednich z importu.

Uniwersytet Łódzki

LITERATURA

- [1] Boratyński, J., (2002), Indirect taxes and price formation: A model for the Polish economy. *The Eleventh INFORUM World Conference*, Suzdal, Rosja
<http://inforumweb.umd.edu/papers/conferences/2003/s_bor01.pdf>
- [2] Eurostat *Manual of Supply, Use and Input-Output Tables*, (2008), Eurostat Methodologies and working papers,
<http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/product_details/publication?p_product_code=KS-RA-07-013>
- [3] Leontief W.W., (1936), Quantitative Input and Output Relations in the Economic System of the United States, *Review of Economics and Statistics*, 18, 105-125.
- [4] Leontief W.W., (1937), Interrelation of Prices, Output, Savings and Investment. *Review of Economics and Statistics*, 19, 109-132.
- [5] Leontief W.W., (1941), *The Structure of American Economy 1919-29, An empirical application of equilibrium analysis*, Oxford University Press, New York.
- [6] Leontief W.W., (1946), Wages, profit and prices. *The Quarterly Journal of Economics*, 61 (1), 26-39.
- [7] Lequiller F., Blades D., (2006), *Understanding National Accounts*, OECD Publishing.
- [8] Miller R.E., Blair P.D., (2009), *Input-Output Analysis: Foundations and Extensions*, Cambridge University Press.
- [9] Sharify N., Sancho F., (2011), A new approach for the input-output price model, *Economic Modelling*, 28, 188-195.

- [10] Smith A., (2007), *Badania nad naturą i przyczynami bogactwa narodów*, przeł. Wolff S., Einfeld O., Sadowski Z., Prejbisz A., Jasińska B., PWN, Warszawa.
- [11] Tomaszewicz Ł., (1983), *Zintegrowane modele gospodarki narodowej*, PWE, Warszawa.
- [12] Tomaszewicz Ł., (1994), *Metody analizy Input-Output*, PWE, Warszawa.
- [13] Yamano N., Ahmad N., (2006), The OECD input-output database: 2006 edition, *STI Working Paper* No. 8 <<http://www.oecd.org/dataoecd/46/54/37585924.pdf>>

WRAŻLIWOŚĆ KRAJÓW UNII EUROPEJSKIEJ NA ZMIANY CEN ZEWNĘTRZNYCH

Streszczenie

Zmiany cen zewnętrznych (światowych) wpływają na pozycję konkurencyjną gospodarki kraju. Celem niniejszej pracy jest zbadanie zróżnicowania siły wpływu zmian cen importu na ceny produktów wytwarzanych w poszczególnych krajach Unii Europejskiej, a w konsekwencji na pozycję konkurencyjną eksporterów. Przedmiotem analizy jest początkowy, krótkookresowy impuls cenowy, nie uwzględniający dostosowań po stronie realnej. Efekt ten jest niemożliwy do zaobserwowania, gdyż w obliczu wzrostu kosztów produkcji krajowe firmy stosują różne strategie w celu ich redukcji.

Postawione tu pytanie brzmi: W jaki sposób ceny krajowych produktów zareagują na wzrost cen importu w sytuacji gdy nie ma mechanizmów dostosowawczych (następuje pełna transmisja impulsów cenowych)? Analiza ma charakter makroekonomiczny, a przyjęty model opisuje małą gospodarkę otwartą, co oznacza, że zmiana cen w kraju nie powoduje zmian cen na rynkach światowych. Jako miary użyto mnożników cenowych *input-output*. Mnożniki cenowe *input-output* zostały obliczone dla 21 krajów Unii Europejskiej, w oparciu o symetryczne tablice przepływów międzygałęziowych (SIOT – *symmetric input-output table*) opublikowane przez Eurostat dla 2005 roku.

Słowa kluczowe: ceny, model input-output, mnożnik cenowy, kurs walutowy

SENSITIVITY OF THE EU COUNTRIES FOR CHANGES IN EXTERNAL PRICES

Abstract

Changes in external (world) prices affect the competitive position of a country's economy. The purpose of this paper is to analyze differences in strength of the impact of changes in import prices on the prices of products manufactured in different countries of the European Union and, consequently, the competitive position of the exporters. The analysis concerns an initial, short-term price impulse and does not consider the real-side adjustments. This effect cannot be observed in empirical data, because domestic firms facing rising costs of production apply different strategies for their reduction.

The question posed here is: How do prices of domestic products react to the rise in import prices in a situation where there are no adjustment mechanisms (full price-cost transmission)? The analysis is macro-economic in nature, and the adopted model describes a small open economy, which means that the change in prices in the country does not cause changes in prices on world markets. As a measure, the input-output price multiplier was used. Input-output price multipliers were calculated for 21 of the European Union countries, based on the symmetric input-output tables (SIOT) published by Eurostat for 2005.

Key words: prices, input-output model, price multiplier, exchange rate

SYLWESTER BEJGER

KARTEL PRODUCENTÓW CEMENTU W INDIACH – PRÓBA IDENTYFIKACJI

1. WSTĘP

Jednym z podstawowych problemów polityki konkurencji jest wykrywanie oraz ocena różnorodnych form zachowań niekonkurencyjnych, skatalogowanych wprost lub pośrednio w źródłach prawa antytrustowego. Do najczęściej spotykanych praktyk ograniczających konkurencję (i zakazanych *explicite* w większości krajów rozwiniętych) należą różnorodne zmony graczy rynkowych, dotyczące między innymi wspólnego ustalania poziomów cen, momentów zmian cen, udziałów w rynku, grup klientów. W rozumieniu współczesnej organizacji przemysłu¹ (oraz w opinii autora artykułu) większość zachowań niekonkurencyjnych obserwowanych w branżach jest pochodną interakcji strategicznych pomiędzy uczestnikami rynku, które winny być opisywane odpowiednimi modelami teorii gier. Równowaga zmony graczy w branży może być konsekwencją interakcji strategicznej graczy o charakterze zmony jawnej lub zmony milczącej. Modele gier (w większości niekooperacyjnych, statycznych i dynamicznych, o różnorodnych założeniach strategiczno – informacyjnych) replikujące mechanizm zmony jawnej lub milczącej są dobrze określone jako hipotezy badawcze dotyczące zachowania graczy, jednak ich empiryczne wykorzystanie jest trudne. Przyczynami takiej sytuacji są:

- przewaga informacyjna uczestników zmony nad obserwatorem – gracze posiadają prywatne informacje, które są chronione zarówno z mocy prawa (informacje stanowiące tajemnicę spółki) jak i takie, które są chronione, ponieważ stanowią dowód naruszenia prawa,
- skromny zasób statystyki publicznej na poziomie dezagregacji branżowej lub poszczególnych graczy.

Zważywszy na jej praktyczny wymiar, możliwość obiektywnej detekcji i oceny zmów² jest wysoce pożądana, a poszukiwaniu oraz testowaniu właściwych metod służących tym zadaniom poświęcono liczne prace badawcze. Niniejszy artykuł należy również do

¹ ang. *industrial organization*.

² Warto przypomnieć za Connor, Helmers (2006), iż jedynie w okresie 1990–2005 potwierdzono funkcjonowanie 283 karteli (tzw. *hard core cartels*) o zasięgu krajowym i/lub globalnym oraz nałożono z tego tytułu sankcje finansowe o wysokości nominalnej 25,4 mld USD. Zatem umiejętność obiektywnego wykazania istnienia zmony w branży ma wymiar nie tylko naukowy, ale jak najbardziej praktyczny jako ważny (a niekiedy kluczowy) element postępowań antytrustowych, skutkujących realnymi konsekwencjami dla zaangażowanych stron.

tego zbioru, ponieważ poświęcony jest testowaniu działania jednej z metod ekonometrycznych detekcji zмовы. Metoda ta, opierająca się na wykorzystaniu przełącznikowego modelu Markowa typu MS(AR)GARCH została zaproponowana w Bejger (2009) zaś w niniejszym artykule poddana została kolejnej weryfikacji z wykorzystaniem próby o znacznie większej długości dla danych o większej częstotliwości obserwowania. Dane, które poddano analizie dotyczą branży producentów cementu w Indiach. Niewątpliwą zaletą badania jest także możliwość krytycznej konfrontacji jego wyników z już przeprowadzonym badaniem mającym bardzo podobny cel.

2. CEL ORAZ METODYKA BADANIA

Celem głównym badania jest próba wykrycia istnienia zмовы producentów cementu w Indiach w latach 1994–2009 za pomocą proponowanej metody ekonometrycznej. Celami dodatkowymi są: sprawdzenie funkcjonowania wybranej metody dla danych o wyższej niż w poprzedniej aplikacji częstotliwości obserwowania (dane tygodniowe) oraz analiza komparatywna wniosków jakie można wyprowadzić z niniejszego badania i wniosków badania mającego zbliżony cel lecz inną metodologię.

Podstawowym problemem badawczym, jak można skonstatować na podstawie wstępnych rozważań, jest opracowanie sposobu detekcji zмовы w sytuacji braku danych statystycznych. Dodatkowo, aby metoda była użyteczna musi być relatywnie tania (wymagająca niewielkiego nakładu zasobów czasu ludzi i komputerów) oraz przekonująca. Można przyjąć, iż metoda taka winna realizować przynajmniej trzy następujące warunki:

- musi być metodą oszczędną w wykorzystaniu danych statystycznych, ukierunkowaną na wykorzystanie informacji branżowych jakie najczęściej są dostępne w zasobie statystyki publicznej (zazwyczaj są to szeregi poziomów cen (indeksów cen) właściwego produktu na różnych stopniach dystrybucji i/lub szeregi poziomów (indeksów) wolumenów sprzedaży produktu),
- musi być metodą wstępnej, szybkiej weryfikacji hipotezy o istnieniu zмовы w branży/na właściwym rynku, którą można w prosty sposób aplikować dla istniejących danych,
- winna być powiązana z właściwymi modelami teoretycznymi generującymi równowagi zмовы.

Metodami, w których próbuje się realizować powyższe postulaty są metody pośrednie detekcji zмовы, a wśród nich:

- identyfikacja tzw. znaczników zмовы³ (zachowań niekonkurencyjnych) czyli pewnych charakterystycznych dla zмовы zaburzeń dotyczących:
 - a) związku pomiędzy ceną rynkową, a zmianami popytu rynkowego,
 - b) stabilności cen i udziałów w rynku,

³ Określonych w ten sposób w Harrington (2005).

- c) związku pomiędzy cenami graczy,
- d) inwestycji w potencjał produkcyjny.

Jednymi z najbardziej obiecujących markerów zmonopolizacji są markery oparte na analizie zmian wariancji procesów cen rynkowych (punkt b powyżej). Ważne jest, aby gracze w branży wytwarzali produkt homogeniczny (o dużej substytucyjności, zgodnie ze zbliżoną technologią).

Analiza przeciętnych poziomów cen, tendencji cen czy nawet związków cen z cenami czynników produkcji (w przypadku dysponowania tymi ostatnimi) nie może służyć za znacznik zmonopolizacji. Wyjątkiem jest tu analiza wahań sezonowych, związana jednak z analizą zmienności, np. praca (Bejger, 2010).

Analiza zmian zmienności cen ma natomiast dobrą motywację teoretyczną, umożliwiającą łączenie zaburzeń w wariancji procesu ceny z możliwością powstania równowagi zmonopolizacji w branży. Proponowana metoda identyfikacji równowagi zmonopolizacji opiera się na następującym stwierdzeniu:

- wariancja procesu ceny jest średnio niższa dla faz zmonopolizacji i może podlegać okresowym zmianom.

2.1 MOTYWACJA TEORETYCZNA METODY

Dlaczego w fazie zmonopolizacji zmienność ceny produktu ma być relatywnie niska i ma to sygnalizować właśnie tego rodzaju równowagę rynkową? Ważna w obiektywnym umocowaniu tej kwestii jest motywacja teoretyczna wybranego znacznika. Podstawą specyfikacji każdej metody detekcji równowagi zmonopolizacji, także znaczników zmonopolizacji musi być zdaniem autora właściwy model interakcji strategicznej operujący instrumentarium teorii gier. W zakresie typowych zaburzeń procesu ceny rynkowej modele takie wskazują głównie na zaburzenia w wariancji procesu. Można wskazać trzy najważniejsze specyfikacje modelowe będące źródłem testowalnych hipotez związanych z wariancją ceny.

Rotemberg i Saloner w pracy Rotemberg, Saloner (1990) skonstruowali grę powtarzaną z niekompletną informacją odpowiadającą zjawisku tzw. przywództwa cenowego zmonopolizacji (collusive price leadership). Zjawisko to polega na anonsowaniu przez lidera zmiany ceny (zazwyczaj w górę) z pewnym wyprzedzeniem w stosunku do daty jej faktycznego zastosowania. Pozostali uczestnicy rynku naśladują następnie lidera co do wysokości ceny oraz daty jej wprowadzenia. Zasadniczą, w zakresie tematyki artykułu, konkluzją cytowanej pracy jest stwierdzenie, iż w równowadze skonstruowanej gry cena rynkowa sterowana przez lidera charakteryzuje się pewną sztywnością, to znaczy niższą wariancją niż w przypadku równowagi konkurencyjnej.

Athey, Bagwell i Sanchirico w artykule Athey, Bagwell, Sanchirico (2004) zaproponowali model cenowej gry powtarzanej (supergry) z egzogenicznymi zaburzeniami kosztów graczy (stanowiącymi prywatne informacje) oraz obserwowalnymi cenami. Gra jest zatem grą z niekompletną informacją, gdzie grę składową stanowi model konkurencji Bertranda z równowagą Bayesa-Nasha. Autorzy, posługując się własną

koncepcją równowagi gry typu SPPE wykazali, iż w równowadze obserwuje się ceny zmonopolizowane oraz że ceny te charakteryzują się sztywnością (w celu utrzymania zmonopolizowanej). Zatem w fazie zmonopolizowanej wariancja cen winna być niższa. Należy dodać, iż na ścieżce równowagi nie powinny być obserwowane wojny cenowe (co jest charakterystyczne dla większości standardowych modeli supergier bazujących na strategiach kar).

Maskin i Tirole w pracy Maskin, Tirole (1988) wprowadzili model gry powtarzanej z asynchronicznymi wyborami graczy. W grze uczestniczą dwaj gracze, wykonujący ruchy naprzemiennie. Dla przestrzeni akcji będących zbiorami cen, funkcji reakcji typu Markowa oraz wystarczająco wysokiego czynnika dyskonta istnieje unikalna równowaga Markowa doskonała dla podgier (MPE), Pareto dominująca inne równowagi, która charakteryzuje się sztywną ceną na poziomie ceny monopolowej. Jest to tak zwana cena skupienia (focal price). Mechanizm reakcji strategicznych prowadzących do takiej równowagi jest następujący. Załóżmy, że ceną skupienia jest cena monopolowa p_m . Startując od tej ceny, jeśli rywal podniesie cenę drugi z graczy nie podąży jego śladem. W przypadku obniżenia ceny do poziomu $p < p_m$ drugi z graczy odpowie obniżeniem ceny do poziomu p . Z drugiej strony, jeśli cena spadnie poniżej ceny p_m optymalną odpowiedzią jest powrót do ceny skupienia. Model Maskin i Tirole jest w istocie prawdziwie dynamiczną wersją mechanizmu złamanej krzywej popytu (kinked demand curve) znanego od lat 30 XX wieku. Strategie równowagi tego modelu (przy odpowiednich założeniach) implikują zatem małą wariancję ceny w równowadze zmonopolizowanej.

Dodatkowo, w pracy Bejger (2010a) wykazano, że model supergry ze stałą strukturą kwot kartelowych wskazuje na:

- a) możliwość wystąpienia fazy wojny cenowej, wywołanej przez gracza nie mającego intencji utrzymania lub nawiązania zmonopolizowanej ze względu na zbyt niski przewidywany lub faktyczny udział w rynku,
- b) średnio niższą wariancję ceny rynkowej w fazie zmonopolizowanej, spowodowaną sztywnością cen w okresach kurczenia się rynku.

Reasumując, jeśli znacznik zmonopolizowanej ma opierać się wyłącznie na analizie procesu ceny można postawić hipotezę, iż w fazie zmonopolizowanej wariancja ceny jest średnio niższa niż w fazie konkurencji. Należy się także spodziewać okresowych (reżimowych) zmian wariancji przy przejściu z fazy zmonopolizowanej do fazy konkurencji, aczkolwiek nie można stwierdzić czy faza ta jest fazą kary gry powtarzanej czy też upadkiem kartelu zmonopolizowanej jawnej spowodowanym innymi przyczynami.

2.2 NARZĘDZIA EKONOMETRYCZNE

W zakresie metod ekonometrycznych⁴ detekcji zmian w wariancji procesu najkorzystniejsze są metody obiektywne i spójne z motywacją teoretyczną, to znaczy takie

⁴ Jako prace wykorzystujący omówiony znacznik z wykorzystaniem odmiennych narzędzi statystyczno ekonometrycznych można przytoczyć prace Abrantes-Metz, Froeb, Geweke, Taylor (2006) oraz Bolotova, Connor, Miller (2008).

dla których niekonieczna jest znajomość momentów zmian w wariancji. Postulat ten realizują dwa następujące narzędzia:

- przełącznikowy modelu Markowa typu $MS(M)(AR(p))GARCH(p,q)$ dla wariancji i/lub średniej (stałej) procesu ceny. Zastosowanie takiego modelu ma następujące zalety:
 - a) jest to metoda spójna teoretycznie ze strukturą strategii równowagi modelu supergry,
 - b) pozwala na bezpośrednie modelowanie zmian strukturalnych zmienności procesu, bez użycia dodatkowych zmiennych sztucznych, modelowanie takie nie jest możliwe w np. w specyfikacji ARCH / GARCH,
 - c) jest to metoda spójna z asymetrią informacyjną pomiędzy uczestnikami kartelu, a obserwatorem. Specyfikacja $MS(AR)GARCH$ nie wymaga obserwacji (znajomości) zmiennej stanu, czyli może służyć faktycznej detekcji reżimów wariancji i obiektywnemu ustaleniu momentów przełączania, a więc detekcji faz zмовы i konkurencji. Postać ogólna modelu $MS(M)(AR(p))GARCH(p,q)$ jest wersją rozwojową dobrze znanego modelu MS.
- analiza falkowa (wykorzystana np. w Bejger, Bruzda, 2010), która charakteryzuje się:
 - a) oszczędnością specyfikacji – jako metoda nieparametryczna, nie jest obciążona błędem specyfikacji modelu ekonometrycznego,
 - b) prostotą aplikacji – nakład pracy niezbędny do aplikacji metody do danych jest minimalny. W związku z tym metoda jest szybka w zastosowaniu,
 - c) precyzją wskazania momentu zmian wariancji, bez jakichkolwiek założeń co do ich lokalizacji. Metoda jest zatem całkowicie obiektywna,
 - d) możliwością wstępnej, graficznej oceny „zachowania” wariancji z wykorzystaniem wykresów MODWT oraz rolowanych wariancji falkowych.

Jako wady analizy falkowej można wskazać relatywnie wysokie wymagania co do długości szeregu obserwacji oraz brak bezpośredniego związku metody ze strukturą strategii równowagi.

Dla weryfikacji hipotezy o istnieniu równowagi zмовы na rynku producentów cementu w Indiach wybrano jako narzędzie model $MS(AR)GARCH$.

3. ANALIZA EMPIRYCZNA

Obiektem badania jest branża producentów cementu w Indiach. Okres objęty badaniem to lata 1994–2009. Informacje dotyczące branży pochodzą głównie z pracy Anand (2009). Artykuł ten służy także jako punkt odniesienia w zakresie wyników badania, ponieważ poświęcony jest podobnemu celowi – identyfikacji istnienia kartelu w branży.

3.1 CHARAKTERYSTYKA BRANŻY

Cement jest jednym z najważniejszych materiałów budowlanych w gospodarce światowej. Należy doprecyzować, iż jeśli nie zaznaczono inaczej, mówiąc o produkcji cementu przyjmuje się domyślnie, iż chodzi o cement szary (Portlandzki), stanowiący większość zużycia w gospodarce światowej. Technologia produkcji cementu polega obecnie w większości zainstalowanej mocy na tzw. metodzie suchej⁵. Jako produkt tego procesu otrzymuje się klinkier, który jest następnie mieszany z dodatkami tworząc produkt końcowy – cement. Technologia ta jest praktycznie jednolita w skali światowej. Również zastosowania cementu są w skali globalnej zbliżone: gros produkcji przeznaczony jest na wytwarzanie betonu, niewielka ilość bezpośrednio w pracach budowlanych (np. stabilizacja podłoża w drogownictwie). Można zatem przyjąć, iż cement szary jest produktem homogenicznym⁶, pozbawionym bliskich substytutów. Całkowita produkcja światowa cementu wyniosła w 2008 r. około 2800 Mt.

Należy podkreślić, iż wytwarzanie cementu wiąże się z dużymi barierami wejścia do branży (wysokie koszty instalacji linii produkcyjnej, bariery logistyczne dotyczące bliskiej lokalizacji zasobów surowców, wysoka energochłonność procesu, wymuszająca poszukiwanie lokalizacji z dostępnością do źródeł energii oraz wysokie opodatkowanie produkcji). Fakt ten, w połączeniu z brakiem substytutów dla cementu oraz silnym związkiem popytu na cement z rozwojem cywilizacyjnym powoduje, iż branża cementowa są potencjalnym miejscem powstawania zmów i karteli. I rzeczywiście, stanowią one jedne z najczęściej skartelizowanych branż przemysłu w skali globalnej – jedynie w latach 1994–2009 dowiedziono (oskarżono graczy i skazano na kary finansowe) istnienie 11 zmów w 11 krajach oraz jednego kartelu o zasięgu kontynentalnym⁷.

Branża producentów cementu w Indiach (stan na początek roku 2009) posiadała moce zainstalowane wynoszące około 217 Mt (dla porównania, Polska: około 17 Mt) i była drugim, po Chinach, światowym producentem cementu. W branży obecnych było 51 firm (Polska: 6 firm), ale 12 głównych graczy dysponowało udziałem w 60% rynku. Roczna przeciętna stopa wzrostu konsumpcji cementu w Indiach wyniosła w latach 2002–2009 8,4% (wartość minimalna 5,8% w roku 2004, wartość maksymalna 11,35% w roku 2006).

Należy zaznaczyć, iż do roku 1989 funkcjonowanie branży cementowej w Indiach było całkowicie lub częściowo kontrolowane (regulowane) przez administrację państwową (można zauważyć pewną zbieżność z historią polskiej branży cementowej, w której proces prywatyzacji rozpoczął się w 1991 r.).

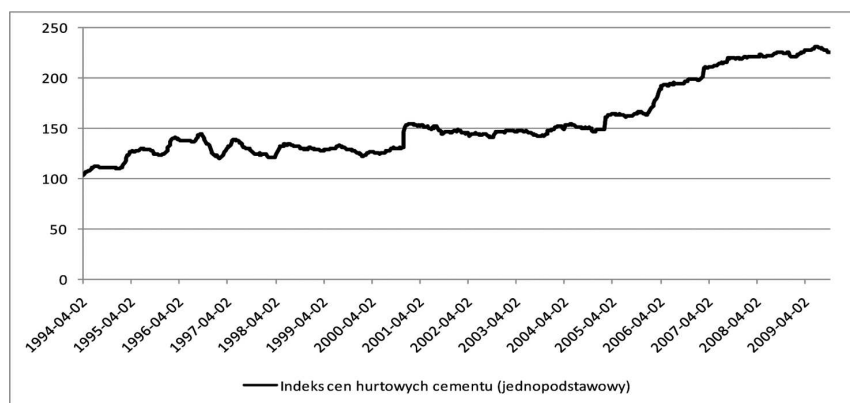
⁵ Więcej na ten temat zob. np. Bejger (2011).

⁶ Oczywiście istnieją klasy cementu konstrukcyjnego, zależne od udziału klinkieru w mieszaniu, np. w Polsce od prawie 100% w cemencie klasy CEMI do 5% w CEMIIIC. Jednak należy podkreślić, iż większość sprzedanego cementu stanowi cement klas CEMI i CEMII.

⁷ Szczegółowe zestawienie zob. Bejger (2011).

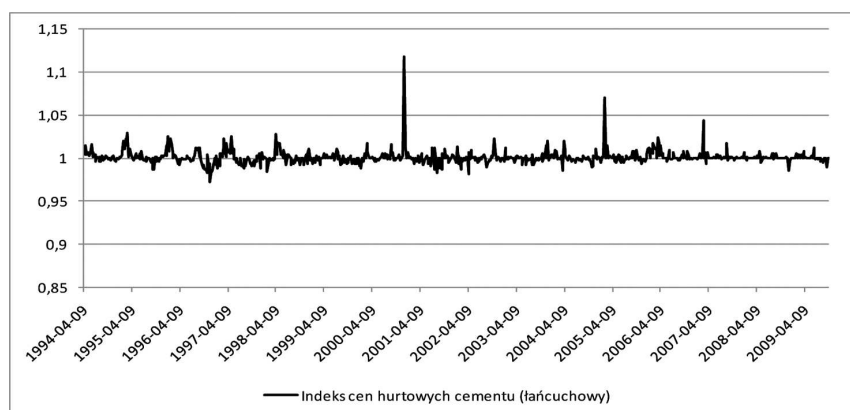
3.2 DANE STATYSTYCZNE

Podstawową charakterystyką branży, która zostanie wykorzystana w analizie empirycznej jest przeciętna cena hurtowa cementu. Statystyka publiczna Indii jest zaskakująco bogata w zakresie informacji o cenach produktów. W badaniu wykorzystano indeks tygodniowych przeciętnych cen cementu w obrocie hurtowym⁸ za okres od 2 kwietnia 1994 r. do 10 października 2009 r. (811 obserwacji). Źródłową postać szeregu ilustruje rysunek 1.



Rysunek 1. Jednospodstawowy, tygodniowy indeks cen hurtowych cementu (podstawa – 26-03-1994)

Dane źródłowe ilustrowane rysunkiem 1 niezbyt dobrze reprezentują zjawisko jakie jest celem badania (zmiany w zakresie zmienności cen). Znacznie lepiej sprawdza się tu indeks łańcuchowy, do którego przekonwertowano obserwacje. Przebieg tego indeksu ilustruje rysunek 2.



Rysunek 2. Łańcuchowy, tygodniowy indeks cen hurtowych cementu

⁸ Wholesale Price Index for Cement, dane dostępne na stronie <http://eaindustry.nic.in/>

3.3 BADANIE EMPIRYCZNE

Analizując rysunek 2 zauważyć można:

- znaczne różnice zmienności w podokresach, szczególnie na końcu próby,
- grupowanie zmienności.

Obserwacje te wskazują na to, iż analiza zmian wariancji procesu może być zasadna. Kolejnym krokiem jest zbadanie własności statystycznych szeregu, szczególnie zaś charakterystyki rozkładu, autokorelacji i stacjonarności. Odpowiednie wyniki zawarto w tabeli 1.

Tabela 1.

Charakterystyki szeregu

Średnia	1,0009	Test Jarque-Bera na normalność rozkładu	169191,2 (0,0000)	Test ADF	-14,0165* (0.000)
Min.	1,1181				
Max.	0,9722				
Odch. Std.	0,0078				
Skośność	5,5261	Test Ljunga-Boxa dla poziomów - Q(5)	182,70 (0,0000)	Test KPSS	0,0610**
Kurtoza	72,9351				

W nawiasach () p- values, * wartość statystyki t (wartości krytyczne na poziomie 1%; 5%; 10% - (-3,438);(-2,864);(-2,568), ** wartość statystyki LM (asympt. wartości krytyczne na poziomie 1%; 5%; 10% - 0,739; 0,463; 0,347).

Źródło: obliczenia własne.

Szereg jest skośny i leptokurtyczny, odrzucona została hipoteza o rozkładzie normalnym oraz za pomocą testów o odmiennej konfiguracji hipotez⁹ potwierdzono brak pierwiastków jednostkowych szeregu.

Cement jest produktem charakteryzującym się znaczną sezonowością popytu, a co za tym idzie także sezonowymi wahaniami cen. Aby wyeliminować to źródło zmienności cen przed przystąpieniem do dalszych analiz szereg poddano filtracji filtrem Hodricka – Prescottta. Dodatkowo w celu uwzględnienia wpływu trzech obserwacji odstających wprowadzono zmienną 0-1. Dla tak przygotowanych danych oszacowano następnie model wystarczający do eliminacji autokorelacji składnika losowego. Modelem wystarczającym okazał się model autoregresyjny rzędu 3, AR(3). Tabela 2 zawiera wyniki estymacji, natomiast w tabeli 3 zamieszczono oceny dopasowania oraz testów diagnostycznych.

Interpretując zawartość tabeli 3 można stwierdzić dobre dopasowanie modelu do danych, brak autokorelacji reszt. Bardzo istotnymi wynikami są: utrzymująca się heteroskedastyczność składnika losowego oraz wynik testu na pominięty efekt ARCH (stowarzyszony z autokorelacją kwadratów reszt). Wskazują one na zasadność osobne-

⁹ Jest to tzw. analiza potwierdzająca, w tym wypadku skuteczna, jednak jak wykazały badania symulacyjne mogąca prowadzić do błędnych wniosków w przypadku kiedy proces jest procesem typu TS (stacjonarnym) (por. Piłatowska, 2003, str. 113).

Tabela 2.

Wyniki estymacji modelu AR(3)

Parametr	Ocena	Błąd standardowy	p-value
Stała	1,0009	0,0006	0
Zm 0-1	0,0057	0,0011	0
AR1	1,8171	0,0915	0
AR2	-1,3099	0,1257	0
AR3	0,4005	0,0573	0

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 3.

Dopasowanie i testy diagnostyczne

Nazwa miary/testu	Wartość	p-value
Logarytm wiarygodności	4120,53	–
R ²	0,93	–
Test Jarque-Bera	4646,09	0
Test Ljunga-Boxa (reszty), Q(12)	13,92	0,306
Test Ljunga-Boxa (kwadraty reszt), Q(12)	279,07	0
Statystyka Durbina – Watsona	1,93	–
Test LM na autokorelację skł. losowego	13,54	0,331
Test LM na pominięty efekt ARCH	246,75	0
Test LM na heteroskedastyczność skł. losowego	127,96	0

Źródło: obliczenia własne.

go modelowania wariancji procesu. Oznacza to, iż marker zmienności wariancji może mieć w tym przypadku zastosowanie.

Zgodnie z przyjętą na wstępie metodologią, aby zrealizować cel badania podjęto próbę oszacowania modelu przełącznikowego typu MS(M)(AR(p))GARCH(p,q) o postaci ogólnej¹⁰:

$$y_t = \alpha_0 s_t + \sum_{m=1}^p \varphi_m s_t y_{t-m} + u_t, \quad (1)$$

gdzie:

$$u_t = h_t^{1/2} e_t \text{ oraz } e_t \sim i.i.d.(0, 1),$$

¹⁰ W zakresie specyfikacji i metod estymacji por. np. Davidson (2004), Hamilton (1989), Hamilton, Susmel (1994), Krolzig (1998).

$$h_t = \beta_{0S_t} + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{mS_t} u_{t-m}^2. \quad (2)$$

W równaniu wariancji warunkowej (2) zastosowano specyfikację ARCH(∞), która zawiera także modele klasy GARCH (p,q).

W modelu (1-2) każdy z parametrów może być potencjalnie zmienną losową, przełączaną pomiędzy wartościami ze skończonego zbioru wartości, zależnych od aktualnego stanu S_t . gdzie $S_t = 1, \dots, M$.

Zakłada się, iż zmienna S_t jest egzogenicznym, jednorodnym procesem Markowa o stałych prawdopodobieństwach przejścia $\{p_{ij}\}$ takich że:

$$p_{ij} = \Pr(S_t = j | S_{t-1} = i).$$

Prawdopodobieństwo tego, że obserwowany proces y_t jest w stanie j w okresie t dane jest za pomocą równania filtrującego (uaktualniającego):

$$\Pr(S_t = j | \Omega_t) = \frac{f(y_t | S_t = j, \Omega_{t-1}) \Pr(S_t = j | \Omega_{t-1})}{\sum_{i=1}^M f(y_t | S_t = i, \Omega_{t-1}) \Pr(S_t = i | \Omega_{t-1})}, \quad (3)$$

gdzie Ω_t oznacza całą informację (tj. $y_{t-j}, S_{t-j}, j \geq 0$) dostępną w chwili t , oraz:

$$\Pr(S_t = j | \Omega_{t-1}) = \sum_{i=1}^M p_{ij} \Pr(S_{t-1} = i | \Omega_{t-1}), \quad (4)$$

gdzie prawdopodobieństwa przejścia p_{ij} stanowią $M(M-1)$ parametrów do oszacowania.

Postać warunkowej funkcji gęstości zmiennej obserwowalnej:

$$f(\cdot | S_t = j, \Omega_{t-1})$$

wymaga przyjęcia założeń co do rodzaju rozkładu.

Oceny parametrów modelu mogą być uzyskane metodą największej wiarygodności. W tym celu wykorzystuje się funkcję wiarygodności postaci:

$$L = \sum_{t=1}^T \log \Pr \sum_{i=1}^M f(y_t | S_t = j, \Omega_{t-1}) \Pr(S_t = j | \Omega_{t-1}). \quad (5)$$

Maksymalizacji funkcji (5) dokonuje się dobrze znaną metodą za pomocą algorytmu EM lub BFGS¹¹.

Po przeprowadzeniu licznych prób¹² oszacowano ostatecznie model w specyfikacji MS(2)(AR(3))ARCH(2) o postaci:

$$y_t = \alpha_{0_t} + bD_t + \sum_{m=1}^3 \varphi_m y_{t-m} + u_t, \quad (6)$$

¹¹ Szczegóły, zob. Krolzig (1998), str. 8.

¹² Estymacji dokonywano za pomocą pakietu TSM gdzie częstym problemem jest brak zbieżności algorytmu Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) optymalizacji funkcji wiarygodności.

gdzie:

$$u_t = h_t^{1/2} e_t \quad \text{oraz} \quad e_t \sim i.i.d.(0, 1),$$

$$h_t = \beta_0 s_t + \beta_1 u_{t-1}^2 + \beta_2 u_{t-2}^2 \quad (7)$$

oraz: $S_t = 1, 2$.

Model w specyfikacji (6), (7) zawiera sterowanie obserwowalnym procesem ceny poprzez nieobserwowalny proces stochastycznym zmiennej stanu S_t , o którym zakłada się iż jest jednorodnym łańcuchem Markowa o 2 stanach i właściwej macierzy prawdopodobieństw przejścia pomiędzy stanami. Zmienna D_t jest, jak w poprzedniej specyfikacji AR(3), zmienną 0-1 o wartości równej 1 dla tygodni trzech obserwacji odstających i 0 dla pozostałych tygodni próby. Parametrem zależnym od reżimu jest stała w równaniu wariancji warunkowej (7). Wyniki estymacji ilustrują tabele 4 i 5.

Table 4.

Wyniki estymacji modelu MS(2)(AR(3))ARCH(2)

Parametr	Ocena	Błąd standardowy	p-value
p_{11}	0,9655	—	—
p_{22}	0,9212	—	—
φ_1	1,5712	0,0475	0
φ_2	-0,9443	0,0646	0
φ_3	0,2397	0,0336	0
β_1	0,5861	0,1216	0
β_2	0,1795	0,0488	0
α_0	0,9998	0,0003	0
b	0,0035	0,0003	0
β_{01}	0,0005	0,00001	—
β_{02}	0,0013	0,0003	—

Źródło: obliczenia własne.

Na podstawie tabel 4 i 5 można ocenić, iż model poprawnie reprezentuje badany proces. Szacunki wszystkich parametrów są statystycznie istotne, dopasowanie do danych jest zadawalające (wartość logarytmu wiarygodności wzrosła w porównaniu ze specyfikacją pozbawioną opisu zmienności wariancji procesu). Poprawie uległy także własności reszt, zarówno poziomy jak i kwadraty nie wykazują autokorelacji, efekt ARCH został także, jak się wydaje, poprawnie włączony do specyfikacji modelu.

W zakresie celu badania należy zauważyć, iż potwierdziły się wcześniejsze obserwacje o zróżnicowaniu poziomów zmienności. Oszacowany model wyraźnie wskazuje na okresową zmianę w zakresie wariancji, o dużej trwałości (szacunki prawdopodobieństw przejścia p_{11} oraz p_{22} są bliskie 1). W reżimie 1 stała w równaniu wariancji

Tabela 5.

Dopasowanie i testy diagnostyczne

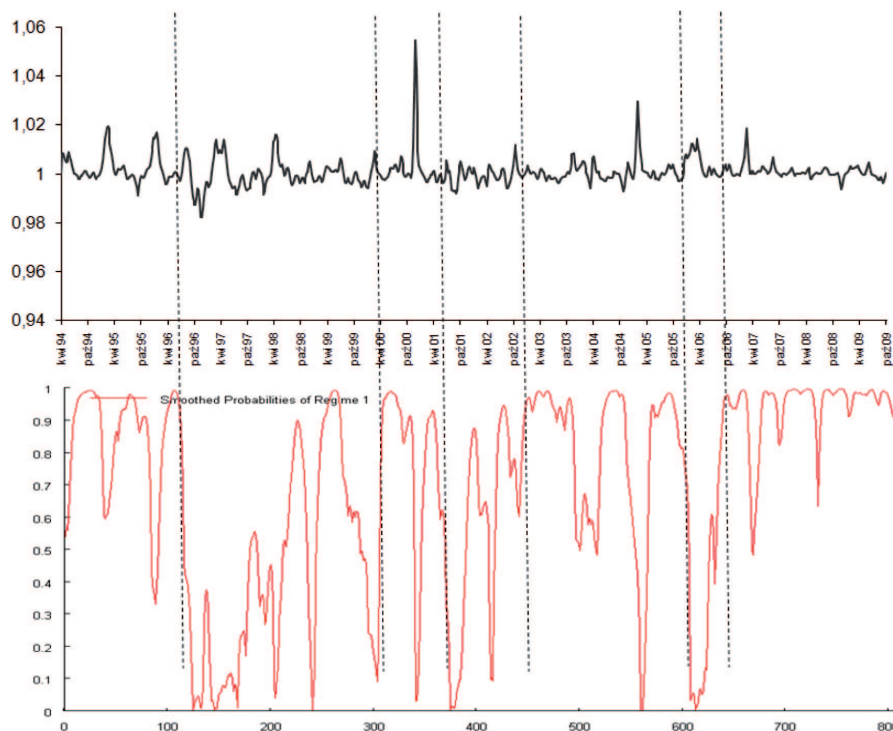
Nazwa miary/testu	Wartość	p-value
Logarytm wiarygodności	4344,32	—
R ²	0,92	—
Test Jarque-Bera	17,97	0
Test Ljunga-Boxa (reszty), Q(12)	12,92	0,346
Test Ljunga-Boxa (kwadraty reszt), Q(12)	17,89	0,119
Statystyka Durbina - Watsona	1,89	—
Test LM na autokorelację skł. losowego	12,56	0,401
Test LM na pominięty efekt ARCH	3,56	0,736
Test LM na heteroskedastyczność skł. losowego	3,09	0,078

Źródło: obliczenia własne.

warunkowej jest wyraźnie niższa niż w reżimie drugim, co wskazuje na przeciętnie niższy poziom zmienności w reżimie 1. Przeciętny czas trwania procesu w reżimie 1 wynosi $(1-0,96553)^{-1} = 29$ tygodni, natomiast w reżimie 2-13 tygodni. Najistotniejsze jest jednak pytanie, czy proponowany model może służyć detekcji zmoży. Można to ocenić na podstawie precyzji detekcji reżimów. Na rysunku 3 zestawiono przebieg wartości obserwowanej zmiennej (szereg po przefiltrowaniu filtrem H-P) oraz rysunek prawdopodobieństw wygładzonych dla reżimu 1 (czyli prawdopodobieństw warunkowych przebywania procesu w stanie S_1 przy uwzględnieniu informacji z całej próby).

Liniami przerywanymi, w sposób przybliżony, zaznaczono fazy potencjalnej zmoży. Należy dodatkowo wziąć pod uwagę wpływ i znaczenie 3 obserwacji odstających. Oznaczają one w istocie (por. rysunek 1) jednorazowy, skokowy wzrost przeciętnej ceny rynkowej, po którym następuje stabilizacja na nowym, wyższym poziomie. Zatem mimo, iż formalnie oznaczają one nagły wzrost wariancji procesu (i w związku z tym na rysunku 3 są zarejestrowane jako gwałtowne redukcje prawdopodobieństw przebywania procesu w reżimie 1) powinno się uwzględnić ich realne, ekonomiczne znaczenie jako skoordynowanych akcji, podejmując próbę identyfikacji rodzaju równowagi rynkowej. Na podstawie rysunku 3 zasadne wydają się następujące wnioski:

- jako fazy potencjalnej zmoży można wskazać okresy:
 - o 1994 – do połowy 1996 (faza I),
 - o 2000 – do połowy 2001 (faza II),
 - o od połowy 2006 do końca próby (szczególnie stabilny okres) (faza III).
- fazy załamania kartelu (konkurencji) można datować na:
 - o okres od połowy 1996 – do połowy 2000 (faza 1),
 - o 2001 do 2002 (faza 2),
 - o rok 2006 (faza 3).



Rysunek 3. Indeks cen oraz prawdopodobieństwa wyglądzone dla reżimu 1

- okres od początku roku 2003 do końca 2005 nie daje się jasno zakwalifikować (okresy o niskiej wariancji przeplatają się z okresem wysokiej wariancji) Można zaryzykować obserwację, iż w roku 2004 nastąpiło faktyczne załamanie zмовы. Rzecz jasna kluczowe jest pytanie, czy zakładany mechanizm detekcji zмовы faktycznie działa. Weryfikacji można dokonać dysponując informacjami z przeprowadzonych postępowań antytrustowych oraz faktami dotyczącymi działania branży. Poniżej wymieniono najważniejsze fakty związane z funkcjonowaniem branży cementowej w Indiach, mogące mieć istotny związek ze wskazanymi fazami potencjalnej zмовы.

Na podstawie postanowienia wydanego przez indyjską Komisję do spraw monopolii oraz zabronionych praktyk handlowych¹³ wiadomo iż:

- a) w dniu 5 lipca 2000 roku w Jabalpur miało miejsce spotkanie przedstawicieli głównych graczy (posiadających łącznie ponad 60% udziałów w rynku), na którym podjęto wspólne działania mające na celu sztucznie ustalić cenę cementu oraz ustalić podaż cementu na rynku poprzez wspólne podniesienie ceny cementu oraz wstrzymanie dostaw na rynek w dniach 5 – 9 lipca 2000 r.,

¹³ Monopolies and Restrictive Trade Practices Commission, akronim MRTPC. Zob. dokument elektroniczny: <http://www.baionline.in/media/data/MRTP2.pdf>

- b) skoordynowane wstrzymanie dostaw miało miejsce także w dniach 27.11.2000 – 4.12.2000 oraz 12.01.2001 do 19.01.2001.

Inne ważne fakty to:

- c) w roku 2001 oraz 2004 nastąpiło znaczne spowolnienie (w porównaniu z resztą próby) rocznego tempa wzrostu produkcji cementu¹⁴,
d) w roku 2006 nastąpił gwałtowny wzrost konsumpcji cementu,
e) w marcu 2004 do branży wszedł nowy gracz, Shanghi Cement.

4. PODSUMOWANIE BADANIA ORAZ ANALIZA KOMPARATYWNA

Syntetyzując rezultaty przeprowadzonego badania należy stwierdzić, iż:

- zakładając pewien teoretycznie uzasadniony mechanizm determinujący równowagę rynkową zmonopolizacji i wynikający zeń rodzaj zaburzenia procesu ceny, zaburzenia takie wykryto wykorzystując wybrane narzędzie ekonometryczne,
- na podstawie rodzaju zaburzenia wydzielono fazy potencjalnej zmonopolizacji oraz konkurencji (równowagi niekooperacyjnej innej niż jawna lub cicha zmonopolizacja)
- zestawiając wykryte fazy z faktami historycznymi należy zauważyć, że:
 - o fakty a), b) potwierdzają prawidłowość detekcji fazy zmonopolizacji II
 - o fakt c) jest zgodny z detekcją fazy konkurencji 2 (na podstawie modelu Bejger 2010, w fazie kurczenia się rynku minimalny udział w rynku, przy którym najmniejszy gracz jest skłonny uczestniczyć w zmonopolizacji zwiększa się, zatem może nastąpić unilateralne zerwanie zmonopolizacji gracza niezadowolonego),
 - o fakty c) i e) są zgodne z detekcją załamania się zmonopolizacji w roku 2004,
 - o faza konkurencji 3 w zestawieniu z faktem d) oraz analizą przyczyny wzrostu wariacji w tym okresie (przyczyną, jak wynika z rysunku 2 był szybki sukcesywny wzrost ceny cementu do połowy omawianego okresu i następnie stabilizacja cen do końca okresu) nie może być jednoznacznie zakwalifikowana bez wykorzystania dodatkowych informacji, dotyczących procesu popytu rynkowego.

4.1 ANALIZA KOMPARATYWNA

W cytowanej pracy Anand (2009), dokonano arbitralnie, głównie pod wpływem faktów a) i b) podziału badanej próby na okresy: konkurencji (brak kartelu) w latach 1994–1999 oraz kartelu (2000–2009). Konkluzje, jakie zawiera praca (badanie w podpróbach) są następujące:

- nie wykrywa się kartelu w latach 1994–1999,
- określa się okres formowania się kartelu (2000–2003) z kilkoma fazami załamania,
- krytycznym okresem (fazą kartelu) są lata 2004–2009.

¹⁴ Dane pochodzą z Cement Manufacturer Association Annual Report 2009-10.

Konkluzje te oparto na badaniu trendu (liniowego) jednopodstawowego indeksu cen, badaniu wartości kwartalnych wahań sezonowych (bez analizy statystycznej) oraz analizie zmian w kosztach podstawowych czynników produkcji.

Wyniki obu badań (niniejszego i referencyjnego) są częściowo zbieżne, należy jednak zwrócić uwagę na różnice metodologiczne:

- celem niniejszej pracy jest weryfikacja funkcjonowania markera, którego zastosowaniem ma być detekcja potencjalnej zmowy (bez żadnych informacji wstępnych, tym bardziej prywatnych informacji graczy)
- detekcja zmowy oparta jest na podstawach teoretycznych (właściwych modelach równowagi) i wykorzystuje narzędzia statystyki matematycznej celem obiektywnego oszacowania wartości zakłóceń przyjętych jako znacznik zmowy/konkurencji.

4.2 PODSUMOWANIE I KIERUNKI DALSZYCH BADAŃ

Wydaje się, iż detekcja rodzaju równowagi na podstawie opisanego znacznika zmowy okazała się zadawalająca i uzyskała częściowe potwierdzenie w posiadanych informacjach (z postępowania antytrustowego oraz ekonomicznych). Narzędzie ekonometryczne, jakie wykorzystano daje dość czytelne wskazania, jednak nie w pełni realizuje postulat niewielkich nakładów niezbędnych w aplikacji (wspomniane wcześniej trudności w estymacji modeli przełącznikowych spowodowały nieplanowane zwiększenie nakładu czasu). Głównym problemem jest jednak nikonkluzywność detekcji zmowy / konkurencji w okresie gwałtownego wzrostu rynku. Kolejnym etapem badania winno być zastosowanie analizy falkowej w celu dokładniejszego określenia momentów zmian poziomu wariancji procesu oraz wykorzystanie dodatkowych informacji dotyczących popytu rynkowego oraz cen czynników produkcji.

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

LITERATURA

- [1] Abrantes-Metz R., Froeb L., Geweke J., Taylor C., (2006), A variance screen for collusion, *International Journal of Industrial Organization* 24, 467-486.
- [2] Anand S., (2009), Identifying cartels using economic evidence, a case study of Indian cement industry, Competition Commission of India, New Delhi.
- [3] Athey S., Bagwell K., Sanchirico C., (2004), Collusion and price rigidity, *Review of Economic Studies*, 71, 317-349.
- [4] Bejger S., (2009), Ekonometryczne narzędzia detekcji równowagi zmowy w branży, *AUNC Ekonomia* XXXIX, 125.
- [5] Bejger S., (2010), Collusion and seasonality of market price – a case of fixed market shares, *Business and Economic Horizons*, 2, 48-59.
- [6] Bejger S., (2010a), Detekcja równowagi zmowy w branży z wykorzystaniem analizy falkowej – model teoretyczny, *AUNC Ekonomia* XLI, 7-26.
- [7] Bejger S., Bruzda J., (2010), Detekcja równowagi zmowy w branży z wykorzystaniem analizy falkowej – weryfikacja empiryczna, *AUNC Ekonomia* XLI, 27-42.

- [8] Bejger S., (2011), Polish cement industry cartel – preliminary examination of collusion existence, *Business and Economic Horizons*, 4, 88-107.
- [9] Bolotova Y., Connor J.M., Miller D.J., (2008), The impact of collusion on price behavior: Empirical results from two recent cases, *International Journal of Industrial Organization* 26, 1290-1307.
- [10] Cement Manufacturer Association Annual Report 2009-10, dokument elektroniczny: <http://www.cmaindia.org/portal/static/AnnualReport2009-10.pdf>.
- [11] Connor J., Helmers G., (2006), Statistics on modern private international cartels, 1990-2005, Dept. of Agricultural Economics, Purdue University, Working Paper #06-11.
- [12] Davidson J., (2004), Forecasting Markov-switching dynamic, conditionally heteroscedastic processes, *Statistic and Probability Letters*, 68(2), 137-147.
- [13] Hamilton J.D., (1989), A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle, *Econometrica* 57, 357-384.
- [14] Hamilton J.D., Susmel R., (1994), Autoregressive conditional heteroscedasticity and changes in regime, *Journal of Econometrics* 64, 307-333.
- [15] Harrington J.E., (2005), Detecting cartels, working paper, John Hopkins University.
- [16] Konkluzje postanowienia MRTPC, dokument elektroniczny: <http://www.baionline.in/media/data/MRTP2.pdf>.
- [17] Krolzig H.M., (1998), Econometric Modelling of Markov-Switching Vector Autoregressions us-ing MSVAR for Ox, Working paper.
- [18] Maskin E., Tirole J., (1988), A theory of dynamic oligopoly II, *Econometrica* 56, 571-599.
- [19] Piłatowska M., (2003), *Modelowanie niestacjonarnych procesów ekonomicznych. Studium metodologiczne*, Wydawnictwo UMK, Toruń.
- [20] Rotemberg J., Saloner G., (1990), Collusive price leadership, *The Journal of Industrial Economics*, 39, 93-111.

KARTEL PRODUCENTÓW CEMENTU W INDIACH – PRÓBA IDENTYFIKACJI

Streszczenie

Artykuł poświęcony jest problematyce obiektywnej detekcji i oceny zmów uczestników rynków oligopolistycznych. Celem szczegółowym pracy jest sprawdzenie funkcjonowania jednej z metod ekonometrycznych detekcji zмовy związanej z określonym markerem (znacznikiem) zмовy. W pracy nakreślono motywacje teoretyczną markera, opartą na właściwych modelach teorii gier oraz wykorzystano model przełącznikowy Markowa typu MS(AR)GARCH jako narzędzie statystyczne. W celu weryfikacji empirycznej wybranej metody przeprowadzono próbę detekcji faz zмовy w branży cementowej Indii w latach 1994–2009. W rezultacie badania udało się otrzymać obiektywne wskazania faz zмовy i konkurencji, które znajdują częściowe potwierdzenie w faktach historycznych oraz badaniu referencyjnym.

Słowa kluczowe: Zmowa jawna i milcząca, równowaga, branża cementowa, wariancja ceny, model przełącznikowy Markowa

INDIAN CEMENT CARTEL – AN ATTEMPT OF DETECTION

A b s t r a c t

The article is devoted to problem of detection of overt or tacit collusion equilibrium in the context of choice of the appropriate econometric method, which is determined by the amount of information that the observer possesses. As a particular method to be used we have chosen a collusion marker coherent with an equilibrium of the proper model of strategic interaction – the presence of structural disturbances in the price process variance for phases of collusion and competition. We than used a proper econometric tool, namely Markov Switching Model with switching in variance regimes in order to verify its functionality in a context of a research. We applied the model to cement industry of India in a period of 1994–2009. We have reached some promising effects in discovery of collusion and competition phases, partially confirmed by facts from functionality of the industry and by reference research.

Key words: explicit and tacit collusion, collusive equilibrium, cartel detection, cement industry, price variance, Markov switching model

AGATA ŻÓŁTASZEK

PRIVATE FINANCING OF HEALTH CARE IN POLAND – MICROSIMULATION MODEL¹

1. INTRODUCTION

Healthcare is a key sector in every economy and is of great medical, social, and economical importance to all citizens. It is also one of the most diverse sectors in the world, especially in the aspect of financing. In Poland health care is mostly public funded. Generally, 70% of funding is state-based, which has been the case at least since the beginning of the XXI century. For the most part it comes from obligatory social insurance. In Poland there is practically no medical insurance, with the exception of insurance offered by employers in large companies. Such insurance, however, covers less than 5% and is a fairly recent thing. Therefore, the remaining 30% mostly includes out-of-pocket expenditures, either formal or not. The level of direct private funding is one of the highest in Europe (Żółtaszek, Jewczak, 2011). This is puzzling, since in Poland every medical service is available free of charge (nowadays dental and veterinarian expenditures are not public funded). However, the quality of services and waiting time are often far from optimal. The new quality certificates obtained by hospitals define the minimal not ideal conditions. For example, anaesthesiologists need to confirm a patient's identity, carry out a medical interview and participate in the entire operation procedure. It is disturbing that these basic requirements were not obvious, but after Poland's accession to the European Union the number of anaesthesiologists decreased dramatically. One specialist simultaneously supervised 3 operations, while many procedures were delayed due to the lack of qualified staff.

A gratuitous appointment to a specialist or a specialist medical examination may be scheduled in a few months or even years (for instance 8 months for a pacemaker). Some ill or elderly people are probably more likely to die waiting than actually seeing a doctor. Therefore, it is often better to pay, for example € 50, and get a CT scan in three weeks rather than wait 6 months to do it for free in the same public facility. Some equipment, like PET scanners, is not used because there are no public funds available or there is no specialised staff to operate it.

¹ Within a research project financed by The Ministry of Science and Higher Education: Grant Promotorski „*Modele mikrosymulacyjne w badaniach ekonomicznych i społecznych. Aspekty metodologiczne i zastosowania*”.

The National Health Fund (NFZ) signs contracts with hospitals predefining what number of individual procedures is to be refunded by the state during the next year. Anything above that quota increases the hospitals' debts. Some facilities or service providers do not get a contract at all and patients need to commute to other cities or ambulance companies have to encompass districts that are several hundred kilometres large, because their local counterparts are more expensive.

Due to the system's inefficiency new policies are being discussed, some of which include various methods of patient co-payment. The popularisation of the currently uncommon private medical insurance, either supplementary or complementary to public financing, is one of the proposed solutions. On the other hand, a large increase of the social insurance contributions by 100-300% is also being considered. There is no solid proposal yet, and therefore numerous researches are carried out to verify the possible outcomes. Most of the research is performed at macro level.

Microeconomic modelling of health economics in Poland is restricted because of the limited micro datasets containing information on income, expenditures on health-care, health, and social status of households. Therefore, also microsimulations are rather uncommon in health economics or otherwise. The best known applications are the SIMPL – a tax-benefit model for Poland (extension of EUROMOD) (for more see Myck, 2008) and various traffic simulations. The micro simulation approach offers the possibility to assess various scenarios and determine the gain-loss distributions of each.

The main goal of this paper is to present a health econometric microsimulation model of the medical expenses of households in Poland, which is being developed by the author. The model is based on individual and household panel data (or longitudinal data, repeated measures) which take into consideration income, direct and indirect private expenditures, willingness to pay for private medical insurance. The microsimulation model incorporates the spatiotemporal aspects and social specificity of households. It is to be used to forecast a future situation depending on various funding reform proposals. This research is to prove the usefulness of microsimulations in creating a health care policy, which is currently of major importance in Poland.

2. DATA

For the purpose of the microsimulation two interrelated datasets are planned to be used, for households and individuals. The Social Diagnosis is a project of the Council for Social Monitoring that measures the objective and subjective quality of life in Poland. The research has been conducted since early 1990s and has consisted in gathering a variety of economic and social data (for more see <http://www.diagnoza.com/index-en.html>). The Social Diagnosis offers unified datasets for the years 2000, 2003, 2005, 2007 and 2009. With a view to maintaining analogical time periods, data for the year 2000 has been excluded. Moreover, not all variables are available for 2009, and therefore the final databases of households and individuals consist of records in 3 time

periods: 2003, 2005 and 2007. The number and the definitions of variables are not the same for each year. However, it is possible to obtain analogical values for each year.

The household dataset contains information on:

- region (province – NUTS2 region, size of place of residence),
- income
- medical expenditures in the previous 3 months on: ambulatory services (including doctor consultation, examination, dental services, etc.), unofficial payments, genuine grateful gifts, official fees for private and public hospital services, other payments for hospital services, , new variables are created: (1) unofficial expenditures constituting the sum of the unofficial payments and genuine grateful gifts, (2) hospital expenditures expressed as the sum of the official fees for private and public hospital services and other payments for hospital services,
- how much a household is willing to pay for private medical insurance,
- having a voluntary medical insurance (excluding insurance paid by an employer).

In 2003 Poland went through a major reform of the health care system that changed the Health Care Management Office into the Health Funds in every region overseen by the National Health Fund. There is no information on how this has influenced private expenditures on health care services at micro level. Therefore, in order to use the longitudinal data from 3 subsequent surveys of the Social Diagnosis, it has to be *assumed that households were indifferent to the reform at macro and regional level.*

The individual dataset contains information on: age, sex, level of education, socio-occupational status (student, pensioner, unemployed, etc.) and certified disability.

The repeated measures for the years 2003, 2005, and 2007 consist of approximately 2 000 households. They will be used to estimate the parameters of the microeconomic panel model, which is the core of the microsimulation model. Individual dataset is to be used in the microsimulation experiment to define values of exogenous variables.

To widen the variable set for households some attributes, of potential significance to income and/or medical expenditures, are added. They are derived from the individual database: number of members, the highest level of education in a household, any certified disability, presence of children, presence of people aged 60 and older.

Additional information is necessary to ensure the proper updates of attributes and exogenous variables in the simulation. The Polish demographic structure of marital status, mortality, child birth, commencing and completing higher education, is needed to determine the probability of events during the time of the simulation. The majority of these depends on age and sex. They will ensure the stochastic character of the microsimulation. The abovementioned demographic processes are not the only ones which determine the structure of the Polish society, however they are the only ones researched into and measured. After Poland joined the European Union in 2004 numerous people, not only doctors, emigrated to different UE Member Countries. However, there are no reliable estimates with respect to figures or destinations. Therefore, some assumptions on the population are required.

3. MODEL

3.1 ASSUMPTIONS

Separate assumption sets are needed for data, microeconomic model, microsimulation, and each scenario.

DATA

It is assumed that:

- 1) data is reliable, it represents the real situations of individuals and households at a given point in time,
- 2) households were indifferent to the reform of the health care system at macro and regional level,
- 3) the probability of marrying is the same as the probability of creating one household – this assumption is partly justified, as married couples generally start living together (either on their own or with parents) and informal cohabitation is often followed by formalization,
- 4) the probability of getting divorced is the same as the probability of a couple creating one household splitting up and forming two separate households – two problems are addressed by this assumption: firstly, in analogy to the previous postulate, informally-based households may not have the same odds of breaking up, but there is no data to verify it, and secondly, in Poland some divorcees / previously informal partners continue to cohabit (forming a quasi-common household) due to the lack of financial means to live separately,
- 5) the population is subject to no other demographic tendencies than those incorporated in the microsimulation model.

In Poland there is no reliable information on informal partners creating a common household. No research shows what fractions of people, other than marriages, start living together or separately. Although the number of people marrying and creating informal households or divorcing and breaking up an informal relationship differ, the probabilities of each may be imperfect, yet sufficiently accurate. Many variables which define the demographic dynamics in Poland are not sufficiently researched into and/or estimated, and therefore they are omitted in the microeconomic model, to simplify it.

MICROECONOMETRIC MODEL

It is assumed that:

- 1) the specifications of each equation represent the reality well,
- 2) there are no interdependencies between variables, other than those specified in the model,
- 3) the model is isolated – no exterior factors can influence the values of exogenous variables,

- 4) a person with the highest level of education reflects the household's education level (that person can influence other household members) .

These assumptions are generally used in econometrics, since a model is a simplified section of the reality.

MICROSIMULATION

It is assumed that:

- 1) the probabilities of demographic dynamics (marriage, divorce, death, birth) incorporated in the microsimulation model are constant for the whole duration of the simulation period,
- 2) people form lasting relationships with those that are similar in terms of demographic description – it is important for creating new objects (people) that enter the population by being added to an existing household,
- 3) the demographic and economic tendencies are constant in time and space.

SCENARIOS

Each scenario has a separate set of assumptions. They define the route policies will be taking during the simulation. Generally, for every situation it is assumed that (1) it describes the true state of the Polish health care system during the simulation period. Moreover, (2) no other changes that could influence the outcome of the microsimulation experiment occur.

3.2 MICROECONOMETRIC MODEL

The core of the microsimulation model is the microeconomic health economic model. It has been designed to calculate a household's monthly: net income, direct private health expenditures, the willingness to pay for private medical insurance. The empirical data used for the estimation of coefficients are short panel for approximately 2 000 households in 2003, 2005, and 2007. The longitudinal dataset offers 3 main advantages: (1) increased accuracy of estimation, (2) possibility of calculating fixed effects of units (households), and (3) knowledge of the dynamics of individual behaviour (Cameron, Trivedi, 2005).

Due to distributional properties of each endogenous variable different models and estimations methods are needed. Expenditures for ambulatory services and pharmaceutical expenditures are modelled as linear panel models and estimated with WLS (weighted least squares) approach. Unofficial expenditures can be obtained by two-part model as only 6% of observation are nonzero. Hospital expenditures cannot be reliably estimated because only 2% of information is nonzero, therefore binomial logit model may be applied to calculate probability of such expenditures. Willingness-to-pay for private medical insurance can be estimated as ordered multinomial model. Preliminary

estimation results are presented below (below parameters' estimates and next to right hand-side-cuts for WTP standard errors are given, determination coefficient R^2 and/or Akaike Information Criterion AIC are presented):

$$AE_{it} = -12.6_{(1.69)} - 8.7_{(1.87)} \cdot t_{2005} + 10.3_{(1.9)} \cdot t_{2007} + 0.02_{(0.0008)} \cdot I_{it} + 23.9_{(2.57)} \cdot MI_{it} + u_{1it}$$

$$(R^2 = 17\%, AIC = 13676.87)$$

$$PE_{it} = 79.2_{(5.28)} - 5.8_{(3.54)} \cdot t_{2005} + 16.3_{(3.59)} \cdot t_{2007} + 113.4_{(3.52)} \cdot P_{it} + 101.8_{(9.89)} \cdot L_{it} + 80.1_{(3.31)} \cdot D_{it} + 0.02_{(0.002)} \cdot I_{it} + 8.2_{(1.07)} \cdot NH_{it} +$$

$$-3.6_{(7.36)} \cdot R1_{it} - 17.6_{(5.49)} \cdot R2_{it} + 35.4_{(6.03)} \cdot R3_{it} - 7.5_{(7.26)} \cdot R4_{it} + 33.4_{(4.99)} \cdot R5_{it} + 16.6_{(5.75)} \cdot R6_{it} + 26.6_{(4.84)} \cdot R7_{it} + 27_{(7.46)} \cdot R8_{it} +$$

$$-20.4_{(5.91)} \cdot R9_{it} + 7.6_{(5.91)} \cdot R10_{it} - 10.8_{(5.67)} \cdot R11_{it} - 22.4_{(4.25)} \cdot R12_{it} + 3.2_{(5.66)} \cdot R13_{it} - 6.2_{(5.68)} \cdot R14_{it} - 10.7_{(5.37)} \cdot R15_{it} + u_{2it}$$

$$(R^2 = 31\%, AIC = 15803.7)$$

$$UE_{it} = -1.9_{(0.05)} + 0.2_{(0.06)} \cdot P_{it} + 0.3_{(0.06)} \cdot D_{it} + 0.0002_{(8 \cdot 10^{-5})} \cdot AE_{it} + u_{3it}$$

$$\ln UE_{it} = 3.3_{(1.31)} + 0.4_{(0.11)} \cdot \ln I_{it} - 0.9_{(0.43)} \cdot u_{3it} + e_{it} \quad (AIC = 3391.9)$$

$$HE_{it} = -4_{(0.11)} + 0.0004_{(0.0002)} \cdot AE_{it} + 0.001_{(0.0002)} \cdot PE_{it} + u_{4it} \quad (AIC = 1472)$$

$$WTP_{it}^* = 0.0002_{(2 \cdot 10^{-5})} \cdot I_{it} + 0.0004_{(0.0001)} \cdot AE_{it} + 0.5_{(0.1)} \cdot MI_{it} + 0.5_{(0.09)} \cdot D_{it} + 0.5_{(1.16)} \cdot E_{it} + 0.6_{(0.12)} \cdot S_{it} + u_{5it}$$

$$WTP_{it} = \begin{cases} 0 & \text{when } WTP_{it}^* \leq 2.95 & (0.08) \\ 1 & \text{when } 2.95 < WTP_{it}^* \leq 5.94 & (0.17) \\ 2 & \text{when } 5.94 < WTP_{it}^* \leq 7.11 & (0.28) \\ 3 & \text{when } 7.11 < WTP_{it}^* \leq 8.27 & (0.47) \\ 4 & \text{when } WTP_{it}^* > 8.27 \end{cases} \quad (AIC = 4433.6)$$

i – household index, t – time index,

AE_{it} – three-months' expenditures on ambulatory services, PE_{it} – three-months' pharmaceutical expenditures, UE_{it} – binary variable equals 1 if three-months' unofficial expenditures occur, $\ln UE_{it}$ – natural logarithm of three-months' unofficial expenditures (selective equation of the two-part model), HE_{it} – binary variable equals 1 if three-months' hospital expenditures occur, WTP_{it} – willingness-to-pay for private medical

insurance, categories 1-4: 1 – premium range is 100 PLN (€ 25) or less, 2 – 100-250 PLN, 3 – 250-500 PLN, and 4 – 500 PLN (€ 125) or more per month t_{2005} , t_{2007} – time binary variables, I_{it} – monthly net income, $\ln I_{it}$ – natural logarithm of monthly net income, MI_{it} – binary variable equals 1 if household has private medical insurance, P_{it} – binary variable equals 1 if household main income is pension, L_{it} – binary variable equals 1 if household has loan for medical expenses, S_{it} – binary variable equals 1 if household has savings for medical expenses, E_{it} – binary variable equals 1 if household has in last 3 months used medical services covered by medical insurance bought by an employer, D_{it} – binary variable equals 1 if household has in last 3 months paid directly for medical services, NH_{it} – number of household members, $RI_{it}, \dots, RI5_{it}$ – binary variable equals 1 if household lives in each province (1 – dolnośląskie, 2 – kujawsko-pomorskie, 3 – lubelskie, 4 – lubuskie, 5 – łódzkie, 6 – małopolskie, 7 – mazowieckie, 8 – opolskie, 9 – podkarpackie, 10 – podlaskie, 11 – pomorskie, 12 – śląskie, 13 – świętokrzyskie, 14 – warmińsko-mazurskie, 15 – wielkopolskie, zachodniopomorskie has been excluded), u_{rit} , e_{it} – residuals (r – equation index).

Expenditures on ambulatory services:

- increase over time,
- increase with higher income,
- are higher for households with private medical insurance.

Pharmaceutical expenditures:

- increase over time,
- increase with higher income,
- are higher for households that are mainly pension financed and/or taken loans for medical services and/or used medical services covered by “out-of-pocket” funds,
- grow with each household member,
- are spatially diverse (the lowest in śląskie and the highest in lubelskie provinces).

Probability of unofficial expenditures rises with:

- pension as main source of income,
- direct expenditures for health services,
- income level.

An increase in income by 1% generates a 0.4% growth of unofficial expenditures.

Probability of hospital expenditures rises with ambulatory and pharmaceutical expenditures. Socioeconomic variables are poor indicators for calculating this class of medical expenses.

Willingness-to-pay for private medical insurance, represented by the value of a monthly coverage increases with:

- having been using private medical insurance of any kind,
- saving for medical purposes,
- direct expenditures on medical services
- medical services paid by an employer,
- income,
- ambulatory expenditures.

These recurrent equations form the microeconomic core of the microsimulation model. According to econometric theory it is justified to estimate each equation as an independent one-equation model (Wiśniewski, 2009).

3.3 MICROSIMULATION MODEL

Microsimulation is a numeric method used for performing socioeconomic experiments on individual data. It consists of:

- starting population of objects (actors) described with social and economic attributes,
- microsimulation model (an interdisciplinary model that mimics the social, economic and demographic setting of population's elements by defining possible events, decisions, options etc.).

The starting population for health economic simulation experiment needs to be a representation of Polish population. Therefore, the Social Diagnosis individual dataset for year 2007 (approximately 40 000 actors) will be used.

The microsimulation model consists of (1) the microeconomic model – the core (the health econometric model of households has been described in the previous section) and (2) the demographic model – the periphery (responsible for updating individuals' attributes and exogenous variables that change over time, based on Polish demography as well as transforming individual variables to household variables).

These objectives of demographic model are crucial for long-term simulation. Short-term simulations may be static and deterministic, because few changes are likely to occur. Assuming no demographic change in a ten-year period in association with individuals and households is unjustified. Every 2 years all variables will be updated. Some are deterministic, for example age. Others are programmed to arise with given probability. For each individual separately it will be randomly determined if: single adults will get married (or stay in an informal relationship), couples will divorce (or break an informal relationship and stop forming one household), children will be born, or someone dies. Most variables depend on age. Moreover, people will either commence or not higher education which they may or may not complete. Elderly people may retire or continue working. New individuals will be added to the population (through marriage or birth) and assigned a set of attributes. Some will leave the population (through divorce or death). This will ensure the dynamic and stochastic characteristics in the microsimulation. Every variable and attribute needs to be updated or assumed constant.

The last objective means that although demographical changes are programmed for individual people, the microeconomic model is designed to operate for households. Therefore, after adjusting attributes and variables for every person, exogenous variables will be calculated based on a household index.

4. EXPERIMENT

The microsimulation experiment will be held separately for each scenario. The simulation will be calculated for the years 2008–2018 (updates of attributes will occur in discrete two-year intervals) and repeated 1 000 times. The average values of endogenous variables will be obtained for every household. This will enable the calculation of descriptive statistical measures for income, private health care expenditures and the willingness to pay for private medical insurance in the simulation population. Moreover, the same procedure will be applied to the designed groups divided by region, size of place of residence, biological structure of a household and the main source of income. It creates the possibility to define the distribution of “gains” and “losses”, “winners” and “losers” for each scenario. The results will be compared within and among the setups.

SCENARIO 1

The first scenario is the basic one, it is the benchmark for other setups. It is assumed that no changes in health care funding are introduced during the simulation. None of the proposed policy reforms will be implemented. The willingness-to-pay equation does not reflect the indirect private expenditures of households. Private insurance coverages have a marginal effect on the overall funding.

Each other scenario is to be compared as an alternative to this, no change, setup.

SCENARIO 2

One of proposed reforms of health care financing suggests a substantial increase in the obligatory social insurance and the “money follows the patient” policy. The former will be reflected by the reduction of the net income. The latter is expected to increase the efficiency of the health care system and decline in ambulatory and hospital expenses. Informal and pharmaceutical funding may not change. No changes stimulating the implementation of private medical insurance will occur.

This model cannot measure whether this proposal will indeed increase the efficiency of health care facilities.

SCENARIO 3

The willingness to pay for private medical insurance is equivalent to actually taking out the insurance. The insurance is complementary and voluntary. The amount of the premium defines the extension of the insurance: 100 PLN (€ 25) or less – 25% decrease, 100-250 PLN – 50%, 250-500 PLN – 75%, and 500 PLN (€ 125) or more per month – 100%. Moreover, no informal funding seems necessary, and thus it is also 0 PLN. For households without private medical insurance, endogenous variables are modelled similarly to scenario 1.

SCENARIO 4

The willingness to pay for private medical insurance is equivalent to actually taking out the insurance. The insurance is obligatory, but the level is not fixed. The amount of the premium defines the extension of the insurance (see Scenario 3). A household that declared no willingness to pay will be “forced” to purchase the basic and cheapest variant.

5. CONCLUSIONS

The Polish health care system is in transformation. The main aims for proposed modifications include the increase of efficiency and reduction of expenditures. The latter includes private out-of-pocket funding that may not always be government-supervised, as unofficial expenses are sometimes unethical or illegal. The variety of suggested reforms reflects the lack of unanimity among the health economists and policy makers. Furthermore, the political impact is often more substantial than economic reasoning. Nowadays, the oncoming parliamentary elections planned for late 2011 make it hard to distinguish genuine proposals from looking-for-electorate’s-support suggestions.

However, everyone agrees that changes have to be made and they have to be made fast. What is in demand is the methodology allowing for a comparison of the present and future outcomes of alternative proposals. The microsimulation approach can be a useful tool for reforming the health care system, as it permits to draw a distribution of “gains” and “loses” of each policy. Determining “winners” and “losers” may be crucial to choosing the best option, as well as defining policy nuances that could partly protect the disadvantaged.

The microsimulation experiments can be highly beneficial, but their application is not devoid of problems. Appropriate micro databases are few and often insufficient. Moreover, programming experiments can be a challenge with respect to the required hardware and software.

Uniwersytet Łódzki

REFERENCES

- [1] Baroni E., Richiardi M., (October 2007), *Orcutt’s Vision, 50 years on*, Working Paper no. 65.
- [2] Cameron A., Trivedi P., (2005), *Microeconometrics. Methods and Applications*. Cambridge University Press, New York.
- [3] Myck M., (2008), *Analizy polskiego systemu podatkowo – zasiłkowego z wykorzystaniem modelu mikrosymulacyjnego SIMPL*, Problemy polityki społecznej nr 11/2008.
- [4] Orcutt G.H., Caldwell S., Wertheimer R.F., (1976) *Policy exploration through microanalytic simulation*, The Urban Institute, Washington D.C.
- [5] REPORT „Finansowanie ochrony zdrowia w Polsce – Zielona Księga II”, wersja trzecia Ministerstwo Zdrowia, Warszawa, 29 August 2008.

- [6] Suchecka J., (1992), *Modelowanie sfery ochrony zdrowia. Problemy i metody*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.
- [7] Suchecka J., (1998), *Ekonometria ochrony zdrowia*, Wydawnictwo Absolut, Łódź.
- [8] Suchecki B., (ed.), (2010), *Ekonometria przestrzenna*, PWE, Warszawa.
- [9] *Statistical yearbook of the Republic of Poland 2010*, (2011), Central Statistical Office, Warsaw.
- [10] World Health Organization Statistical Information System: Core Health Indicators, http://apps.who.int/whosis/database/core/core_select.cfm (10.05.2010).
- [11] Wiśniewski J.W., (2009), *Mikroekonometria*, Wydawnictwo Mikołaja Kopernika, Toruń.
- [12] Żółtaszek A., Jewczak M., (2011), *Spatial and dynamic analysis of healthcare expenditures in OECD countries*, [w:] *Spatial econometrics and regional economic analysis*, Suhecki B. (red.), *Folia oeconomica* 252, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, <http://www.diagnoza.com/index-en.html> (20.04.2011).

PRYWATNE FINANSOWANIE OCHRONY ZDROWIA W POLSCE – MODEL MIKROSYMULACYJNY

S t r e s z c z e n i e

Sektor ochrony zdrowia jest kluczowym działem gospodarki każdego państwa, wzbudza bezpośrednie zainteresowanie obywateli, zarówno w aspektach medycznym i społecznym, jak i ekonomicznym. Jednocześnie jest jednym z bardziej zróżnicowanych sektorów na świecie, szczególnie pod względem struktury źródeł jego finansowania. W Polsce znaczna część usług medycznych opłacana jest z budżetu państwa. Z powodu nieefektywności funkcjonowania sektora ochrony zdrowia, toczą się dyskusje dotyczące jego reform, m.in. współfinansowania usług medycznych. Jedną z propozycji jest wprowadzenie prywatnych ubezpieczeń medycznych jako produktów suplementarnych lub komplementarnych dla wydatków publicznych.

Celem artykułu jest prezentacja mikrosymulacyjnego modelu ekonometrii zdrowia wydatków gospodarstw domowych na ochronę zdrowia w Polsce. Model wykorzystuje dane panelowe gospodarstw domowych dotyczące prywatnego finansowania opieki zdrowotnej i skłonności do płacenia za prywatne ubezpieczenia medyczne. Model ma posłużyć prognozowaniu przyszłej sytuacji w zależności od implementacji proponowanych reform. Badanie ma udowodnić przydatność mikrosymulacji w tworzeniu polityki ochrony zdrowia w Polsce.

Słowa kluczowe: mikrosimulacje, ekonomika zdrowia, ekonometria zdrowia, prywatne wydatki na ochronę zdrowia, model mikroekonometryczny

PRIVATE FINANCING OF HEALTH CARE IN POLAND – MICRO SIMULATION MODEL

A b s t r a c t

Health care is a key sector of every economy and is of great medical, social, and economical importance to all citizens. It is also one of the most diverse sectors in the world, especially in the aspect

of financing. In Poland health care is mostly public funded. However due to system's inefficiency new policies are discussed, some of which include various methods of co-payment. Popularisation of currently uncommon private medical insurance, either supplementary or complementary to public financing, are one of the proposed solutions

The main goal of this paper is to present health econometric micro simulation model of households' medical expenses in Poland. Model is based on individual household panel data considering private funding of health care and willingness-to-pay for private medical insurance. It is to be used to forecast future situation depending on various funding reform proposals. This research is to prove usefulness of micro simulations in assessing health care police, which is of currently of major importance in Poland.

Key words: microsimulation, health economics, health econometrics, private expenditures on health-care, microeconomic model

MARCIN PEŁKA, ANETA RYBICKA

POMIAR I ANALIZA PREFERENCJI WYRAŻONYCH Z WYKORZYSTANIEM PAKIETU CONJOINT PROGRAMU R¹

1. WSTĘP

W badaniach preferencji konsumentów wykorzystujemy dane historyczne oraz dane wyrażające intencje, inaczej deklaracje konsumentów. Opierając się na drugim typie danych, możemy przeprowadzić badania preferencji wyrażonych. W tego typu badaniach wykorzystujemy m.in. metody dekompozycyjne, a tu przede wszystkim *conjoint analysis*.

Głównym założeniem metod *conjoint analysis* jest zaprezentowanie respondentom zbiorów obiektów – rzeczywistych lub hipotetycznych produktów lub usług – opisanych za pomocą zmiennych objaśniających, które przyjmują określone wartości (Bąk, 2004b, s. 48).

W trakcie badania respondenci oceniają prezentowane obiekty. Celem takiego badania jest pomiar preferencji konsumentów względem przedstawionych obiektów, a wynikiem pomiaru jest zbiór wartości zmiennej objaśnianej.

Model *conjoint analysis* może być szacowany:

- na poziomie indywidualnym (w przekroju respondenta),
- na poziomie zagregowanym (w przekroju całej badanej próby).

Natomiast wyniki estymacji modelu *conjoint* wykorzystywane są do (Zwerina, 1997, s. 5):

- identyfikacji preferencji,
- analizy udziałów w rynku,
- segmentacji konsumentów.

Identyfikacja preferencji wyrażonych, analiza udziałów w rynku, segmentacja konsumentów są niezwykle istotnym elementem badań ekonomicznych. W metodach tych wykorzystujemy różne oprogramowanie komputerowe. W przypadku metod *conjoint analysis* zastosowanie znajdują (Bąk 2004a, s. 220): SAS/STAT, SPSS, SYSTAT, Conjoint Analysis; Sawtooth Software (CVA), PC-MDS (PREFMAP, MONANOVA, TRADEOFF, CONJOINT), Bretton-Clark (Conjoint Analyzer, Conjoint Designer), R.

¹ Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2009-2012 jako projekt badawczy nr N N111 446037.

Program R, ze względu na dostępność na zasadach licencji publicznej GPL, zdobywa coraz więcej zwolenników, zarówno wśród osób zajmujących się badaniami preferencji, jak i osób korzystających z metod analizy wielowymiarowej. Z uwagi na fakt, że dotychczas brakowało jednolitego pakietu pozwalającego na przeprowadzenie całej procedury *conjoint analysis* z wykorzystaniem programu R opracowany został pakiet conjoint² programu R. Pakiet ten stanowi odpowiedź na dotychczasowe braki i pozwala przeprowadzić całą procedurę *conjoint analysis* z wykorzystaniem programu R.

W artykule przedstawiono, wykorzystującą mikrodane, metodę badania preferencji wyrażonych, tj. *conjoint analysis*, opisano pokrótce pakiet conjoint programu R oraz zaprezentowano badanie konsumentów wina, które zostało przeprowadzone z wykorzystaniem pakietu conjoint.

2. MIKROEKONOMETRIA I MIKRODANE

Pojęcie preferencji wykorzystywane jest w celu kwantyfikacji użyteczności, której nie można bezpośrednio zmierzyć. Teorie użyteczności mieszczą się w obrębie mikroekonomii, natomiast metody badania preferencji są narzędziem badawczym mikroekonometrii. Termin „mikroekonometria” pojawia się w literaturze ekonometrycznej od połowy lat osiemdziesiątych XX w. i jest odpowiedzią na potrzebę wyodrębnienia tej części ekonometrii, która obejmuje metody wykorzystywania mikrodanych w analizie zagadnień ekonomicznych (por. np. Gruszczyński, 2010, s. 16).

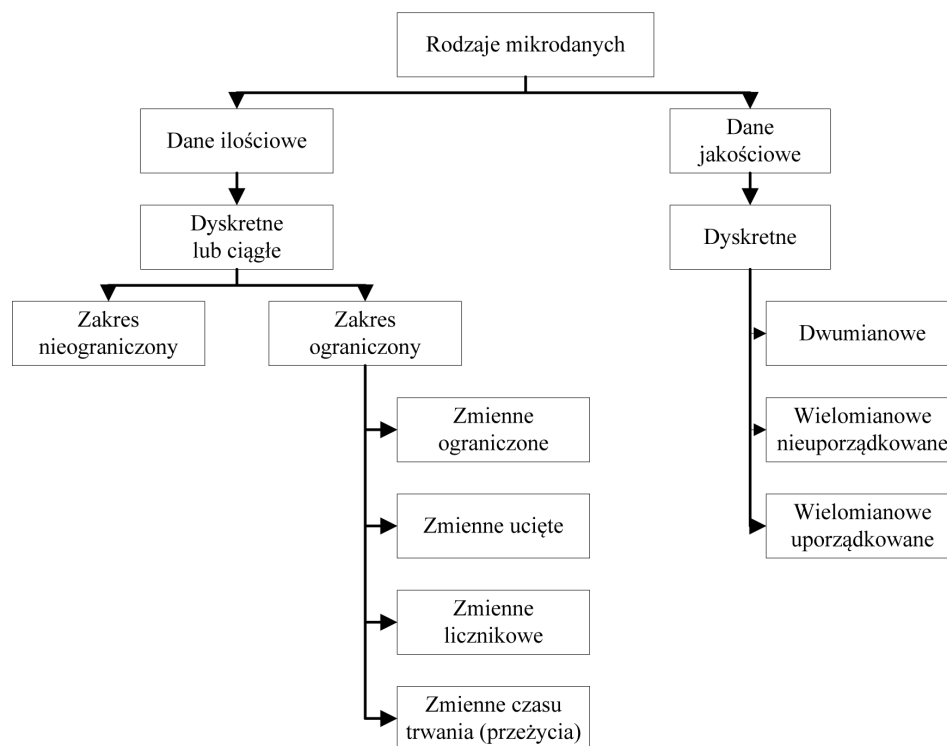
Mikroekonometria wyróżnia się kilkoma cechami (Gatnar, Walesiak, 2011, s. 112-113):

- badanie zachowań ekonomicznych jednostek,
- analiza mikrodanych na poziomie indywidualnym,
- mikrodane wykorzystywane w analizie to dane szczegółowe,
- możliwość zaobserwowania zjawisk lub zdarzeń, które są niewidoczne w danych zagregowanych (np. metody stosowane do pomiaru preferencji umożliwiają „wydobycie” ukrytych w mikrodanych informacji),
- nieliniowy rozkład obserwacji,
- wykorzystywanie nieliniowych modeli i metod estymacji parametrów,
- niejednorodność obserwacji (niejednorodność badanych jednostek),
- masowość mikrodanych,
- przekrojowy charakter mikrodanych.

Mikrodane to zbiór danych liczbowych o pojedynczych jednostkach (por. Gruszczyński, 2010, s. 13). Mikrodane są podstawą modelowania w mikroekonometrii i można klasyfikować je na różne sposoby. Jedną z możliwych klasyfikacji mikrodanych przedstawia rys. 1.

Podstawą klasyfikacji mikrodanych jest model, który objaśnia zmienną o określonej postaci (tab. 1) (Gruszczyński, 2010, s. 17-18).

² Pakiet ten opracowano w Katedrze Ekonometrii i Informatyki Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu pod kierownictwem dr hab. Andrzeja Bąka, prof. UE.



Rysunek 1. Rodzaje mikrodanych

Źródło: Gruszczyński (2010, s. 15).

Tabela 1.

Systematyka modeli zmiennych jakościowych i ograniczonych

1. Modele dwumianowe	2. Modele wielomianowe
Liniowy model prawdopodobieństwa (LMP) Probitowy Logitowy Logarytmiczno-logitowy Gompitowy (krzywej Gomperta) Komplementarny log-log Burritowy (rozkładu Burra) Ucięty LMP Krzywej Urbana	Modele kategorii uporządkowanych Uporządkowany model logitowy i probitowy Uogólniony model uporządkowany Modele danych sekwencyjnych Modele kategorii nieuporządkowanych Wielomianowy model logitowy i probitowy Warunkowy model logitowy (McFadden) Zagnieżdżony model logitowy Mieszany model logitowy
3. Modele zmiennych ograniczonych	4. Modele licznikowe i czasu trwania
Regresja ucięta Modele tobitowe (klasyczne) Dwugraniczny model tobitowy Model doboru próby (Heckman) Modele efektów oddziaływania	Regresja Poissonowska Model rozkładu ujemnego dwumianowego Model czasu trwania Model licznikowy ucięty Model płotkowy

Źródło: Gruszczyński (2010, s. 18).

W najszerszym ujęciu model mikroekonometryczny to model typu regresyjnego oparty na mikrodanych.

Należałoby wspomnieć, że za ważniejszych przedstawicieli mikroekonometrii uważa się laureatów Nagrody im. Alfreda Nobla z dziedziny ekonomii w roku 2000: Jamesa Heckmana i Daniela MacFaddena. Jamesa Heckman został wyróżniony nagrodą za: „rozwój teorii i metod analizy prób selektywnych”, natomiast MacFadden za: „rozwój teorii i metod analizy wyboru dyskretnego”.

3. CONJOINT ANALYSIS

Conjoint analysis to zespół numerycznych metod analizy danych dotyczących preferencji, które są oparte na założeniach wynikających z teorii pomiaru łącznego (addytywnego pomiaru łącznego – *conjoint measurement*) (zob. Bąk, 2003, s. 214).

Zgodnie z terminologią stosowaną w literaturze przedmiotu zmienne objaśniające opisujące dobra lub usługi nazywa się atrybutami (*attributes*)³ lub czynnikami (*factors*), natomiast ich realizacje są nazywane poziomami (*levels*)⁴. Atrybuty i ich poziomy generują różne warianty dóbr lub usług, nazywane profilami (*profiles*, *stimuli*, *treatments*, *runs*). Liczba wszystkich możliwych do wygenerowania profili zależy od liczby atrybutów i liczby poziomów (jest to iloczyn liczby poziomów wszystkich atrybutów).

Respondenci oceniają profile produktów lub usług, wyrażając w ten sposób swoje preferencje. Oceny profili są nazywane użytecznościami całkowitymi i stanowią podstawę dalszej analizy, która polega na dekompozycji użyteczności całkowitych profili na użyteczności częściowe poziomów atrybutów oraz na oszacowaniu udziałów poszczególnych atrybutów w kształtowaniu użyteczności całkowitej każdego profilu (zob. Green, Wind, 1975).

Następnym krokiem jest dekompozycja całkowitych preferencji i obliczenie udziału każdej ze zmiennej objaśniającej w oszacowanej całkowitej wartości użyteczności obiektu (zob. Walesiak, Bąk, 2000, s. 14). Uzyskujemy oszacowane użyteczności częściowe, związane z poziomami atrybutów w postaci macierzy (Bąk, 2000, s. 217).

W badaniu preferencji z wykorzystaniem *conjoint analysis* stosuje się najczęściej dwa sposoby pomiaru preferencji respondentów (Bąk, 2002, s. 394):

- porządkowanie obiektów w kolejności od najbardziej do najmniej satysfakcjonującego bądź też odwrotnie (ranking, na skali porządkowej);
- ocenę względnej atrakcyjności przedstawionych obiektów (na skali pozycyjnej).

Poszczególne etapy i kroki procedury *conjoint analysis* przedstawia tab. 2.

³ Termin atrybut jest używany w statystyce w odniesieniu do zmiennych niemetrycznych, najczęściej nominalnych (zob. Kendall i Buckland, 1986, s. 13).

⁴ Terminy te są stosowane w statystycznym planowaniu doświadczeń. Układy doświadczeń odgrywają w metodach dekompozycyjnych bardzo ważną rolę i stanowią jeden z najważniejszych etapów procedury badawczej realizowanej za pomocą *conjoint analysis*.

Tabela 2.

Etap i kroki procedury *conjoint analysis*

Lp.	Etap procedury	Krok procedury
1	Specyfikacja zadania badawczego	◦ zmienna objaśniana ◦ zmienne objaśniające (atrybuty)
2	Określenie postaci modelu	◦ model zależności zmiennych objaśniających (efektów głównych lub z interakcjami) ◦ model preferencji (liniowy, kwadratowy, użyteczności cząstkowych)
3	Gromadzenie danych	◦ metody gromadzenia danych (pełne profile, porównywanie profilów parami, prezentacja par atrybutów, dane symulacyjne) ◦ metody generowania profilów (układy czynnikowe, próba losowa)
4	Prezentacja profilów	◦ forma prezentacji (opis słowny, rysunek, model, produkt fizyczny) ◦ forma badań (wywiad bezpośredni, poczta, telefon, komputer, Internet)
5	Wybór skali pomiaru preferencji	◦ skale niemetryczne (nominalna, porządkowa) ◦ skale metryczne (przedziałowa, ilorazowa)
6	Estymacja modelu	◦ modele niemetryczne (MONANOVA, PREFMAP) ◦ modele metryczne (MNK) ◦ modele probabilistyczne (LOGIT, PROBIT)
7	Analiza i interpretacja wyników	◦ analiza preferencji (ocena ważności atrybutów) ◦ symulacja udziałów w rynku ◦ segmentacja

Źródło: Walesiak, Gatnar (2009, s. 292).

Do zalet metod *conjoint analysis* należą (por. *Understanding Conjoint Analysis*, 1997, s. 6-7):

- możliwość wyboru skali pomiaru preferencji,
- w miarę proste projektowanie eksperymentu czynnikowego,
- możliwość oszacowania użyteczności na poziomie indywidualnym respondenta,
- oszacowane użyteczności na poziomie indywidualnym pozwalają na łatwiejsze przeprowadzenie segmentacji rynku.

Wady tychże metod to przede wszystkim (Hair i in., 1995, s. 572):

- ograniczona liczba atrybutów wykorzystywanych w badaniu,
- sposoby oceny profilów są dalekie od rzeczywistych wyborów rynkowych konsumenta (porządkowanie obiektów w kolejności od najbardziej do najmniej satysfakcjonującego bądź też odwrotnie lub ocenę względnej atrakcyjności przedstawionych obiektów),
- nie zawsze istnieje możliwość wykorzystania częściowego eksperymentu czynnikowego,
- nie zawsze możliwa jest łączna ocena wszystkich atrybutów jednocześnie (w przypadku metod opartych na macierzach kompromisów).

Metody *conjoint analysis* nie są precyzyjnie zdefiniowaną metodą badań, ale złożoną procedurą badawczą, która pozwala na wybór różnorodnych ścieżek analizy danych. Nie można jednak wskazać wyborów optymalnych. Niektóre z możliwości mogą zależeć

od doświadczenia badacza, intuicji, posiadanego oprogramowania komputerowego bądź funduszy.

Szerzej metodę *conjoint analysis* prezentują m.in. prace Bąka (2000, 2002, 2003, 2004b), Bąka oraz Bartłomowicza (2011), Rybickiej i Pełki (2009), Walesiaka i Bąka (2000), Zweriny (1997).

4. PAKIET CONJOINT PROGRAMU R⁵

Pakiet conjoint, opracowany w Katedrze Ekonometrii i Informatyki Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu pod kierownictwem prof. UE dr hab. Andrzeja Bąka, jest odpowiedzią na fakt, że nie wszystkie kroki procedury *conjoint analysis* znalazły swe odzwierciedlenie w programie R. W szczególności dotyczy to oceny ważności atrybutów oraz symulacji udziałów w rynku na etapie analizy i interpretacji wyników. Pakiet conjoint stanowi implementację dobrze znanej, klasycznej metody *conjoint analysis*. Pakiet ten w wersji zawiera 12 funkcji pogrupowanych w 5 kategorii (zob. tab. 3).

Tabela 3.

Etapy procedury *conjoint analysis* w programie R

Etapy procedury	Krok procedury	Wybrane pakiety i funkcje programu R
Gromadzenie danych	– dane symulacyjne	Pakiet base (funkcja <code>sample</code>) Pakiet stats (funkcja <code>runif</code>)
	– układy czynnikowe	Pakiet AlgDesign (funkcje: <code>gen.factorial</code> , <code>optFederov</code>)
	– próba losowa	Pakiet polCA (funkcja <code>polCA.simdata</code>)
Estymacja modelu	– model metryczny – MNK	Pakiet conjoint (funkcje: <code>caModel</code> , <code>caPartUtilities</code> , <code>caTotalUtilities</code>) Pakiet stats (funkcja <code>contrasts</code> , <code>lm</code>) Pakiet base (funkcja <code>factor</code>)
Analiza i interpretacja wyników	– ocena ważności atrybutów	Pakiet conjoint (funkcje: <code>caImportance</code> , <code>caUtility</code>)
	– symulacja udziałów w rynku	Pakiet conjoint (funkcje: <code>caBTL</code> , <code>caLogit</code> , <code>caMaxUtility</code> , <code>ShowAllSimulations</code>)
	– segmentacja	Pakiet conjoint (funkcja <code>caSegmentation</code>) Pakiet stats (funkcja <code>kmeans</code>)
	– wykresy ważności atrybutów i ich poziomów	Pakiet conjoint (funkcje: <code>Conjoint</code> , <code>caUtilities</code> , <code>ShowAllUtilities</code>) Pakiet graphics (funkcje: <code>barplot</code> , <code>title</code>)

Źródło: Bąk, Bartłomowicz (2011, s. 97).

⁵ Opracowano na podstawie prac Bąka i Bartłomowicza (2011, s. 96-100) oraz Rybickiej i Pełki (2009).

Funkcje pakietu *conjoint*⁶ umożliwiają: oszacowanie parametrów oraz segmentację respondentów, szacowanie użyteczności częściowych oraz teoretycznych użyteczności całkowitych, pomiar ważności atrybutów oraz szacowanie udziału w rynku profilów symulacyjnych. Inną kategorią funkcji są te umożliwiające uzyskanie zbiorczych wyników wybranych pomiarów.

Pakiet *conjoint* pozwala w szczególności estymować model w zakresie szacowania użyteczności częściowych na poziomie indywidualnym oraz zagregowanym. Standardowa funkcja programu R – *lm()* szacuje parametry modelu regresji na podstawie obserwacji zmiennej objaśnianej i zmiennych objaśniających. Natomiast w analizie *conjoint* parametry są szacowane na poziomie indywidualnym oraz parametry jednego modelu na poziomie zagregowanym. Dodatkowo pakiet ten pozwala na estymację użyteczności całkowitych profilów w przekroju respondentów, które mogą być wykorzystane w celu segmentacji respondentów. Inną cechą tego pakietu jest możliwość analizowania i interpretacji wyników w zakresie oceny istotności atrybutów oraz udziałów poszczególnych poziomów w ocenie całkowitej profilów. Pakiet ten pozwala także analizować i interpretować wyniki w zakresie analizy symulacyjnej udziałów w rynku profilów, które nie były uwzględniane w badaniu.

5. POMIAR I ANALIZA PREFERENCJI KONSUMENTÓW WINA

W okresie od marca 2011 do października 2011 roku przeprowadzono badanie dotyczące preferencji konsumentów wina z wykorzystaniem kwestionariusza ankiety. Łącznie zebrano 707 prawidłowo wypełnionych ankiet.

Próbę badawczą dobrano według wygody (w sposób przypadkowy). Dobór taki, co prawda, nie pozwala na weryfikację hipotez statystycznych, ale pozwala w pewnym, choć ograniczonym stopniu, poznać preferencje konsumentów wina (zob. Szreder, 2004, s. 48-50).

W ankiecie respondenci oceniali 17 profilów wina scharakteryzowanych trzema atrybutami: barwa wina, zawartość cukru i pochodzenie (kraj lub miejsce pochodzenia). Każda ze zmiennych przyjmuje określone poziomy (atrybuty):

- a) barwa wina – białe, czerwone, różowe,
- b) zawartość cukru – słodkie, półsłodkie, półwytrawne, wytrawne,
- c) pochodzenie – Francja, Włochy, Mołdawia, Grecja, Kalifornia (USA).

Różne kombinacje tych poziomów atrybutów pozwalają uzyskać łącznie 60 różnych profilów – jest to pełny układ czynnikowy. Z uwagi na fakt, że ocena takiej liczby profilów byłaby zadaniem trudnym dla respondenta w badaniu wykorzystano częściowy układ czynnikowy otrzymany z zastosowaniem funkcji *gen.factorial* z pakietu *AlgDesign*. W efekcie otrzymano 17 profilów (zob. tab. 4).

⁶ Pakiet *conjoint* można pobrać bezpłatnie ze strony internetowej: <http://keii.ue.wroc.pl/conjoint> lub ze stron internetowych CRAN (www.r-project.org).

Tabela 4.

Profile oceniane przez respondentów

Numer profilu	Barwa wina	Zawartość cukru	Pochodzenie
1	białe	półwytrawne	Francja
2	czerwone	słodkie	Francja
3	różowe	słodkie	Francja
4	czerwone	wytrawne	Włochy
5	różowe	półwytrawne	Włochy
6	czerwone	półsłodkie	Włochy
7	białe	słodkie	Włochy
8	białe	wytrawne	Mołdawia
9	różowe	półwytrawne	Mołdawia
10	czerwone	słodkie	Mołdawia
11	różowe	wytrawne	Grecja
12	czerwone	półwytrawne	Grecja
13	białe	półsłodkie	Grecja
14	czerwone	wytrawne	Kalifornia (USA)
15	białe	półwytrawne	Kalifornia (USA)
16	różowe	półsłodkie	Kalifornia (USA)
17	czerwone	słodkie	Kalifornia (USA)

Źródło: opracowanie własne.

Respondenci oceniali prezentowane im profile w skali 0 – najmniej preferuję do 10 – najbardziej preferuję, zgodnie z własnymi odczuciami.

Znajomość ocen respondentów (użyteczności całkowitych) pozwala na oszacowanie użyteczności częściowych, które określają względne znaczenie, jakie mają poszczególne poziomy atrybutów w użyteczności całkowitej. Użyteczności częściowe są szacowane w wyniku dekompozycji empirycznych użyteczności całkowitych. W tym celu szacuje się parametry modelu regresji, w którym zmienną objaśnianą jest użyteczność całkowita przypisana przez respondenta poszczególnym profilom w badaniu. W badaniu preferencji konsumentów wina wykorzystano jedynie model efektów głównych *conjoint analysis*.

Do oszacowania użyteczności częściowych wykorzystano funkcję `caPartUtilities()` z pakietu `conjoint`. Fragment wyników dla czterech respondentów przedstawia się następująco:

```
>caPartUtilities(prefmatrix, profile, levels)
```

	intercept	białe	czerwone	różowe	słodkie	półsłodkie	
[1,]	2,705	0,266	0,269	-0,534	5,331	-1,547	
[2,]	4,599	0,062	-1,524	1,462	-0,678	1,71	
[3,]	3,211	0,834	-0,068	-0,766	3,335	1,174	
[4,]	4,22	0,513	0,774	-1,287	2,699	-0,504	
	półwytrawne	wytrawne	Francja	Włochy	Mołdawia	Grecja	Kalifornia
[1,]	-1,851	-1,932	-0,641	0,978	-0,887	0,072	0,478
[2,]	0,697	-1,729	0,955	-0,217	-0,028	-0,491	-0,217
[3,]	-3,225	-1,284	-0,359	1,056	-1,486	0,234	0,556
[4,]	-0,665	-1,53	-1,464	0,086	0,612	0,68	0,086

Uzyskane wyniki oznaczają, że według respondenta 1 najważniejszymi kryteriami (poziomymi atrybutów) decydującymi o wyborze tego, a nie innego wina są: wino białe lub czerwone, najchętniej słodkie, pochodzące z Włoch (ewentualnie z Kalifornii lub ostatecznie z Grecji).

Oszacowanie parametrów modelu w przekroju całej zbiorowości respondentów przeprowadzić można za pomocą funkcji `Conjoint()` pakietu `conjoint`:

```
>Conjoint(preferencje, profile, poziomy)
```

```
[1] Part worths (utilities) of levels (model parameters for whole sample):
```

	levnms	utls
1	intercept	3,9498
2	białe	0,1148
3	czerwone	0,1724
4	różowe	-0,2872
5	słodkie	0,6728
6	półsłodkie	0,6278
7	półwytrawne	-0,3753
8	wytrawne	-0,9254
9	Francja	0,2307
10	Włochy	0,1276
11	Mołdawia	-0,2799
12	Grecja	-0,0155
13	Kalifornia	-0,063

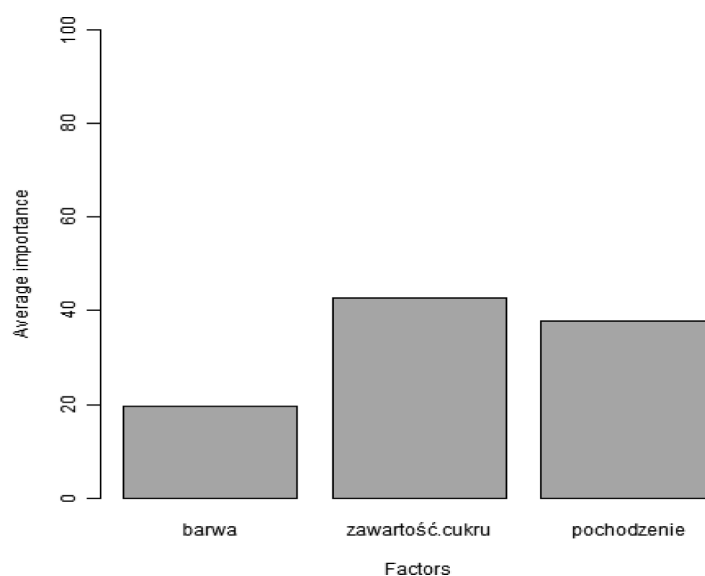
```
[1] Average importance of factors (attributes):
```

```
[1] 19,53 42,68 37,79
```

[1] Sum of average importance: 100

[1] Chart of average factors importance

Analizując wyniki na poziomie zagregowanym można wskazać, że najbardziej preferowane jest wino czerwone, słodkie pochodzące z Francji. Wykres przeciętnej ważności poszczególnych atrybutów w przekroju wszystkich respondentów przedstawia rys. 2.



Rysunek 2. Wykres przeciętnej ważności poszczególnych atrybutów dla respondentów

źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem pakietu conjoint programu R.

Najważniejszym atrybutem decydującym o wyborze wina jest zawartość cukru (42,68%), następnie pochodzenie wina (37,79%) a na końcu jego barwa (19,53%)

Na potrzeby badania przygotowano pięć profili symulacyjnych, które nie były oceniane przez respondentów (zob. tab. 5).

Tabela 5.

Profile symulacyjne

Lp.	Barwa wina	Zawartość cukru	Pochodzenie
1	białe	słodkie	Grecja
2	różowe	półwytrawne	Francja
3	różowe	wytrawne	Włochy
4	białe	wytrawne	Kalifornia (USA)
5	białe	słodkie	Mołdawia

Źródło: opracowanie własne.

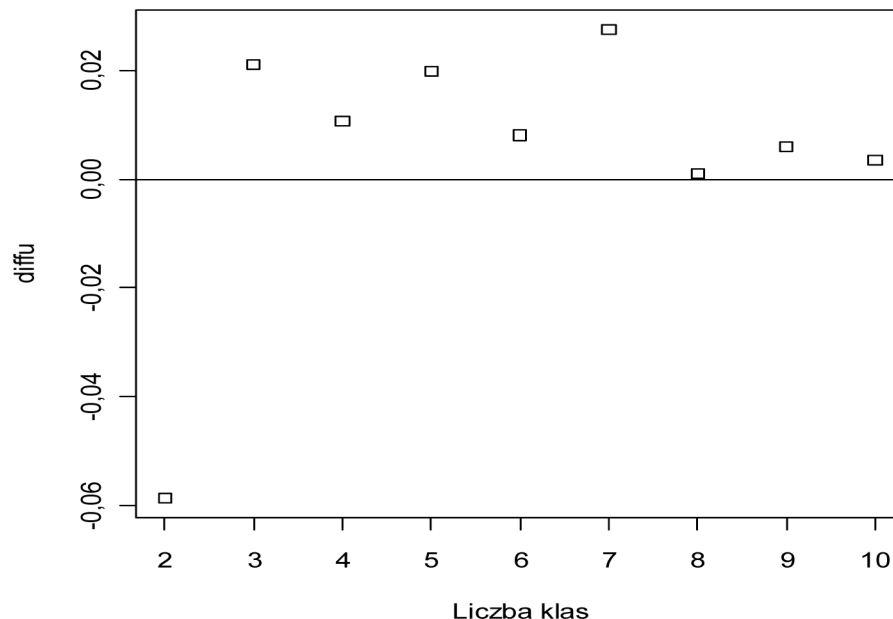
Następnie z wykorzystaniem funkcji `ShowAllSimulations()` pakietu `conjoint` obliczono udziały w rynku profilów symulacyjnych:

```
>ShowAllSimulations(sim, y, x)
```

	TotalUtility	MaxUtility	BTLmodel	LogitModel
1	4,72	26,45	22,29	25,65
2	3,98	21,07	19,17	17,56
3	4,42	21,50	21,69	22,75
4	3,08	13,58	15,67	12,98
5	4,46	17,40	21,19	21,07

Najwyższy udział w rynku ma profil 1 – wino białe, słodkie pochodzące z Grecji, nieco niższy udział w rynku ma profil 3 (według modelu maksymalnej użyteczności, modelu BTL i logitowego) – wino różowe, półwytrawne pochodzące z Francji.

Ostatnim krokiem w analizie *conjoint* jest segmentacja. W tym celu przygotowano skrypt w programie R obliczający podział zbioru danych od 2 do 10 klas z wykorzystaniem metody klasyfikacji *k-medoidów*. Do wyboru liczby klas wykorzystano indeks *gap* (zob. rys. 3) oprogramowany w pakiecie `clusterSim` (zob. Gatnar, Walesiak, 2004, s. 418).



Rysunek 3. Wykres wartości indeksu *gap* dla różnej liczby klas

Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem programu R.

Na podstawie analizy wykresu (por. rys. 3) i wartości *diffu* okazało się, że minimalna liczba klas dla której $\text{diffu} \geq 0$ wynosi 3 dla $\text{diffu} = 0,006$. Oznacza to, że zbiór danych należy podzielić na trzy klasy.

Następnie z wykorzystaniem funkcji `replication.Mod()` z pakietu `clusterSim` obliczono skorygowany indeks Randa wykorzystując 20 symulacji. Skorygowany indeks Randa wyniósł 0,5897614. Oznacza to, że mamy do czynienia z relatywnie stabilnym podziałem 707 respondentów na trzy klasy. Charakterystyki klas względem zmiennych są następujące:

- a) klasa 1 jest to klasa relatywnie najbardziej jednorodna (biorąc pod uwagę odchylenia standardowe wszystkich zmiennych). W klasie tej znaleźli się respondenci którzy najbardziej preferują wina zarówno białe, czerwone jak i różowe, słodkie i półsłodkie pochodzące z Francji, Włoch, Mołdawii lub Kalifornii (profile 2, 3, 6, 7, 10, 17 z tab. 4).

Respondenci z tej klasy najmniej preferują wina wytrawne i półwytrawne, białe i czerwone, pochodzące z Francji, Włoch, Mołdawii oraz Grecji (profile 1, 4, 8, 11, 14 z tab. 4).

- b) klasa 2 – jest to klasa względnie najmniej jednorodna (biorąc pod uwagę odchylenia standardowe wszystkich zmiennych). Respondenci z tej klasy preferują generalnie wina pół wytrawne, wytrawne oraz półsłodkie, zarówno białe, czerwone jak i różowe, pochodzące z Francji, Włoch, Mołdawii, Grecji oraz Kalifornii (profile 1, 4, 5, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16 z tab. 2).
- c) klasa 3 – to klasa względnie jednorodna, jeżeli weźmiemy pod uwagę jedynie profile 3 i 9. Respondenci z tej klasy najczęściej wskazywali odpowiedzi wskazujące o niewielkich preferencjach w stosunku do prezentowanych profilów. Respondenci z tej klasy najniżej oceniali zarówno wina półsłodkie, słodkie i półwytrawne, zarówno białe, jak i czerwone i różowe, pochodzące z Francji, Włoch, Mołdawii, Grecji i Kalifornii.

6. PODSUMOWANIE

W przedstawionym przykładzie empirycznym dokonano analizy preferencji 707 konsumentów wina. Najważniejszym atrybutem decydującym o zakupie win okazała się zawartość cukru. Z tego też poniekąd wynika fakt, że najbardziej preferowane są wina słodkie. Potwierdza to także udział w rynku profilów symulacyjnych oraz charakterystyka wyodrębnionych trzech klas.

Pakiet *conjoint* programu R pozwala na przygotowanie i przeprowadzenie badań preferencji konsumentów z zastosowaniem metody *conjoint analysis*. Pakiet ten jest nowym pakietem dostępnym dla programu R. Zaprojektowany został z myślą o statystykach, ekonometrykach, ekonomistach oraz studentach kierunków ekonomicznych. Zawarte są w nim funkcje pozwalające szacowanie użyteczności, oszacowanie ważności atrybutów, oszacowanie udziałów rynkowych nowych profilów (które nie brały udziału w badaniu). Dodatkowo istnieje możliwość przygotowania wielu modyfikacji tego pakietu, które poszerzą możliwości zastosowania tego pakietu – np. jest możliwe uwzględnienie interakcji dowolnego rzędu.

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

LITERATURA

- [1] Bąk A., (2000), *Możliwości wykorzystania alternatywnych algorytmów conjoint analysis w badaniach marketingowych*, [w:] „Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania”, Taksonomia, Zeszyt 7, Sekcja Klasyfikacji i Analizy Danych PTS, Prace Naukowe nr 874 Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, 217-226.
- [2] Bąk A., (2002), *Pomiar preferencji metodą conjoint analysis opartą na wyborach*, [w:] Jajuga K., Walesiak M. (red.) Taksonomia 9 – Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania. Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 942, 386-399.
- [3] Bąk A., (2003), *Algorytmy conjoint analysis w pakiecie statystycznym SAS/STAT*. [w:] Jajuga K., Walesiak M. (red.) Taksonomia 10 – Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania. Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 988, 211-221.
- [4] Bąk A., (2004a), *Metody dyskretnych wyborów w badaniach zachowań konsumentów*, [w:] Dziechciarz J. (red.) Ekonometria nr 13 – Zastosowania metod ilościowych, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu Nr 1010, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław, 150-163.
- [5] Bąk A., (2004b), *Dekompozycyjne metody pomiaru preferencji w badaniach marketingowych*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1013 z serii Monografie i Opracowania nr 157, Wydawnictwo AE we Wrocławiu, Wrocław.
- [6] Bąk A., Bartłomowicz T., (2011), *Implementacja klasycznej metody conjoint analysis w pakiecie conjoint programu R*, Prace Naukowe UE we Wrocławiu nr 176, 94-104.
- [7] Gatnar E., Walesiak M., (red.) (2004), *Metody statystycznej analizy wielowymiarowej w badaniach marketingowych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław.
- [8] Gatnar E., Walesiak M., (red.) (2011), *Analiza danych jakościowych i symbolicznych z wykorzystaniem programu R*, C.H. Beck, Warszawa.
- [9] Green P.E., Wind Y., (1975), *New way to measure consumers' judgments*, „Harvard Business Review”, July-August, 53, 107-117.
- [10] Gruszczyński M., (red.) (2010), *Mikroekonometria. Modele i metody analizy danych indywidualnych*. Wolters Kluwer Polska Sp. z o.o., Warszawa.
- [11] Hair J.F., Anderson R.E., Tatham R.L., Blach W.C., (1995), *Multivariate Data Analysis with Readings*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- [12] Rybicka A., Pełka M., (2009), *Analiza i interpretacja wyników conjoint analysis*, Prace Naukowe UE we Wrocławiu nr 86, 185-193.
- [13] Szreder M., (2004), *Metody i techniki sondażowych badań opinii*, PWE, Warszawa.
- [14] *Understanding Conjoint Analysis* (1997), *A Review of Conjoint Analysis*, Technical Paper from DSS Research, [URL:] www.dssresearch.com/marketresearch/Library/Conjoint/conjoint.asp.
- [15] Walesiak M., Bąk A., (2000), *Conjoint analysis w badaniach marketingowych*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław.
- [16] Walesiak M., Gatnar E., (red.) (2009), *Statystyczna analiza danych z wykorzystaniem programu R*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [17] Zwerina K., (1997), *Discrete Choice Experiments in Marketing*, Physica-Verlag, Heidelberg-New York.

POMIAR I ANALIZA PREFERENCJI WYRAŻONYCH Z WYKORZYSTANIEM PAKIETU
CONJOINT PROGRAMU R

Streszczenie

Conjoint analysis jest metodą statystyczną, w której preferencje empiryczne respondentów wobec różnych ofert (rzeczywistych lub hipotetycznych) są poddawane dekompozycji w celu określenia: funkcji użyteczności każdego atrybutu, względnego znaczenia każdego z nich, analizy udziałów w rynku oraz segmentacji konsumentów.

Na rynku obecnie oferowane są różne oprogramowania komputerowe pozwalające na przeprowadzenie badań preferencji konsumentów z wykorzystaniem metod *conjoint analysis*.

W artykule przedstawiono pakiet *conjoint* programu R oraz opracowane pakiety i funkcje programu R, niezbędne w prowadzeniu empirycznych badań preferencji.

Program R, ze względu na dostępność na zasadach licencji GPL, zdobywa coraz więcej zwolenników, zarówno wśród osób zajmujących się badaniami preferencji, jak i osób korzystających z metod analizy wielowymiarowej.

Natomiast pakiet *conjoint* jest odpowiedzią na fakt, że nie wszystkie kroki procedury *conjoint analysis* znalazły swe odzwierciedlenie w programie R. W szczególności dotyczy to oceny ważności atrybutów oraz symulacji udziałów w rynku na etapie analizy i interpretacji wyników.

W artykule przedstawiono również wyniki badania preferencji konsumentów wina z wykorzystaniem pakietu *conjoint*, analizę udziałów w rynku wybranych profili symulacyjnych oraz segmentację konsumentów wina.

Słowa kluczowe: pomiar i analiza preferencji, *conjoint analysis*, program R

THE EVALUATION AND ANALYSIS OF REVEALED PREFERENCES WITH APPLICATION OF R
PACKAGE CONJOINT

Abstract

Conjoint analysis is a statistical method in which consumer preferences are decomposed in order to evaluate: utility function for each attribute, importance of each attribute, market shares simulations and segmentation of consumers.

There are many different computer programs that can be applied for *conjoint analysis* research.

The paper presents *conjoint* package of R software which are useful to evaluate empirical preferences. The R program is more and more popular and many researchers are applying it.

The *conjoint* package of R software is a response to a fact, that not all steps of *conjoint analysis* were programmed in R. In particular it concerns evaluation of attributes' importance, market share simulations and interpretation of results.

The article presents also results of the evaluation of wine consumers' preferences with application of *conjoint* package, market share simulations and segmentation of consumers.

Key words: evaluation and analysis of preference, *conjoint analysis*, R software

PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LIX – ZESZYT 3 – 2012

POLSCY STATYSTYCY I MATEMATYCY

DOKTORAT HONOROWY
Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie
dla
Profesora Krzysztofa Jajugi



Prof. dr hab. Krzysztof Jajuga, doktor honoris causa Uniwersytetu Ekonomicznego
w Krakowie

W dniu 28 czerwca 2012 roku na Uniwersytecie Ekonomicznym w Krakowie odbyła się uroczystość nadania tytułu Doktora *Honoris Causa* Prof. dr hab. Krzysztofowi Jajudze z Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu. Uroczystość zgromadziła członków Senatu i Rad Wydziałów Uniwersytetu Ekonomicznego oraz bardzo liczne grono zaproszonych gości, przyjaciół i rodzinę Profesora.

Na wstępie uroczystości J. M. Rektor Prof. dr hab. Roman Niestrój powitał wszystkich obecnych w Starej Auli Uniwersytetu. Dziekan Wydziału Zarządzania Prof. UEK dr hab. Paweł Lula przedstawił przebieg procedury nadania tego zaszczytnego tytułu. Z wnioskiem o nadanie Prof. K. Jajudze tytułu dr *honoris causa* wystąpiła Rada Wydziału Zarządzania. Po wstępnej akceptacji tego wniosku przez Senat, Rada Wydziału Zarządzania powołała promotora w osobie Prof. dr hab. Józefa Pociechy oraz dwóch recenzentów: Prof. dr hab. Andrzeja S. Barczaka z Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach oraz Prof. dr hab. Waldemara Frąckowiaka z Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu. Obaj recenzenci przygotowali wysoce pozytywne recenzje i na tej podstawie Senat Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie podjął w dniu 12 marca 2012 r. Uchwałę w sprawie nadania Profesorowi Krzysztofowi Jajudze tytułu doktora *honoris causa* Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie.

W uchwale tej czytamy: „Senat Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie postanawia nadać Profesorowi Krzysztofowi Jajudze tytuł doktora *honoris causa* Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie i zatwierdza sentencję do dyplomu o następującej treści: Za osiągnięcia naukowe w dziedzinie metod klasyfikacji i analizy danych, w szczególności dotyczących procesów finansowych oraz za wkład w rozwój kadr naukowych na polskich uczelniach ekonomicznych”.

W dalszej części uroczystości Profesor Józef Pociecha przedstawił laudację promotorską, której obszernie fragmenty w tym miejscu zamieszczamy.

„Wysoki Senacie, Wysokie Rady Wydziałów, Szanowny Doktorancie, Szanowni Goście!

Jest dla mnie wielkim zaszczytem powołanie przez Radę Wydziału Zarządzania na funkcję promotora w przewodzie przeprowadzonym w celu nadania doktoratu honorowego wybitnemu polskiemu uczonemu, przyjacielowi naszej Uczelni, jakim jest Prof. dr hab. Krzysztof Jajuga. Profesor Jajuga jest nam wszystkim dobrze znany, pozwólcie Państwo jednak, że w tym miejscu przybliżę nieco sylwetkę naukową i dokonania Profesora.

Droga i sukcesy naukowe Krzysztofa Jajugi związane są z wrocławską Akademią Ekonomiczną. Tam w roku 1979 ukończył studia na kierunku cybernetyki ekonomicznej i informatyki i rozpoczął pracę zawodową w Zakładzie Ekonometrii na Wydziale Zarządzania i Informatyki. Tam w listopadzie 1982 roku uzyskał stopień naukowy doktora nauk ekonomicznych po obronie pracy pt. „Metody analizy wielowymiarowej w ilościowych badaniach przestrzennych”, tam w roku 1987 uzyskał stopień doktora habilitowanego nauk ekonomicznych, na podstawie pracy pt. „Statystyka ekonomicznych zjawisk złożonych – wykrywanie i analiza niejednorodnych rozkładów wielowymiarowych”. W czerwcu 1992 roku, w wieku 36 lat Krzysztof Jajuga, jako jeden

z najmłodszych naukowców w historii nauk ekonomicznych, otrzymał tytuł profesora nauk ekonomicznych.

Profesor Krzysztof Jajuga jest wybitnym członkiem wrocławskiej szkoły metod ilościowych, zbudowanej wieloletnią pracą naukową i organizacyjną Profesora Zdzisława Hellwiga, doktora *honoris causa* naszej uczelni. Jest zaś bezpośrednim uczniem Pani Profesor Stanisławy Bartosiewicz, która była promotorem jego pracy doktorskiej.

Osiągnięcia naukowo-badawcze Profesora Krzysztofa Jajugi koncentrują się wokół dwóch, zbliżonych w sensie metodologicznym do siebie, obszarów badawczych:

- statystyczna i ekonometryczna analiza danych wielowymiarowych,
- zastosowanie metod matematycznych w finansach, a przede wszystkim w analizie rynków finansowych i zarządzaniu ryzykiem.

Prace naukowe z zakresu pierwszego z wymienionych obszarów zainteresowań powstały przede wszystkim w okresie lat 1979–1995, czyli od rozpoczęcia pracy na uczelni do momentu zatrudnienia na stanowisku profesora zwyczajnego. Podstawowe osiągnięcia z tego okresu, to przede wszystkim zastosowanie podejścia rozmytego i stochastycznego w analizie danych oraz klasyfikacja zbiorów danych z punktu widzenia różnych charakterystyk statystycznych. Spośród innych znaczących osiągnięć naukowych należy wymienić uogólnienie metod regresji liniowej i analizy głównych składowych na przypadek niejednorodnych zbiorów obserwacji, systematyzacja metod teorii rozpoznawania obrazów, podanie postaci funkcji gęstości dla rozkładu jednostajnego w hipersferze, podanie metody dekompozycji rozkładu wielomodalnego. Artykuły Krzysztofa Jajugi z tego zakresu ukazały się w renomowanych czasopismach zagranicznych takich jak: *Fuzzy Sets and Systems*, *Computational Statistics and Data Analysis*, *Pattern Recognition Letters*. Owocem badań w tym zakresie – oprócz rozprawy doktorskiej i habilitacyjnej – są dwie monografie; „Statystyczna teoria rozpoznawania obrazów” (1990) i „Statystyczna analiza wielowymiarowa” (1993).

Drugi obszar zainteresowań naukowych, rozwijany przez Profesora Krzysztofa Jajugę od początku lat dziewięćdziesiątych, dotyczy przede wszystkim mechanizmów funkcjonowania rynków finansowych oraz analizy ryzyka finansowego, z zastosowaniem modeli matematycznych i ekonometrycznych. Z tego zakresu Profesor Krzysztof Jajuga jest uznawany za niekwestionowany autorytet nie tylko w Polsce, ale również za granicą. Jest autorem bądź współautorem wielu publikacji naukowych, w tym kilku monografii, z których najbardziej znaczące są: „Inwestycje. Instrumenty finansowe ryzyko finansowe, inżynieria finansowa” (1996), „Inwestycje. Instrumenty finansowe, aktywa niefinansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa” (2006) oraz „Zarządzanie ryzykiem” (2007). Do najważniejszych osiągnięć z tego obszaru należy zaliczyć: kompleksową metodykę w zakresie miar ryzyka rynkowego oraz zastosowanie funkcji połączeń w teorii portfela jak również systematyzację szerokiego zestawu metod matematycznych stosowanych w finansach. Inne znaczące osiągnięcia w tej dziedzinie to: propozycja zastosowań metod klasyfikacji w zagadnieniach finansowych, propozycja zastosowania metod wartości ekstremalnych w teorii portfela, badania w zakresie wie-

lowymiarowych rozkładów wartości ekstremalnych, zaproponowanie ogólnego modelu dynamiki cen finansowych.

Z obu tych dziedzin zainteresowań naukowych Profesor Jajuga opublikował samodzielnie lub we współautorstwie łącznie 410 publikacji w języku polskim i angielskim. Z tego 53 pozycje stanowią książki: 15 monografii naukowych oraz 38 podręczników. Wygłosił 276 referatów w języku polskim lub angielskim, w tym 70 referatów na konferencjach międzynarodowych. Można bez wątpienia powiedzieć, że swoimi publikacjami wywarł znaczący wpływ na rozwój teorii i praktyki badań naukowych w zakresie analizy danych ekonomicznych oraz finansów zarówno w Polsce jak i w skali międzynarodowej.

Aktywność naukowo-badawcza Profesora Jajugi realizowana jest w ścisłej międzynarodowej współpracy naukowej. Już w latach 1981-1982 przebywał na stypendium Fulbrighta w Uniwersytecie Stanforda, potem odbył na tymże uniwersytecie kolejny staż w latach 1988-1989. W roku 1990 wykładał na Temple University (Filadelfia), a w 1997 roku na University of Richmond. Jak widać, drugim źródłem jego rozwoju naukowego, oprócz polskiego dorobku naukowego w dziedzinie metod analizy i klasyfikacji danych, jest nauka amerykańska. W ostatnich latach przebywał z wykładami gościnnymi w wielu krajach, takich jak: Belgia, Chiny, Francja, Holandia, Irlandia, Niemcy, Szwecja, Wielka Brytania.

Osiągnięcie w krótkim czasie Jego kariery naukowej pozycji samodzielnego pracownika nauki owocuje zasługami w zakresie kształcenia kadr naukowych. Profesor Jajuga wypromował 28 doktorów, wykonał 73 recenzje prac doktorskich, 104 recenzje rozpraw i dorobku naukowego w przewodach habilitacyjnych, 7 recenzji w postępowaniu o nadanie tytułu naukowego profesora, 7 recenzji dorobku na stanowisko profesora nadzwyczajnego, 2 recenzje dorobku na stanowisko profesora zwyczajnego. Do tego należy doliczyć 157 recenzji wykonanych dla Centralnej Komisji do Spraw Stopni i Tytułów, recenzje wydawnicze książek i artykułów naukowych. Duża część obecnej kadry naukowej polskich uczelni ekonomicznych i wydziałów ekonomicznych uniwersytetów została wypromowana przy czynnym udziale Profesora Jajugi.

To wczesne rozpoczęcie samodzielnej kariery naukowej umożliwiło Prof. Jajudze realizację powinności organizacyjnych dla swojej macierzystej uczelni oraz polskiego i międzynarodowego środowiska naukowego. W latach 1990-1996 był on kierownikiem Katedry Ekonometrii. W roku 1996 był inicjatorem utworzenia Katedry Inwestycji Finansowych i Zarządzania Ryzykiem, którą do chwili obecnej kieruje. W roku 1999 był inicjatorem utworzenia Instytutu Zarządzania Finansami, gromadzącego wszystkie katedry zajmujące się problematyką finansów na Wydziale Zarządzania, Informatyki i Finansów obecnego Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, instytutem tym kieruje do chwili obecnej. W latach 1993-1999 pełnił funkcję Prorektora do Spraw Rozwoju Uczelni i Współpracy z Zagranicą. Profesor Jajuga jest twórcą i redaktorem naczelnym wydawanego przez UE we Wrocławiu anglojęzycznego czasopisma naukowego „Argumenta Oeconomica”, które jako pierwsze czasopismo z zakresu nauk ekonomicznych wydawane w Polsce wprowadził na prestiżową listę filadelfijską.

Wrocławską Uczelnię Jego pracy organizacyjnej zawdzięcza znaczną część swoich sukcesów naukowych i dydaktycznych ostatnich lat.

Wyrazem uznania polskiego środowiska nauk społeczno-ekonomicznych dla osiągnięć i pozycji naukowej Profesora Jajugi jest Jego wybór do pełnienia wielu funkcji w instytucjach naukowych i organach administracji nauki. Jest on członkiem aż trzech komitetów naukowych Polskiej Akademii Nauk: Komitetu Nauk Ekonomicznych (członek prezydium), Komitetu Nauk o Finansach (członek prezydium), Komitetu Statystyki i Ekonometrii (członek prezydium). Od roku 2000 jest członkiem Centralnej Komisji do Spraw Stopni i Tytułów i od 2007 roku pełni funkcję przewodniczącego Sekcji Nauk Ekonomicznych oraz członka Prezydium CK. Również od roku 2000 pełni funkcje w organach, w których kompetencjach jest podejmowanie decyzji w zakresie finansowania badań naukowych, obecnie jest ekspertem Narodowego Centrum Nauki. Nie sposób wymienić członkostwa i funkcje Profesora w wielu innych instytucjach, organizacjach i radach redakcyjnych czasopism naukowych.

Spośród wielu innych zasług organizacyjnych Profesora na rzecz polskiego środowiska naukowego statystyków wymienię Jego wkład w tworzenie Sekcji Klasyfikacji i Analizy Danych, Polskiego Towarzystwa Statystycznego, której przez szereg lat przewodniczył i którą wprowadził do Międzynarodowej Federacji Towarzystw Klasyfikacyjnych, gdzie w latach 2002-2006 był członkiem zarządu Federacji.

Profesor Krzysztof Jajuga jest oddanym przyjacielem naszej Uczelni. Dla pracowników naszej Uczelni wykonał recenzje 10 prac doktorskich oraz 11 recenzji w przewodach habilitacyjnych oraz szereg recenzji dla CK w postępowaniach habilitacyjnych i postępowaniach o nadanie tytułu profesora nauk ekonomicznych dla pracowników UEK. Był on promotorem nadania uprawnień do nadawania stopnia doktora i doktora habilitowanego dla nowo powstałego Wydziału Finansów. Jego przyjacielska rada przyczynia się do prowadzenia właściwej polityki rozwoju potencjału naukowo-dydaktycznego UEK.

Szanowny Panie Profesorze, Drogi Przyjacielu,

Szczerze gratulujemy Twoich dotychczasowych osiągnięć naukowych. Podziwiamy Twoją pracowitość, aktywność naukową, organizacyjną i dydaktyczną. Dziękujemy za życzliwość względem naszej Uczelni. Życzymy zdrowia i sił w dalszej pracy dla rozwoju nauki polskiej i prawidłowego rozwoju życia naukowego w środowiskach uczelni i wydziałów ekonomicznych. W uznaniu zasług dla rozwoju metod klasyfikacji i analizy danych, w szczególności dotyczących procesów finansowych oraz za wkład w rozwój kadr naukowych na polskich uczelniach ekonomicznych, proszę przyjąć najwyższą godność jaką dysponuje Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, tytuł doktora honoris causa."

Po wygłoszeniu laudacji J. M. Rektor odczytał sentencję dyplomu doktorskiego a następnie wręczył tubę z egzemplarzami dyplomu w języku polskim, angielskim i łacińskim oraz przypiął *epitogium* jako znak godności doktora *honoris causa*. Wręczył też bukiet kwiatów małżonce Profesora, dr Teresie Jajuga.

Po otrzymaniu dyplomu doktorskiego Profesor Jajuga wygłosił bardzo interesujący wykład na temat roli modeli matematycznych w analizie rynków finansowych, przemian tych rynków w ostatnim ćwierćwieczu, taksonomii modeli matematycznych rynków finansowych, ryzyka modelu oraz poszukiwań optymalnego modelu rynku finansowego.

W końcowej części uroczystości zabrał głos Rektor macierzystej Uczelni doktora honorowego Prof. dr hab. Bogusław Fiedor, gratulując Profesorowi tego ważnego wyróżnienia oraz dziękując uczelni krakowskiej za uhonorowanie profesora Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu. Odczytano też najważniejsze listy gratulacyjne, m.in. od Minister Nauki i Szkolnictwa Wyższego Prof. Barbary Kudryckiej.

Po zakończeniu oficjalnego uroczystego posiedzenia Senatu oraz Rad Wydziałów Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, w Sali Senackiej odbył się poczęstunek gości połączony z przyjmowaniem gratulacji i życzeń składanych nowemu doktorowi honorowemu Uniwersytetu.

Józef Pocięcha

KRZYSZTOF JAJUGA

WYKŁAD DOKTORANTA¹

Magnificencjo Rektorze!

Wysoki Senacie!

Dostojni Goście!

Drodzy Przyjaciele, Koleżanki i Koledzy!

Dzień dzisiejszy jest dla mnie szczególny. Tytuł doktora honoris causa jest najwyższą godnością, jaką może otrzymać profesor. To wyróżnienie jest dla mnie tym bardziej zaszczytne, że nadaje je Senat znamienitej i zacnej uczelni, Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, uczelni o wieloletniej historii i wielkich sukcesach. Jest to jednocześnie uczelnia, z której społecznością łączą mnie więzy przyjaźni i współpracy od ponad 30 lat. Chcę wyrazić głęboką wdzięczność Panu Rektorowi i Senatowi za nadawaną mi godność. Szczególne wyrazy wdzięczności kieruję pod adresem Pana Profesora Józefa Pocięchy, Laudatora, który jest inicjatorem przewodu doktorskiego. Serdeczne podziękowania składam Recenzentom, Panu Profesorowi Andrzejowi Barczakowi i Panu Profesorowi Waldemarowi Frąckowiakowi, za tak życzliwe i ciepłe recenzje.

Modele matematyczne na rynkach finansowych – kamień milowy czy narzędzie destrukcji?

Tematyka mojego wykładu wiąże dwa obszary, którym poświęciłem główną część mojego życia naukowego. Te obszary to: modelowanie matematyczne (zwłaszcza ekonometryczne i statystyczne) oraz rynek finansowy. Ostatnie lata, zwłaszcza okres kryzysu finansowego, pokazały, że tematyka ta z naukowego punktu widzenia jest coraz bardziej aktualna, popularna, a jednocześnie w pewnym sensie kontrowersyjna. W moich rozważaniach chcę przedstawić własne spojrzenie na to ważne zagadnienie.

¹ Wykład ten został zamieszczony w publikacji pt. "Nadanie Krzysztofowi Jajudze tytułu doktora honoris causa Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie", Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków 2012.

Badania w obszarze nauk ekonomicznych często nie mogą abstrahować od kontekstu historycznego. Nie inaczej jest w przypadku modeli matematycznych rynków finansowych.

Przemiany na rynkach finansowych w ostatnim ćwierćwieczu

Rynek finansowy jest jedną z najważniejszych instytucji współczesnej gospodarki rynkowej. Dokonuje się na nim transakcji kupna-sprzedaży instrumentów finansowych. Lata 90. ubiegłego stulecia i pierwsza dekada XXI w. przyniosły rewolucyjne zmiany na rynkach finansowych. Najważniejsze zmiany, które w istotnym stopniu ukształtowały sytuację na obecnych rynkach finansowych, są następujące:

- globalizacja,
- postęp technologiczny (w zakresie informatyki i telekomunikacji),
- wzrost różnorodności instrumentów finansowych, zwłaszcza instrumentów pochodnych oraz strukturyzowanych,
- wzrost roli mediów w oddziaływaniu na zachowania uczestników rynku,
- wzrost wielkości aktywów finansowych w porównaniu z aktywami rzeczowymi,
- wzrost roli decyzji finansowych w porównaniu z decyzjami produkcyjnymi w kształtowaniu wartości podmiotów gospodarczych,
- wzrost zamożności społeczeństw powodujący presję na inwestycje finansowe.

Warto tu zwrócić przede wszystkim uwagę na wzrost różnorodności w zakresie instrumentów pochodnych. Mają one u podstaw już nie tylko ceny finansowe, takie jak: kurs walutowy, stopa procentowa, cena akcji, ale odzwierciedlają też inne charakterystyki związane z działalnością człowieka (np. inflacja, ceny dzieł sztuki itp.), jak również charakterystyki niezależne od człowieka (temperatura, działania sił natury itp.).

Wymienione czynniki spowodowały, że na rynkach finansowych obserwuje się jednocześnie cztery tendencje, które z jednej strony stanowią siłę napędową rynków, z drugiej strony mogą być zagrożeniem. Są to:

- wzrost skali dokonywanych transakcji,
- wzrost ryzyka systemu finansowego,
- wzrost siły powiązań między podmiotami gospodarczymi,
- wzrost skomplikowania procesów finansowych.

Powyżej przedstawione tendencje są oczywiście analizowane i oceniane przez środowisko naukowe. Relatywnie mała uwaga poświęcona jest jednak analizie ich wpływu na sytuację głównego podmiotu funkcjonującego w każdym kraju. Tym podmiotem jest gospodarstwo domowe. Z jednej strony gospodarstwa domowe stają się coraz bardziej zależne od sytuacji na rynku finansowym. Argumentem jest choćby konieczność oszczędzania na emeryturę czy też fakt, że w warunkach kryzysu finansowego istotna część ryzyka jest transferowana do gospodarstw domowych, ponoszących konsekwencje działań interwencyjnych rządów. Z drugiej strony gospodarstwa domowe nie mają

żadnego wpływu na sytuację na rynku finansowym; można powiedzieć, że „rynek finansowy coraz bardziej oddala się od gospodarstw domowych”.

Przemiany w nauce o finansach

Nauka o finansach, w tym teoria rynku finansowego, również doświadcza przemian. Mogą one być scharakteryzowane dwiema prawidłowościami:

- nowe narzędzia teoretyczne coraz częściej tworzone są na potrzeby praktyki, co oznacza, że najpierw pojawia się problem praktyczny, do którego rozwiązania znajduje się narzędzie teoretyczne (może to oznaczać, że metody „powstają” w instytucjach sektora finansowego);

- pomysły teoretyczne są szybko weryfikowane w praktyce.

Opisane prawidłowości oznaczają, że w obszarze rynków finansowych: „nauka jest coraz bardziej praktyczna, zaś praktyka coraz bardziej naukowa”. Co więcej, niektórzy stawiają tezę, że to właśnie nowe narzędzia teoretyczne zmieniają rynki finansowe. Teza ta jest formułowana czasem w znacznie bardziej radykalnej postaci, w której nauce przypisywana jest odpowiedzialność za kryzysy finansowe. Jest to oczywiście teza nieprawdziwa. Do problemu tego odnoszę się w dalszej części wykładu.

Nie ulega dla mnie wątpliwości, że modele proponowane przez teorię stają się coraz bardziej skomplikowane. Z jednej strony coraz łatwiej jest je stosować, z uwagi na postępy w technologii informatycznej, ale z drugiej strony modele stają się coraz mniej przejrzyste dla użytkownika.

Nauka o finansach, a zwłaszcza teoria rynków finansowych, rozwijała się bardzo dynamicznie i wypracowała specyficzne dla siebie konstrukcje teoretyczne, co spowodowało, że stała się odrębną dyscypliną. Oczywiście część dorobku naukowego została wypracowana w okresie, gdy finanse były częścią składową ekonomii. Przykładem są koncepcje powstałe na gruncie teorii równowagi ogólnej. Pewna jednak część dorobku naukowego jest specyficzna dla finansów, jak choćby teoria wyceny arbitrażowej czy też hipoteza rynku efektywnego. Znaczenie finansów jako odrębnej dyscypliny jest też potwierdzone liczbą laureatów Nagrody pamięci Alfreda Nobla w dziedzinie nauk ekonomicznych (potocznie: ekonomiczny Nobel), że wspomnę choćby takie postacie, jak: Harry Markowitz, William Sharpe, Merton Miller, James Tobin, Franco Modigliani, Robert Merton, Myron Scholes, Robert Engle.

Jak pokazują doświadczenia ostatnich lat, teoria rynków finansowych nie wypracowała jeszcze powszechnie akceptowanego modelu (czy też modeli), który wystarczająco wyjaśniałby zjawiska zachodzące na rynkach finansowych w ostatnim ćwierćwieczu. Niektórzy wskazują na potrzebę poszukiwania nowego paradygmatu w nauce o finansach. Nie jestem pewien, czy taki paradygmat można znaleźć. Nie zmienia to jednak faktu, że nauka ponosi odpowiedzialność za to, na ile proponowane przez nią teorie będą skuteczne, po pierwsze, w wyjaśnianiu zjawisk na rynkach finansowych, po drugie, w podejmowaniu decyzji finansowych prowadzących do wzrostu dobrobytu społecznego.

Modele matematyczne rynków finansowych – ogólna taksonomia

Systematyzacja wszystkich modeli matematycznych występujących na rynkach finansowych prawdopodobnie przekracza możliwości badaczy tych rynków. Zajmuję się tu jedynie tymi modelami, które zyskały uznanie w środowisku ekonomistów – zarówno teoretyków, jak i praktyków. Ogólna klasyfikacja modeli występujących na rynkach finansowych uwzględnia kryterium skali. W klasyfikacji tej można wyróżnić modele instrumentu finansowego, modele podmiotu (uczestnika rynku) i modele rynku.

Największa liczba modeli powstała w grupie modeli instrumentów finansowych. Analiza literatury oraz obserwacje praktyki pozwalają na wyróżnienie czterech głównych grup modeli:

1) modele wyceny – tutaj wyróżnia się modele wyceny instrumentów dłużnych i udziałowych oraz metody wyceny instrumentów pochodnych. Pierwsza grupa ma u podstaw klasyczne zasady zdyskontowanych przepływów pieniężnych z zastosowaniem informacji pochodzących ze struktury terminowej stóp procentowych oraz informacji charakteryzujących emitenta i jego otoczenie. W drugiej grupie stosowana jest wycena arbitrażowa, która po raz pierwszy została uwzględniona w modelu wyceny opcji Blacka-Scholesa-Mertona;

2) modele dynamiki cen instrumentów finansowych (kursów akcji, kursów walutowych, stóp procentowych, cen towarów) – duży udział w rozwoju tej grupy miały narzędzia wynikające z teorii procesów stochastycznych, przede wszystkim stochastycznych równań różniczkowych, jak również metody ekonometrii finansowej. Pojawiła się też duża grupa modeli niemających u podstaw podejścia stochastycznego, a zorientowanych na aproksymację szeregów czasowych cen finansowych za pomocą funkcji nieliniowych;

3) modele ryzyka rynkowego – grupa ta jest częściowo powiązana z poprzednią, poprzez modele zmienności, które są interpretowane jako modele ryzyka, ale też jako modele dynamiki cen. Bardzo ważną częścią tej grupy są modele rozkładów statystycznych, w ramach których wyznaczane są miary ryzyka (na przykład miary rozproszenia rozkładu);

4) modele ryzyka kredytowego – są to modele, których celem jest ocena możliwej straty wynikającej z niedotrzymania warunków przez jedną ze stron kontraktu finansowego. Ich rola była widoczna w okresie ostatniego kryzysu sektorów bankowych, w dużym stopniu wywołanych błędami w zarządzaniu ryzykiem kredytowym. Również teraz, w trakcie kryzysu strefy euro, mogą one odegrać ważną rolę. Wyróżnia się trzy podstawowe rodzaje modeli ryzyka kredytowego. Pierwsza grupa to modele klasyfikacji kredytobiorców, na dobrych i złych. Zastosowanie mają tu różne metody klasyfikacji, na przykład klasyczna analiza dyskryminacyjna. Druga grupa to modele strukturalne, z których najsłynniejszy jest model Mertona, wywodzący się z teorii wyceny opcji. Trzecia grupa to modele intensywności, w których podstawą jest proces stochastyczny, odzwierciedlający dynamikę procesu niedotrzymania warunków.

We wszystkich czterech wymienionych grupach modeli aparat matematyczny odgrywa kluczową rolę. Moim zdaniem są dwie główne konstrukcje teoretyczne, które w tych modelach występują. Pierwsza to proces stochastyczny, którego zadaniem jest identyfikacja dynamiki. Najbardziej zaawansowany, z formalnego punktu widzenia, jest taki proces, którego dynamika wynika ze stochastycznego równania różniczkowego.

Druga konstrukcja to rozkład wielowymiarowy, którego zadaniem jest identyfikacja struktury. Znajdujemy tu narzędzia rozwiązujące zagadnienie klasyfikacji (ryzyko kredytowe) lub regresji (ryzyko rynkowe). Oprócz tradycyjnego ujęcia statystycznego rozkładu wielowymiarowego, na przykład rodziny rozkładów eliptycznie symetrycznych, mieszczą się tu co najmniej dwa w pewnym sensie konkurencyjne podejścia. Pierwsze podejście to zastosowanie funkcji kopuli, które pozwalają na odrębne modelowanie zmienności i powiązań. Drugie podejście to teoria wartości ekstremalnych, która pozwala na modelowanie zdarzeń rzadkich, czyli takich, które mają niewielkie prawdopodobieństwo zajścia, ale powodują duże straty. Zjawiska ekstremalne wywoływane są zarówno działaniami podmiotów funkcjonujących na rynkach finansowych, jak i oddziaływaniem sił przyrody (huragan, trzęsienie ziemi, powódź, tsunami).

Teoria finansów wypracowała też modele podmiotów funkcjonujących na rynku finansowym. Historycznie największą rolę odegrały i dalej odgrywają modele racjonalnego inwestora, który podejmuje decyzje inwestycyjne maksymalizujące oczekiwaną użyteczność, co często sprowadza się do optymalizacji w sensie Pareto ze względu na oczekiwaną stopę zwrotu i ryzyko. Jednym z najważniejszych wydarzeń w rozwoju teorii finansów jest teoria portfela stworzona w 1952 r. przez Harry'ego Markowitza, stanowiąca piękny przykład zastosowania wielowymiarowego rozkładu statystycznego w analizie inwestycji finansowych. Teoria ta została kilka lat później rozszerzona przez Jamesa Tobina, poprzez uwzględnienie w inwestycjach instrumentów wolnych od ryzyka.

Założenie racjonalnego inwestora typu *homo oeconomicus* jest w ostatnich latach poważnie kontestowane. Niewątpliwie największą rolę odegrały tu finanse behawioralne, wywodzące się z ekonomii behawioralnej, a przede wszystkim teoria perspektywy, stworzona przez psychologów Daniela Kahnemana i Amosa Tversky'ego, wskazująca na pewne właściwości zachowania inwestora. Teoria ta stanowi dobry przykład interdyscyplinarnego modelu, łączącego kwestie ekonomiczne i psychologiczne. W ostatnich latach coraz więcej badań prowadzi się w zakresie neuroekonomii, wyjaśniając zachowania inwestora na rynku finansowym właściwościami jego mózgu.

Teoria finansów wypracowała też modele, których zadaniem jest wyjaśnienie zachowań całego rynku. Dominują tu modele mające u podstaw teorię równowagi, wśród których najbardziej popularny, ale jednocześnie najbardziej krytykowany, jest model CAPM (Capital Asset Pricing Model), wraz z różnymi modyfikacjami. Trzeba jednak powiedzieć, że do tej pory nie pojawiła się żadna powszechnie akceptowana propozycja modelu rynku finansowego.

Ryzyko modelu

Przedstawione powyżej modele są pewnym uproszczeniem rzeczywistości. Należy zauważyć, że zachowanie rynków finansowych zmienia się w czasie, przy tym rośnie częstotliwość oraz skala tych zmian w czasie. Podejmowanie decyzji na podstawie wskazań modelu może prowadzić do niekorzystnych efektów, np. do strat wynikających z nieprawidłowego oszacowania ryzyka przez model. Oznacza to, że wykorzystywanie modelu na rynku finansowym wiąże się z ryzykiem. Termin stosowany do tego zjawiska to „ryzyko modelu”. W uproszczony sposób można je określić jako ryzyko wynikające z zastosowania błędnego modelu w świecie rzeczywistym.

Są co najmniej trzy źródła ryzyka modelu. Po pierwsze, ryzyko modelu wynika z niepewności co do struktury modelu, na przykład nieuwzględnienia ważnych czynników w modelu, przyjęcia złego rozkładu czy też na przykład przyjęcia liniowej zależności tam, gdzie zależność ma charakter nieliniowy. Po drugie, ryzyko modelu wynika z niepewności związanej z oszacowaniem parametrów modelu, ponieważ możliwe są różne sposoby estymacji czy też zastosowanie w estymacji różnych zbiorów danych. Po trzecie, ryzyko modelu wynika z niepewności związanej z zastosowaniem niewłaściwego modelu w konkretnej sytuacji. Sytuacja ta może występować na przykład wtedy, gdy model wyceny instrumentu finansowego, konstruowany dla efektywnego i płynnego rynku, jest stosowany w sytuacji kryzysu finansowego.

Znaczenie ryzyka modelu jako zjawiska, które może doprowadzić do poważnych problemów finansowych, zostało wyraźnie zidentyfikowane po raz pierwszy przy okazji upadku funduszu hedgingowego Long Term Capital Management (LTCM). Fundusz ten w latach 1994-1998 stosował bardzo zaawansowane modele wyceny instrumentów finansowych. Na początku decyzje podejmowane na podstawie tych modeli prowadziły do ponadprzeciętnych wyników inwestycyjnych funduszu. Jednak w 1997 r. w trakcie kryzysu finansowego w Azji Południowo-Wschodniej fundusz poniósł straty, a jego upadek nastąpił w trakcie kryzysu finansowego w Rosji w 1998 r. Dzięki działaniom amerykańskiego banku centralnego, który inicjował i koordynował działania kilku instytucji finansowych, które zasiliły kapitałowo upadający fundusz, jego bankructwo nie wywołało poważniejszych konsekwencji destabilizujących globalny rynek finansowy. Kryzys LTCM pokazał, że w warunkach dynamicznie zmieniających się rynków finansowych precyzyjnie „skrojone” modele przestają działać skutecznie.

Inny przykład ryzyka modelu to ryzyko sprawozdania finansowego sporządzanego przez podmiot gospodarczy. Informacje zawarte w jego elementach składowych służą jako podstawa podejmowania części decyzji na rynkach finansowych. Sprawozdanie finansowe jest jednak uproszczonym modelem podmiotu gospodarczego. W ostatnich latach to uproszczenie widać coraz bardziej. Sprawozdawczość finansowa nie może sobie poradzić z takimi istotnymi zjawiskami współczesnego biznesu, jak: stosowanie instrumentów pochodnych, występowanie powiązań biznesowych czy też pomiar kapitału intelektualnego. Przykład sprawozdania finansowego holdingu Enron, który upadł w 2001 r., to tylko jeden z wielu przypadków.

Jak się jednak okazuje, wnioski w zakresie ryzyka modelu, które formułowane są po kryzysach finansowych, nie są wykorzystywane. Kryzys finansowy, który zaczął się w 2007 r., ma u podstaw wiele przyczyn. Jedną z nich jest brak profesjonalizmu w stosowaniu wyrafinowanych modeli wyceny zaawansowanych instrumentów finansowych, przede wszystkim poleganie na danych historycznych, nieuwzględnianie możliwości występowania ekstremalnych zdarzeń. Ten brak profesjonalizmu wykazali w 2007 r. zarządzający portfelami banków inwestycyjnych, którzy bezkrytycznie stosowali wyrafinowane modele, jak się później okazało, nie rozumiejąc ograniczeń w ich stosowalności.

Przenoszenie danego modelu w czasie (zmiana funkcjonowania rynku) lub w przestrzeni (inny rynek) może prowadzić do jego niewłaściwego zastosowania. Jednym z podstawowych błędów twórców i użytkowników modeli jest dążenie do tego, aby model był precyzyjny i dobrze dopasowany do danych historycznych. Przykładem jest swoista inflacja badań w zakresie stosowania modeli klasy GARCH, mających za cel poprawę błędu dopasowania lub błędu prognozy *ex ante*.

Moim zdaniem modele stosowane na rynkach finansowych powinny spełniać dwa warunki brzegowe. Modele te powinny być, po pierwsze: odporne na zmiany warunków rynkowych, po drugie: przejrzyste dla użytkownika. Spełnienie pierwszego warunku może zmniejszyć ryzyko w zakresie obszaru zastosowań modelu. Z kolei spełnienie drugiego warunku oznacza zmniejszenie zagrożenia związanego z zastosowaniem dobrego modelu w niewłaściwy sposób z powodu niezrozumienia modelu przez użytkownika. Według mnie dobrą praktyką powinno stać się uzupełnianie każdego modelu o informację na temat ryzyka tego modelu. Dotyczy to wszystkich modeli stosowanych w finansach, od modelu wyceny opcji po rachunek zysków i strat spółki.

Jaka jest odpowiedź na podstawowe pytanie?

Nie ulega najmniejszej wątpliwości, że czołowe modele matematyczne rynku finansowego stanowiły najważniejszy krok w rozwoju teorii finansów. Bardzo trafnie rozwój teorii finansów, a przede wszystkim teorii rynku finansowego, scharakteryzował Robert Merton, stwierdzając (tłumaczenie – K. J.): „Istotą teorii finansów jest analiza zachowania się podmiotów przy alokacji i wykorzystaniu swoich zasobów, zarówno w przestrzeni, jak i w czasie, w niepewnym otoczeniu. Czas i niepewność są głównymi elementami, które wpływają na zachowanie się podmiotów w zakresie finansów. Złożoność występujących interakcji wnosi dodatkowe emocje do nauki finansów, gdyż do uchwycenia efektów tych interakcji często wymagane jest stosowanie wyrafinowanych narzędzi matematycznych. W istocie modele matematyczne występujące w nowoczesnych finansach zawierają niektóre najpiękniejsze zastosowania rachunku prawdopodobieństwa i teorii optymalizacji. Ale oczywiście wszystko to, co jest piękne w nauce, nie musi być użyteczne w praktyce; podobnie, nie wszystko, co jest użyteczne w praktyce, jest piękne. Tutaj mamy do czynienia z obiema cechami”.

Modele rynku finansowego stały się użytecznymi narzędziami w praktyce. Moim zdaniem dotyczy to na przykład narzędzi zarządzania ryzykiem, takich jak teoria portfela i model wyceny opcji. Uważane są one właśnie za kamienie milowe w rozwoju nauki finansów. Ich właściwe stosowanie pomaga w efektywnym inwestowaniu na rynku finansowym, prowadzącym do realizacji celu finansowego przy akceptowalnym poziomie ryzyka. Obszarem takiej inwestycji jest na przykład zabezpieczenie emerytalne.

Czy zatem modele matematyczne mogą być narzędziem destrukcji? Oczywiście same modele nie! Zabójcza broń sama nie niszczy. Musi znaleźć się w rękach człowieka, który świadomie bądź nieświadomie spowoduje zagrożenie. Podobnie jest w przypadku rynków finansowych. Istnieją czynniki, które zwiększają ryzyko modelu, które przedstawiłem już wcześniej. Do tego należy dodać kwestie o znaczeniu fundamentalnym, do których zaliczam przede wszystkim: kryzys systemu wartości, błędy w zakresie polityki gospodarczej i regulacji, szkodliwe systemy motywacyjne oraz zachowania uczestników rynku.

Pojawiają się głosy, że ostatni kryzys finansowy to w gruncie rzeczy kryzys systemu tradycyjnych wartości kształtujących gospodarkę rynkową, takich jak: etyczne zachowania, sumienna praca, dążenie do nieustannego powiększania majątku, redukcja wydatków, rzetelność, dotrzymywanie zobowiązań, uczciwość. Trudno odmówić racji tym poglądom. Ostatnie lata pokazały, że świat nie pamięta o tych tradycyjnych wartościach. Nieetyczne zachowania rynku, dominacja podejścia „tu i teraz”, życie kosztem przyszłych pokoleń, to wszystko prowadzi do destrukcji gospodarki, w tym rynku finansowego.

W warunkach zmieniającego się otoczenia każdy, kto stosuje narzędzia polityki gospodarczej, narażony jest na popełnianie błędów. Warto tu zwrócić uwagę na dwa rodzaje błędów. Pierwszy z nich najlepiej zilustrować na przykładzie Stanów Zjednoczonych. Kreowana przez kolejne rządy wizja wąsko pojmowanego „American dream” w efekcie oznaczała kreowanie złudzenia, że nie pracując i nie tworząc wartości dodanej, można więcej konsumować. Taka była polityka umożliwiająca udzielanie przez banki kredytów subprime osobom niemającym żadnej wiarygodności kredytowej. Istnieje niebezpieczeństwo popełnienia podobnych błędów w niektórych krajach europejskich. Niestety nawoływanie do praktyk typu socjalistycznego to zagrożenie dla rozwoju gospodarczego w dłuższym okresie. Każdy rozsądnie myślący ekonomista wie, jakie szkody może spowodować socjalizm wspierany przez nieodpowiedzialnych polityków.

Negatywną rolę w powstawaniu kryzysów odgrywają wadliwie skonstruowane systemy motywacyjne. Widać to najlepiej na przykładzie pośredników kredytowych w Stanach Zjednoczonych (i nie tylko), których wynagrodzenie zależało nie od jakości kredytobiorców, lecz od liczby udzielonych kredytów. Sprzyjało to powstaniu pokusy nadużycia, jeśli chodzi o informacje dotyczące sytuacji finansowej kredytobiorcy. Jednak to nie tylko sprzedawcy kredytów działali w ramach systemów motywacyjnych, które dla nich były korzystne, wywoływały zaś negatywne efekty dla dobrobytu społecznego. Dodajmy do tego agencje ratingowe, audytorów sprawozdań finansowych czy

też sprzedawców produktów finansowych działających pod szyldem doradców finansowych. Moim zdaniem niezbędna jest rekonstrukcja systemów motywacyjnych, tak aby premiowały, po pierwsze, jakość pracy, po drugie, odpowiedzialność za wyniki, po trzecie, długoterminowy efekt.

Efekty kryzysu finansowego spowodowały wręcz „pospolite ruszenie”, jeśli chodzi o regulacje w zakresie systemu finansowego. Tak było zawsze po kryzysach, gdy powstawały kolejne propozycje regulacyjne. Widzimy to teraz, by wspomnieć o kolejnych poprawkach krytykowanych regulacji bazylejskich czy też ustawie o reformie Wall Street i ochronie konsumenta, tzw. ustawie Dodd-Franka w Stanach Zjednoczonych, której dokument liczy ponad 1200 stron, co budzi obawy o przejrzystość i kwestie operacyjne. Główną cechą kryzysów finansowych ostatnich lat, zwłaszcza obecnego kryzysu, jest to, że podstawowym rodzajem ryzyka, jakie w nich występuje, jest ryzyko systemowe. Jest to ryzyko wynikające z faktu, że kryzys w jednym segmencie rynku finansowego (czy jednym krajem) wywołuje negatywne konsekwencje w innym segmencie tego rynku (innym krajem).

Kluczowym problemem jest więc stabilność globalnego systemu finansowego. Stabilność finansowa to zdolność systemu finansowego do wspomagania procesów ekonomicznych, zarządzania ryzykiem i przyjmowania szoków. Niewielkim krokiem w dobrym kierunku są obecnie prowadzone działania w zakresie regulacji makroostrożnościowych (zapoczątkowane stworzeniem Europejskiej Rady Ryzyka Systemowego).

Podstawowym problemem w określeniu poziomu stabilności finansowej jest pomiar ryzyka systemowego. Za Andrew Lo warto wymienić listę czynników, które powinien uwzględniać pomiar ryzyka systemowego. Są nimi: dźwignia (czyli poziom zadłużenia) podmiotów rynku finansowego, płynność instrumentów rynku finansowego, korelacja podmiotów rynku finansowego, koncentracja aktywów czy też wrażliwość wartości na zmiany cen na rynkach finansowych.

Sądzę, że jest jeszcze wiele zadań przed teoretykami i praktykami w zakresie zwiększenia stabilności systemu finansowego. Moim zdaniem kluczem do sukcesu są jednak rozwiązania na poziomie globalnym. To jest jednak bardzo trudne, z uwagi na rozbieżne interesy kilku państw oraz niektórych megakorporacji, będących najważniejszymi aktorami współczesnej globalnej gospodarki.

Jak już wskazałem, na to wszystko nakładają się zachowania uczestników rynku. Parafrazując Mertona Millera, można stwierdzić, że niezależnie od tego, jakie będą rozwiązania instytucjonalne, „menedżerowie zawsze znajdą sposób, aby stracić pieniądze”. Jest z pewnością wiele elementów zachowań ludzkich, które nie sprzyjają racjonalnemu podejmowaniu decyzji na rynkach finansowych.

Badają to przedstawiciele finansów behawioralnych. Według mnie trzy spośród nich spełniają najbardziej destrukcyjną rolę: zachowania stadne, podsycane przez nieodpowiedzialne media, przesadne zaufanie do własnej wiedzy i umiejętności oraz wiara, że ważniejsze są krótkookresowe trendy niż długoterminowe fundamenty. Omówione przeze mnie uwarunkowania społeczne, instytucjonalne i psychologiczne stanowią to, co powoduje, że niewłaściwie stosowany model może stanowić zagrożenie.

W poszukiwaniu modelu rynku finansowego

Obowiązkiem każdego badacza rynków finansowych jest tworzenie teorii, która, po pierwsze, wyjaśnia zachodzące na tych rynkach procesy, po drugie, daje podstawy do podejmowania decyzji przez uczestników tych rynków. Pojawia się pytanie, czy nauka jest w stanie stworzyć model rynku finansowego, który miałby walor uniwersalności. Jest to zadanie bardzo trudne. Rynki finansowe to dynamiczny obiekt, działający w dynamicznym otoczeniu, którego głównymi elementami są ludzie, charakteryzujący się zmieniającymi się zachowaniami, zazwyczaj o właściwościach adaptacyjnych.

Tworząc taki model, należy skoncentrować się na kluczowych kwestiach, mających znaczenie, jeśli chodzi o zmiany światowego rynku finansowego. Moim zdaniem są nimi:

1) ryzyko – praktycznie wszystkie podmioty funkcjonujące w gospodarce i życiu społecznym stoją przed koniecznością zarządzania ryzykiem (a przede wszystkim pomiarem ryzyka). Dotyczy to instytucji finansowych, przedsiębiorstw, jednostek sektora publicznego, gospodarstw domowych. Oznacza to, że ryzyko jest podstawowym czynnikiem determinującym wycenę (modele wyceny) i podejmowanie decyzji (decyzyjne modele normatywne);

2) gospodarstwo domowe – przemiany w gospodarce i życiu społecznym (w tym przemiany demograficzne) doprowadzą do konieczności realizacji przez pośredników finansowych działalności zorientowanej na klienta, którym jest przede wszystkim gospodarstwo domowe. Rozważania teoretyczne w coraz większym stopniu prowadzone będą z punktu widzenia gospodarstwa domowego, z uwzględnianiem takich elementów, jak: sentyment, uczucia, zadowolenie, samorealizacja itp. Tradycyjne pojęcie racjonalnego podmiotu ustąpi miejsca bardziej złożonej koncepcji uwzględniającej indywidualne cechy człowieka;

3) interdyscyplinarność – nauka o finansach, oprócz tradycyjnie stosowanych narzędzi pochodzących z matematyki, ekonomii, zarządzania i psychologii, uwzględniać będzie takie dyscypliny, jak: socjologia (zjawiska finansowe występują w grupach społecznych), biologia (u podłoża zachowań podmiotów na rynkach finansowych leżą czynniki biologiczne – wyjaśniane na gruncie genetyki), kulturoznawstwo (rynki finansowe są globalne, ale też obdarzone specyfiką lokalną – choćby przykład finansów islamskich);

4) technologia – przemiany technologiczne w istotnym stopniu dotyczą działalności człowieka w zakresie decyzji finansowych. Spowodowało to, że internet, wspierany narzędziami informatycznymi i telekomunikacyjnymi, jest głównym kanałem kontaktu człowieka z rynkiem finansowym. Fakt ten jednak nie znalazł odzwierciedlenia w koncepcjach teoretycznych, które odwołują się w dużym stopniu do tradycyjnej postaci rynku finansowego, dominującej jeszcze na początku lat 90. ubiegłego stulecia. Istniejące modele nie radzą sobie z ujęciem procesów zmian technologicznych i wzrastającą rolą kapitału intelektualnego;

5) ujęcie funkcjonalne procesów finansowych – nauka o finansach, zazwyczaj preferuje ujęcie instytucjonalne, gdyż procesy finansowe są rozpatrywane przede wszystkim z punktu widzenia podmiotów. W ostatnich latach nastąpiła integracja różnych funkcji finansowych w różnych podmiotach. Wywołuje to konieczność prowadzenia rozważań w kategoriach funkcji pełnionych przez różne instytucje, niezależnie od tego, jakie jest formalnoprawne ulokowanie danej instytucji. Oznacza to, że narzędzia teoretyczne finansów w coraz większym stopniu zorientowane będą na funkcje pełnione przez konkretne procesy finansowe, niezależnie od tego, przez kogo są one realizowane.

Na zakończenie jeszcze raz dziękuję Uniwersytetowi Ekonomicznemu w Krakowie za przyznaną mi godność akademicką doktora honorowego. Życzę społeczności akademickiej Uniwersytetu wielu sukcesów naukowych i osobistych.

RECENZJE

ANTONI SMOLUK

RECENZJA KSIĄŻKI ALEKSANDRA JAKIMOWICZA „ŹRÓDŁA NIESTABILNOŚCI STRUKTUR RYNKOWYCH”

Książka – oprawiona w zielone miękkie okładki z białymi napisami – ukazała się w serii wydawniczej *Współczesna ekonomia* (Wydawnictwo Naukowe PWN SA, Warszawa 2010). Jest – być może – dziełem życia Autora. Napisana językiem pięknym i świeżym, rzadko teraz spotykanym w pracach naukowych; jest wielkim sukcesem Autora i dużym osiągnięciem Wydawnictwa.

Na początek dane statystyczne. Praca liczy bez bibliografii 287 stron, do tego dochodzi jeszcze 26 stron bibliografii, dziewięciostronicowy indeks i dwustronicowe streszczenie po angielsku. Łącznie ze spisem rzeczy, stronami reklamowymi Wydawnictwa, naturalnym otwarciem i zamknięciem mamy 336 stronicowy utwór. Ciało główne składa się ze wstępu, 13 stron mierzącego, 7 rozdziałów mających łącznie 233 strony, zakończenia na 7 stron i aneksu liczącego 34 strony. Żywa paginacja ułatwia lekturę, jednocześnie zdobi i ożywia przedmiot.

Rozdział I *Teoremat pajęczyny* podzielony na 6 paragrafów, ma 60 stron oraz 22 rysunki. Rozdział II *Teoria wyboru konsumenta; model Rickera* zajmuje 19 stron, ma cztery paragrafy i jest okraszony 8 rysunkami. Rozdział III *Teoria monopolu*, to 7 paragrafów na 43 stronach oraz 17 rysunków. Rozdział IV *Stan badań nad oligopolem* jest bez rysunków i paragrafów, a liczy tylko 15 stron druku. Rozdział następny V *Dynamika duopolu* ma 42 strony druku rozbitego na 5 paragrafów i sztafą z 18 rysunków. Kolejny rozdział VI *Oligopol z trzema przedsiębiorstwami* obejmuje 38 stron zilustrowanych 10 rysunkami. Wreszcie rozdział ostatni VII *Identyfikacja nieliniowości i chaosu w ekonomicznych szeregach czasowych* liczy stron 16, nie ma paragrafów ani rysunków, ale za to ma cenną tablicę będącą przeglądem literatury na tytułowy temat. Po zakończeniu i aneksie podzielonym na 10 punktów następuje spis literatury – około 510 pozycji, dalej idzie bardzo dobry indeks terminów ułatwiający lekturę, a całość wieńczy angielskie streszczenie.

Część rysunków jest kolorowych; są to często prawdziwe dzieła sztuki abstrakcyjnej. Dotyczy to głównie rysunków z rozdziału III, a szczególnie tych trzech ostatnich z numerami 15, 16 i 17. Część rysunków zaopatrzono w tablicę towarzyszącą, będącą swego rodzaju legendą obrazu. Tablice te kalibrują kolory; rysunek ma bowiem charakter barwnego wykresu rozkładu prawdopodobieństwa – kolory mówią o często-

ściach pojawienia się trajektorii w wyszczególnionych regionach obszaru zmienności parametrów.

Źródłem tytułowych perturbacji struktur rynkowych są zachowania agentów: producentów co drogo chcą sprzedać i konsumentów, którzy tanio pragną nabyć wybrane wyroby. Ta sprzeczność w warunkach konkurencji niedoskonałej rodzi chaos. Zawodzi niewidzialna ręka rynku. Chaos ekonomiczny nie jest gorszy od chaosu fizycznego, czy kosmicznego. Jego źródłem nie są modele – obojętnie czy liniowe, czy nieliniowe, lecz natura. Rynek jest złożonym systemem, nieprzewidywalnym układem cybernetycznym z powodu irracjonalnych decyzji agentów. Człowiek wprowadza nieokreśloność, losowość, do tego systemu. Ekonomia, bez mglistych preferencji konsumentów, byłaby szwajcarskim zegarkiem. Pełna zgodność równowagi produkcyjnej z równowagą rynkową, to czysty komunizm. Preferencje tu są określone, stałe i nie ulegają zmianie. Wyższa instancja wie co ludziom poszczególnym się należy i potrzeba, a wszyscy naturalnie to akceptują. Jak w systemach utopijnych. Jest tu optimum organizacyjne – mrowisko albo ul. Oczywiście świat jest nieliniowy i złożony. Jednak prawa nauki dotyczą obiektów idealnych i obowiązują w określonym czasie. Modele stosowane w praktyce są różne, tak liniowe jak i nieliniowe. Prawo wzrostu naturalnego, słynne równanie Malthusa,

$$y' = ry$$

mówi o przyroście, który jest proporcjonalny do osiągniętego stanu systemu. Jest to równanie różniczkowe *liniowe* pierwszego rzędu. Jego rozwiązaniem jest funkcja wykładnicza

$$y = a \exp(rt),$$

czyli funkcja nieliniowa. Prawo nauki jest liniowe, trajektorie – nieliniowe. I tak jest często w nauce, a szczególnie w ekonomii; swoistość ta jest cechą charakterystyczną ogólnej teorii zwyczajnych równań różniczkowych liniowych. Jeśli dynamikę systemu złożonego – a takim jest przecież ekonomia społeczna – opisujemy równaniami różniczkowymi i to nawet wyższych rzędów, to zawsze będziemy w sytuacji paradoksalnej: zasady liniowe generują dynamikę nieliniową. Równanie liniowe zwyczajne ma trzy gatunki rozwiązań: wielomiany, funkcje wykładnicze oraz funkcje okresowe – sinusoidalne, a ponadto liniowe kombinacje iloczynów tych trzech typów zależności funkcyjnych. Nauka w ogólności, fizyka w szczególności, a także inne dziedziny oparte i wzorujące się na fizyce, korzysta z równań różniczkowych – zwyczajnych i cząstkowych – tylko rzędu drugiego. Równania różniczkowe drugiego rzędu są fundamentalnym językiem i narzędziem poznania natury. Pierwsza pochodna jest przyrostem, druga inwestycjami, a czym jest trzecia tego już nie wiemy. Przyrostem inwestycji? Jeśli tak, to wracamy znów cyklicznie do pierwszej pochodnej. Z tego co napisałem widać, że pojęcia liniowości i nieliniowości wzajemnie się przeplatają i nie można *en gros* ich traktować oddzielnie. Jednoczenie podkreślić trzeba, że każda funkcja gładka lokalnie jest prawie liniowa. Na tym polega istota rachunku różniczkowego; obiekty nieliniowe zastępuje się lokalnie funkcjami liniowymi optymalnie przylegającymi, czyli

stycznymi. Takimi argumentami usprawiedliwia się bogatą i popularną teorię modeli liniowych w ekonometrii. Cena jest funkcjonalem liniowym, jednak przy większym zakupie otrzymujemy rabat, a to znaczy, że w detalu mamy liniowość, a w hurcie subliniowość. To kolejny argument za nierozzerwalnym związkiem obiektów liniowych i nieliniowych. Relacje liniowe są w praktyce rzadkością. Często je się przyjmuje dla uproszczenia. Rozwój naturalny – jak powiedziano wyżej – jest wykładniczy, a więc nieliniowy. To stwierdzenie zdecydowanie wzmacnia argumenty Autora, a ponadto model pajęczynowy – podstawowa idea obrazująca dążenie do równowagi – jest ruchem wirowym, czyli spiralą, a więc tworem nieliniowym. Ten ruch wirowy wokół punktu równowagi jest podstawą ekonomii i nauki. Ideę tę pięknie i przejrzyście wykłada Autor w swym dziele. Myślą przewodnią jest ruch wirowy wokół punktu równowagi, czyli analiza zachowań cyklicznych typowa dla przyrody i ekonomii.

Książka nie ma charakteru historycznego, ale Autor nasycił ją historią nauki. Szczególnie cenne są anegdoty swoiste, które ożywiają lekturę i wnoszą głębsze zrozumienie problemu. Czytelnika ucieszy niewątpliwie opowieść o problemie trzech ciał, informacja o różnorodnych definicjach chaosu, opowieść hydrologiczna o wykładniku Hursta, definicja stabilności w sensie Lapunowa i temu podobne. Aneks jest jakby oddzielną książeczką bardzo ułatwiającą lekturę części zasadniczej. Stephen Hawking do trzech największych odkryć XX wieku zalicza chaos obok twierdzenia Goedela o niezupełności arytmetyki liczb naturalnych i zasady nieoznaczoności Heisenberga. Te ciekawe informacje Autora uzupełnię pytaniem o trzy najważniejsze osiągnięcia matematyki w całej kulturalnej historii ludzkości? Zdaniem niektórych specjalistów są to: metoda aksjomatyczna Euklidesa, zapis pozycyjny liczb naturalnych oraz probabilistyka. Pod tą listą chętnie się podpisuję z jednym zastrzeżeniem: wymieniam probabilistykę na metodę wyczerpywania Archimedesza. Od Archimedesza wiedzie prosta droga do rachunku różniczkowego i teorii form różniczkowych, a bez tych rzeczy nie ma mowy o współczesnej cywilizacji. Dynamikę systemu opisują formy różniczkowe i równania różniczkowe. Najważniejsze równania fizyki matematycznej są równaniami liniowymi i to co najwyżej drugiego rzędu. Pierwsza pochodna jest aproksymacją lokalną funkcją liniową, a druga – funkcją dwuliniową. Praktycznie ważne są więc formy liniowe, które w ekonomii reprezentują ceny oraz formy kwadratowe, które w ekonomii odzwierciedlają inwestycje. Probabilistyka zaliczana do największych osiągnięć matematyki jest naturalnie odpowiednikiem chaosu w klasyfikacji Hawkinga. W aneksie wykładnik Lapunowa definiuje się metodą zwaną przez Anglików *very sophisticated*. Jeśli funkcja $f: R \rightarrow X$ jest trajekcją w przestrzeni metrycznej stanów X z metryką d , to wykładnik Lapunowa λ_f funkcji f określa się prostym wzorem

$$\lambda_f = \limsup t^{-1} \ln d(a, f(t)), \text{ gdy czas } t \text{ rośnie nieograniczenie,}$$

gdzie R jest naturalnie zbiorem liczb rzeczywistych, natomiast a dowolnym stanem w przestrzeni X , a gdy X jest przestrzenią liniową, wtedy zwykle $a = 0$. Dla funkcji

będącej rozwiązaniem wymienionego wyżej równania Malthusa – pomijając rozwiązanie trywialne równe stałe 0 – wykładnik Lapunowa jest równy liczbie r . Przy okazji zacytuję Autora (str. 108). *Należy zauważyć, że wszystkie badania numeryczne mają charakter przybliżony [...]. Z oczywistych powodów nie jesteśmy w stanie zbliżyć się do granicy [...]. Powoduje to, że nigdy nie będziemy pewni, czy znak wykładnika Lapunowa nie zmieni się po wykonaniu dostatecznie dużej liczby iteracji.* Z wypowiedzi tej wynika naturalny wniosek: badania asymptotyczne w ekonomii mają jedynie charakter teoretyczny, a wyciąganie z nich wniosków praktycznych stoi pod wielkim znakiem zapytania. Ten znak zapytania może powiększyć się, bowiem w innym miejscu Autor pisze: *W dynamice nieliniowej, stanowiącej sumę teorii chaosu deterministycznego i teorii złożoności dużą rolę odgrywają obliczenia* (str. 9).

W pracy są przynajmniej dwa rodzaje chaosu: chaos wśród modeli zależnych od parametrów i chaos trajektorii zależny od stanu początkowego. Autor operuje zbiorami miary 0 w sensie Lebesgue'a. Czy nie lepiej używać uniwersalnego pojęcia zbioru generycznego wprowadzonego w teorii katastrof, a obowiązującego w dowolnej topologicznej przestrzeni stanów? Zbiór generyczny, to otwarty i gęsty w całej przestrzeni podzbiór. Naturalnie dopełnienie zbioru miary zero nie zawsze jest zbiorem generycznym; w sytuacjach rzeczywistych zwykle bywa. Zbiór liczb wymiernych jest miary zero, ale jego dopełnienie – liczby niewymierne – nie tworzą zbioru generycznego. Istnieje swego rodzaju sprzeczność pomiędzy próbą uwolnienia się od chaosu deterministycznego, a realnym wzrostem ekonomicznym. Rozwój układu cybernetycznego określonego wzorem $x_{n+1} = Ax_n$, gdzie wektory są koszykami dóbr, a A jest macierzą procesu technologicznego, zależy od wartości własnych macierzy A . Gdy wartości własne macierzy A są wszystkie mniejsze od 1, nawet dodatnie nie mówiąc o ujemnych, wtedy układ cybernetyczny zdefiniowany powyższym układem dynamicznym cofa się – nie ma rozwoju jest regres. Układ taki rozwija się jeśli maksymalna wartość własna jest silnie większa od 1. Wykładnik Lapunowa jest równy tej największej wartości własnej, mamy więc chaos, ale mamy jednocześnie rozwój; gdy nie ma chaosu jest stagnacja, układ dąży do samounicestwienia. Tak więc powstał paradoks: rozwój – więc chaos, zastój – więc stabilność i spokój. Trzeba wybierać i wszyscy wybierają chaos. Nie ma na to rady. Stabilny socjalizm porzuciliśmy, a przyjęliśmy niestabilny – chaotyczny – kapitalizm. Opisana tu dynamika jest naturalnie liniowa.

Książka poświęcona chaosowi deterministycznemu w ekonomii jest niezwykle aktualną w dzisiejszej dobie i oczekiwaną przez rynek. Chaos deterministyczny jest – obrazowo mówiąc – przejawem złożoności systemu. Jak w sytuacjach kryzysowych: pożar, powódź, huragan, wojna, zahamować strach i zachowania nieracjonalne i zmusić układ do powrotu do stanu równowagi stabilnej? Panika i strach destabilizuje układ; opanowanie zachowań stadnych musi być drastyczne i jest niezbędne. Utrudnia to panujący dzisiaj paradygmat w ekonomii: niewidzialna ręka rynku rodzi właśnie chaos. Potrzebny jest więc nowy język i nowe metody. Książka stara się zapełnić lukę pomiędzy tym co wie nauka, a potrzebami praktyki i dydaktyki. Znane są przypadki wygranej bitwy po okiełzaniu początkowego rozprężenia – paniki i ucieczki z pola

walki. Z ekonomicznego punktu widzenia, a w szczególności pracy giełdy, temat ten jest poruszany w głośnych ostatnio książkach Sorosa i Greenspana. Znani ci działacze, raczej praktycy niż akademicy, nie podają gotowych rozwiązań, a głównie zwracają uwagę na potrzeby uregulowań prawnych porządkujących działalność inwestycyjną graczy giełdowych i banków. W przyrodzie obserwuje się dwa sterowania układami cybernetycznymi. Sterowanie dalekosiężne na wybrany cel i działanie zmierzające do utrzymania organizmu w zdrowiu, a systemu w stanie sprawności technicznej. Sterowaniem dalekosiężnym winien zajmować się rząd, a sterowanie krótkookresowe wymusza zasada równowagi. Tak w ekonomii jedną sprawą jest wyrabianie potrzeb i wzorów konsumpcji, a inną zaspakajanie tych potrzeb. Te dwa sterowania bardzo obrazowo widać w instytucji lotów kosmicznych. W ośrodku kontrolnym lotu jest sterowanie rakietą na określony cel, na przykład Księżyc lub Marsa, a na pokładzie rakiety jest urządzenie automatyczne sterujące stanem tej rakiety tak, by nie uległa samozniszczeniu i mogła osiągnąć cel dalekosiężny. Te dwa sterowania są wyraźnie od siebie oddzielone. Podobnie jest w ekonomii. To rozróżnienie sterowań jest podstawą podziału ekonomii na naukę makro i mikro. Rakieta jest całością: nawet gdy doleci do miejsca przeznaczenia, ale na pokładzie jest źle, to zadanie nie zostanie zrealizowane. Nie ma zdrowego rozwoju ekonomii społecznej bez zdrowych przedsiębiorstw. Rząd wyznacza cele odległe i racjonalne, a rynek powoduje, że organizm społeczny – sprawny i w zdrowiu – dąży do tych dalekich przeznaczeń. Wchodząc nieco na teren filozofii warto się zastanowić nad pytaniem: w jakim stopniu człowiek określa swój los? Być może wszystko jest zdeterminowane przez Ananke – przeznaczenie, a z wielu możliwości nie wybieramy tego, co chcemy, tylko ktoś wybiera to co jest konieczne. Chociaż mamy wolną wolę, realizujemy przeznaczenie.

Jak już powiedziałem książka robi dobre wrażenie. Jednakowoż nie jest idealna, bo nie ma rzeczy – stworzonych przez człowieka – bez wad i niedoskonałości. Po pierwsze, rozdziały są niejednakowej wielkości – niejednorodne. Rozdział IV jest hołdem złożonym Cournot. Ten krótki rozdział pasuje bardzo do wstępu, podobnie jak rozdział ostatni do aneksu. Przez takie zmiany redakcyjne książka stałaby się jednolita i spójna. Dobrze o tym pamiętać jeśli dojdzie do wznowień. Rozdziały V i VI można łatwo połączyć, wystarczy bowiem analizować hiperboliczne funkcje zysku producentów w postaci

$$f_i(x) = (x_1 + \dots + x_n)^{-1} x_i - c_i x_i,$$

gdzie $i = 1, \dots, n$ oraz $x \in R^n$; otrzymuje się w ten sposób ekonomiczny analogon n ciał, czyli rynek n producentów. Czym jest złożoność? Temu pojęciu Autor poświęca wiele miejsca i wysiłku, bo jest to niewątpliwie cecha charakterystyczna takiego układu cybernetycznego jak ekonomia społeczna. Osobiście uważam, że złożoność to rzecz niezwykle prosta – przyroda i natura jest oparta na prawach nieskomplikowanych. Złożoność jest rekurencją. Tak jak trudne i kręte schody na wysoką wieżę są utworzone z wieluset łatwych i prostych stopni. A więc rekurencja jest podstawą nie tylko

biologii, ale także ekonomii: powtórzenia wielokrotne według jakiejś prostej jednej wspólnej formuły. Złożoność jest w jakimś sensie naszą niewiedzą o tym, że świat jest prosty. Prawda jest jedna, ale teorii naukowych dużo. Fizycy od lat szukają jednolitej teorii opisującej wszystko; ciągle na próżno. Autor ma niewątpliwie słuszość, gdy twierdzi, że nauka jest jedna, a poszczególne dziedziny czy branże to swoista interpretacja ogólnej powszechnej teorii. Nauka jest więc strukturą, czyli jakby syntaksą, a konkretne dziedziny interpretacjami, czyli semantyką. W nauce nie ma więc prawdy, prawda jest w zastosowaniach nauki. Autor nadaje – myślę, że przesadne – znaczenie osiągnięciom fizyki. Fizycy od prawdy są równie daleko jak ekonomiści. Termodynamiczna interpretacja ekonomii jest niewątpliwie ciekawa; na tej drodze można odkryć wiele prawidłowości ekonomicznych. Analogia i izomorfizm jest podstawą nauki. Każda teoria jest jakimś pomiarem, a więc homomorfizmem, rzeczywistości w strukturę formalną. Odwzorowujemy obiekty realne w pojęcia abstrakcyjne. Nauka niewątpliwie upraszcza sprawy trudne i nie komplikuje tych prostych; taka jest istota homomorfizmu. Unikałbym – język Autora jest jak powiedziałem piękny – słów w rodzaju oksymoron, intermitencja *et cetera* bezpośrednio przyjętych z łaciny, greki lub angielskiego. Nie świadczą o uczoności, utrudniają lekturę, a najważniejsze – psują rytm języka polskiego. Wiele nierównoważnych definicji złożoności świadczy o młodości tego pojęcia i na klasykę potrzeba jeszcze poczekać. Proponuję w tej materii to, co wyżej napisałem: złożoność jest iteracją. Teoria chaosu pokazuje prostotę złożoności. Wszystko otrzymasz wielokrotnie iterując jedną funkcję. Za chaosem ekonomicznym niewątpliwie stoi porządek i harmonia fal Elliotta. Istotą jest – powtarzam już po wtóre – zasada równowagi: wirowanie stanu równowagi chwilowej wokół idealnego punktu, do którego zmierza układ.

Autor książki wnosi osobiste zaangażowanie i intuicyjne odczucia do swego naukowego dzieła. Poglądy Autora są mi bliskie i z nimi absolutnie się zgadzam. Na postęp nauki mają także często zasadniczy wpływ pomyłki i błędy uczonych. Jest na to wiele przykładów, a wymienię tylko Elliotta i Poincarego. Elliott wykrył spiralę, ale nie umieścił jej tam gdzie trzeba. Bez Elliotta nie byłoby teorii wirów ekonomicznych i spiralnego rozwoju objaśniającego cykliczność. Świat jest prosty, rządzonej jednym prawem – prawem równowagi: akcja jest reakcją. Chociaż znamy zasady ogólne, praktycznie trudno przewidzieć tor komety. Przy okazji omawiania chaosu Autor ładnie objaśnia głęboki i przez długie lata zapomniane twierdzenie Szarkowskiego o cykliczności. Prawa nauki mają tylko przybliżony charakter. Nigdy nie ma pewności realizacji określonego stanu i to zarówno w ekonomii jak i fizyce. Takie pojęcia jak wykładnik Hursta, wykładnik Lapunowa i inne pokrewne mają charakter techniczny – ułatwiają podejmowanie decyzji jak większość narzędzi formalnych. Świat istotnie jest lokalnie liniowy i gładki; gładkość oznacza istnienie pochodnej. Pochodna jest optymalną lokalną aproksymacją najbardziej brzydkiej nieliniowej funkcji. Słowo *najbardziej* nic tu nie znaczy. Ma sens czysto ekspresyjny. Wiara w liniowość natury jest stwierdzeniem w moim odczuciu bezzasadnym. Nie ma takiej wiary. Świat wydaje się gładki, gdy patrzymy z odpowiedniego dystansu lub całkowicie porwany, gdy patrzy-

my w mikroskali. Natura jest taka jaka jest. Owszem można powiedzieć, że istnieje powszechna wiara w różniczkowalność, czyli gładkość. Już sama ciągłość pozwala na lokalną aproksymację liniową, ale nie optymalną w sensie styczności. Liniowość obowiązuje w przestrzeniach liniowych. W ekonomii nie ma liniowości z formalnego punktu widzenia, bo nie ma dowolnie dużo rozporządzalnych zasobów; zamiast addytywności jest podaddytywność

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y)$$

kosztów lub nadaddytywność

$$f(x + y) \geq f(x) + f(y)$$

efektów – synergia. Współpraca zawsze jest pożądana – współpraca zwiększa produkt globalny; wszyscy są wygrani. świat jest jaki jest, czyli nieliniowy. Wzrost naturalny jest, jak wiemy, wykładniczy; ale taki wzrost może być krótkookresowy z powodu braku zasobów. Liniowość nie ma wiele wspólnego z determinizmem. Prawo nauki i warunki początkowe definiują układ stabilny, modele zaś mogą generować stabilność lub jej brak – zależy to od rodzaju modelu.

Autor niewątpliwie pokazuje, że ekonomia jest nauką barwną. Ekonomia jest także sztuką. Recenzowane dzieło jest wartościowe, godne polecenia. Autor jest przecież już znanym i cenionym w świecie naukowym twórcą. Wiele jest rzeczy ładnych i wartościowych w tej niezwyklej książce; jest to rzecz pożyteczna i piękna chociaż daleka od doskonałości. Pobudza do dyskusji, inspiruje twórczo; po jej przeczytaniu ma się ochotę do zaangażowania w te niezwykle badania, by albo wesprzeć Autora, albo z nim polemizować. Doskonałość jest poza zasięgiem ludzkich możliwości, ideałów Platońskich nie ma w świecie materialnym. Ale nauka ma tam dążyć. Autor o tym wie i chce być blisko doskonałości.

SPRAWOZDANIA

ANNA WITASZCZYK, ALEKSANDRA KUPIS-FIJAŁKOWSKA

SPRAWOZDANIE Z XXX KONFERENCJI WIELOWYMIAROWA ANALIZA STATYSTYCZNA 2011

W dniach 7-9 listopada 2011 r. w Centrum Szkoleniowo-Konferencyjnym Uniwersytetu Łódzkiego odbyła się XXX Konferencja Wielowymiarowa Analiza Statystyczna (MSA 2011), organizowana przez Katedrę Metod Statystycznych Wydziału Ekonomiczno-Socjologicznego Uniwersytetu Łódzkiego. Współorganizatorami konferencji byli: Polskie Towarzystwo Statystyczne, Komitet Statystyki i Ekonometrii Polskiej Akademii Nauk. Przewodniczącym Komitetu Organizacyjnego był prof. dr hab. Czesław Domański, natomiast sekretarzami – mgr Aleksandra Kupis-Fijałkowska i dr Anna Witaszczyk. Tematyka konferencji obejmowała: rozkłady wielowymiarowe, wnioskowanie statystyczne, metody nieparametryczne, metody klasyfikacji i dyskryminacji danych, analizę głównych składowych, regresję, metody Monte Carlo, metody bayesowskie, metody bootstrapowe, planowanie eksperymentów, zastosowania statystyki w naukach przyrodniczych, ekonomiczno-społecznych, finansach i ubezpieczeniach, demografii, kontroli jakości, zarządzaniu ryzykiem.

W konferencji uczestniczyli przedstawiciele następujących uczelni: Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu, Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Politechnika Opolska, Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Uniwersytet Szczeciński, Uniwersytet Łódzki. Uczestnikami konferencji były również osoby z następujących uczelni zagranicznych: Singapore Management University, Universite de Bourgogne, Mimar Sinan University of Fine Arts. W konferencji wzięło udział około 70 osób – pracowników i doktorantów uczelni. Ze względu na dydaktyczny charakter, słuchaczami byli również studenci kierunku studiów Informatyka i Ekonometria UŁ oraz doktoranci Wydziału Ekonomiczno-Socjologicznego.

Podczas sesji plenarnych, jak i równoległych, wygłoszono 46 referatów i dwa wykłady zaproszone.

Pierwsza z sesji plenarnych poświęcona została wybitnym polskim naukowcom związanym ze statystyką: Józefowi Kleczyńskiemu w 170 rocznicę urodzin (Czesław Domański, Uniwersytet Łódzki), Samuelowi Dicksteinowi w 160 rocznicę urodzin (Czesław Domański). Przedstawiono także sylwetki profesorów: Antoniego Łomnickiego (Mirośław Krzyśko, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu), Zbi-

gniewa Michałkiewicza (Jerzy T. Kowaleski, Uniwersytet Łódzki), Wiesława Sadowskiego (Władysław Welfe, Uniwersytet Łódzki), Zofii Zarzyckiej (Wacława Starzyńska, Uniwersytet Łódzki), Piotra Chrzana (Janusz Wywiół, Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach), Zbigniewa Czerwińskiego (Grażyna Dehnel, Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu), Wiesława Wagnera (Bronisław Ceranka, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu).

Wykłady zaproszone wygłosili: prof. dr hab. Stanisława Bartosiewicz (Wyższa Szkoła Bankowa we Wrocławiu) – *Kilka „nieuczesanych” myśli na temat traktatu o dynamice, stanie i perspektywach rozwoju polskiego rolnictwa*, prof. dr hab. Mirosław Krzyśko – *Wersja jądrowa funkcjonalnych składowych głównych*.

Zagraniczni uczestnicy konferencji wygłosili pięć referatów: Muhammad Aslam (Universite de Bourgogne, Dijon) – *Robust Inference for Linear Regression Model in the Presence of Heteroscedasticity and Multicollinearity*; Sajjad Haider Bhatti (Universite de Bourgogne, Dijon) – *A Panel Data Analysis of the Relationship between GDP per Capita and its Shares of Consumption, Government Expenditures and Investment*; Kian-Guan Lim (Singapore Management University) – *Statistical Tests of Conditional Shortfalls and Change-Point Estimation in Risk Management*; Samaradasa Weerahandi (Pfizer Inc., New York) – *Generalized Point Estimation with Application to Mixed Models*; Meral Yay (Mimar Sinan University of Fine Arts) – *A Content Analysis of the Representation of the European Uprising in Turkish News Media*.

Ponadto zaprezentowano następujące referaty (według nazwisk autorów w kolejności alfabetycznej:

Aleksandra Baszczyńska (Uniwersytet Łódzki), *Uwagi o jądrowym teście symetryczności*. W pracy przedstawiono wybrane statystyczne testy wykorzystywane do weryfikacji hipotezy o symetryczności rozkładu zmiennej losowej. Szczegółowej analizie poddano test symetryczności oparty o metodę jądrową. Porównano własności zaprezentowanych testów symetryczności oraz zastosowano je go analizy rozkładu wskaźnika rozwoju społecznego (HDI).

Jacek Białek (Uniwersytet Łódzki), *Propozycja indeksu cen*. Przedstawiono i omówiono nową formułę indeksu cen. Pokazano, iż proponowana formuła spełnia podstawowe testy pochodzące z aksjomatycznej teorii indeksów. Na przykładzie porównano omawiany indeks z indeksami cen znanymi z literatury

Beata Bieszk-Stolorz, Iwona Markowicz (Uniwersytet Szczeciński), *Aktywność ekonomiczna kobiet i mężczyzn w Polsce. Interpretacja modelu logitowego z jedną i z wieloma zmiennymi objaśniającymi*. Celem pracy było zbadanie wpływu płci na szansę aktywności zawodowej oraz na szansę posiadania zatrudnienia. Badaniami objęto ludność Polski w wieku 15 lat i więcej w 2010 roku (31741 tys. osób). Punktem wyjścia analizy była budowa modeli uzależniających aktywność zawodową oraz posiadanie zatrudnienia jedynie od płci. Następnie rozważano modele, w których zmiennymi

objaśniającymi są następujące pary: płeć i miejsce zamieszkania, płeć i wykształcenie, płeć i wiek.

Justyna Brzezińska (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach), *Kryteria wyboru modelu w analizie logarytmiczno-liniowej* Analiza logarytmiczno-liniowa jest metodą przeznaczoną do badania zależności pomiędzy zmiennymi niemetrycznymi w tablicy kontyngencji. Metoda ta pozwala na analizę dowolnej liczby zmiennych, a także na uwzględnienie interakcji zachodzących pomiędzy nimi. W analizie logarytmiczno-liniowej modelowane są liczebności w poszczególnych komórkach tablicy. Celem pracy była prezentacja i porównanie kryteriów wyboru modelu. Podstawowymi kryteriami wyboru modelu są statystyka chi-kwadrat, iloraz wiarygodności oraz kryteria informacyjne *AIC* i *BIC*. Zaprezentowana została także metoda Aitkina, która przeznaczona jest do porównywania jakości dopasowania modeli o dużej liczbie zmiennych.

Bronisław Ceranka, Małgorzata Graczyk (Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu), *Konstrukcja E-optymalnego regularnego układu wagowego*. Rozważano model liniowy $y = Xw + e$, który opisuje w jaki sposób wyznaczyć nieznane miary p obiektów w oparciu o n operacji pomiarowych w eksperymencie przeprowadzonym zgodnie z macierzą układu X o elementach $x_{ij} = 0, 1$, $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,p$, gdzie y jest losowym wektorem obserwowanych pomiarów, w jest wektorem nieznanymi miar obiektów. Zakłada się, że nie ma błędów systematycznych, że są nieskorelowane i mają różne wariancje, tzn. dla losowego wektora błędów e , $E(e) = \mathbf{0}_n$ i $E(ee') = \sigma^2 G$, gdzie G jest znaną, dodatnio określoną macierzą diagonalną. Regularny układ E-optymalny jest to układ, w którym maksymalna wartość własna macierzy kowariancji jest minimalna i osiąga dolne ograniczenie. W pracy przedstawiono nowe metody konstrukcji regularnego E-optymalnego sprężynowego układu wagowego w oparciu o macierze incydencji układów o grupach podzielnych o tym samym schemacie partnerstwa.

Chmieleńska Magdalena (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach), *Wpływ wyboru metody sprawdzania na całkowite koszty kontroli jakości*. Kontrola odbiorcza jest powszechnie stosowana w przedsiębiorstwach produkcyjnych, gdyż zmniejsza ona prawdopodobieństwo przekazania klientowi wadliwej partii produktów. Z wyróżnionych dwóch sposobów kontroli odbiorczej - według oceny alternatywnej i według oceny właściwości liczbowych - częściej wykorzystywana w praktyce gospodarczej jest kontrola według oceny alternatywnej. Celem pracy było podkreślenie wymiernych korzyści związanych z stosowaniem planów kontroli odbiorczej według liczbowej oceny właściwości, w szczególności w wymiarze ekonomicznym. Postawiona została hipoteza głosząca, iż plany odbiorcze oparte na ocenie właściwości liczbowych generują niższe ogólne koszty kontroli odbiorczej niż plany odbiorcze oparte na ocenie alternatywnej, przy tych samych wymaganiach producenta i odbiorcy. Rozważania zostały uzupełnione o symulacje komputerowe przeprowadzone w programie R.

Joanna Dębicka (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), *Macierzowe podejście do analizy portfela polis ubezpieczeń wielostanowych*. Celem pracy było przedstawienie ogólnego podejścia umożliwiającego wyznaczenie momentów zdyskontowanych przyszłych przepływów pieniężnych wynikających z zawarcia umowy ubezpieczenia wielostanowego ze stałą i stochastyczną stopą procentową (zarówno dla umowy indywidualnej jak i portfela polis). W celu uproszczenia zapisu i obliczeń numerycznych zaproponowana została notacja macierzowa. Wykorzystanie notacji macierzowej umożliwiło efektywny zapis w przypadku formułowania problemów aplikacyjnych. W przypadku ubezpieczeń grupowych, pokazano jak zapis macierzowy wykorzystuje się w analizie wpływu liczebności portfela polis na wysokość składki i narzutu bezpieczeństwa, zarówno dla grupy jednorodnej jak i niejednorodnej (w przypadku małego i dużego portfela polis). Teoria ilustrowana jest przykładami numerycznymi, w których struktura probabilistyczna modeli, związanych z analizowanymi ubezpieczeniami, wyznaczona została w oparciu o Tablice Trwania Życia, a proces stopy procentowej modelowany jest przez proces Wienera i proces Ornsteina-Uhlenbeck'a.

Andrzej Dudek (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), *Klasyfikacja dużych zbiorów danych. Problemy, metody, algorytmy*. Badacze analizujący przy pomocy metod analizy skupień duże (powyżej 10 000 obiektów) zbiory danych, stają często przed problemem złożoności obliczeniowej algorytmów, uniemożliwiającej niekiedy przeprowadzenie analizy w akceptowalnym czasie. Jednym z rozwiązań tego problemu jest stosowanie mniej złożonych obliczeniowo algorytmów (hierarchiczne aglomeracyjne, k-średnich), które z kolei mogą w wielu sytuacjach dawać zdecydowanie gorsze rezultaty niż np. algorytmy wykorzystujące dekompozycję względem wartości własnych. Rezultaty rzeczywistych analiz tego typu zbiorów są więc zazwyczaj kompromisem pomiędzy jakością a możliwościami obliczeniowymi komputerów. W pracy podjęto próbę przedstawienia aktualnego stanu wiedzy na temat klasyfikacji dużych zbiorów danych oraz wskazania dróg rozwoju i problemów otwartych.

Wojciech Gamrot (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach), *O estymatorze Fattoriniego*. Empiryczny estymator Horvitz-Thompsona wartości globalnej cechy w populacji skończonej konstruowany jest poprzez zastąpienie nieznanymi prawdopodobieństw inkluzji rzędu pierwszego charakteryzujących schemat losowania próby oszacowaniami. Oszacowania te wyznaczane są w eksperymencie symulacyjnym polegającym na wielokrotnym losowaniu próby według tego samego schematu i zliczaniu wystąpień każdego z elementów w próbie. Zaproponowany przez Fattoriniego (2006) estymator prawdopodobieństwa inkluzji obliczany jest jako frakcja z próby zmodyfikowana poprzez dodanie do licznika i mianownika stałej równej jedności. W referacie rozważane były inne sposoby ustalania tej stałej i ich wpływ na własności oszacowań wartości globalnej.

Eugeniusz Gatnar (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach), *Bank centralny w systemie statystyki publicznej*. W referacie została omówiona rola Narodowego Banku Polskiego, który jest bankiem centralnym Polski oraz członkiem Europejskiego Systemu Banków Centralnych (ESCB) w systemie statystyki publicznej w Polsce.

Elżbieta Gołata, Grażyna Dehnel (Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu), *Społeczny wymiar procesów demograficznych*. Konsekwencje przemian demograficznych rozpatrywać można we wszystkich wymiarach, poczynając od najmniejszej jednostki społecznej jaką jest rodzina, gospodarstwo domowe, poprzez ujęcie lokalne, regionalne oraz w skali globalnej całej gospodarki łącznie z powiązaniami międzynarodowymi. Przedmiotem referatu była próba określenia reakcji samorządów na wyzwania wynikające ze zmieniającej się sytuacji demograficznej, w tym w szczególności na proces starzenia się społeczeństwa. Obok podstawowych metod analizy demograficznej, w badaniu wykorzystano metody wielowymiarowej analizy statystycznej, w tym porównawczej, w odniesieniu do danych różnych źródeł informacji, przede wszystkim ewidencji ruchu naturalnego ludności, Banku Danych Lokalnych GUS, ale także badań specjalnych, jak np. *Przemiany demograficzne – szczególne wyzwanie dla urzędów miast i gmin w Polsce*.

Małgorzata Graczyk (Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu), *Regularny A-optimalny sprężynowy układ wagowy o skorelowanych błędach*. W pracy rozważana była tematyka estymacji nieznanymi miar obiektów w sprężynowym układzie wagowym. Założono, że błędy są jednakowo skorelowane. Podano warunki określające istnienie A-optimalnego regularnego sprężynowego układu wagowego oraz metodę konstrukcji. Do konstrukcji macierzy układu wykorzystano macierze incydencji układów zrównoważonych o blokach niekompletnych.

Wioletta Grzenda (Szkoła Główna Handlowa w Warszawie), *Znaczenie informacji a priori w bayesowskich parametrycznych modelach przeżycia*. W pracy przedstawiono parametryczne modele przeżycia w ujęciu bayesowskim. Podejście bayesowskie wymaga zadania rozkładów *a priori* dla szacowanych parametrów modelu. W celu pokazania znaczenia informacji *a priori* oraz jej wpływu na rozkład *a posteriori* oszacowano kilka parametrycznych modeli przeżycia przy różnych rozkładach *a priori*. Przedmiot badań stanowiły determinanty długości czasu pozostawania bez pracy. Estymację wszystkich modeli przeprowadzono w systemie SAS z wykorzystaniem metod Monte Carlo opartych na łańcuchach Markowa, w szczególności próbnika Gibbsa.

Joanna Kisielińska (Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie), *Dokładna metoda bootstrapowa na przykładzie estymacji średniej i wariancji*. Metoda bootstrapowa polega na wtórnym próbkowaniu pierwotnej próby losowej pobranej z populacji o nieznanym rozkładzie. W referacie pokazano, że ze względu na postęp w technice komputerowej wtórne próbkowanie nie jest aktualnie konieczne, jeśli

rozmiar próby nie jest zbyt duży. Możliwe jest wówczas automatyczne wygenerowanie wszystkich możliwych prób wtórnych i obliczenie wszystkich realizacji wybranej statystyki. Uzyskany rozkład można wykorzystać do punktowej lub przedziałowej estymacji parametrów populacji, bądź testowania hipotez. Metodę zastosowano do szacowania średniej i wariancji. Porównanie uzyskanych rozkładów z rozkładami granicznymi potwierdziło poprawność dokładnej metody bootstrapowej.

Paweł Kobus (Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie), *Wykorzystanie funkcji kopula do modelowania łącznego rozkładu plonów roślin uprawnych*. Celem pracy było sprawdzenie możliwości wykorzystania funkcji kopula do modelowania zależności pomiędzy plonami i cenami roślin uprawnych, w kontekście ryzyka dochodowego w gospodarstwie rolnym. Brak precyzji w modelowaniu wspomnianych zależności może prowadzić do poważnych błędów w optymalizacji struktury gospodarstwa i wyższego ryzyka niż zakładano. W pracy porównano popularne, w modelach gospodarstw rolnych, podejście oparte na macierzy korelacji z podejściem wykorzystującym funkcję kopula.

Grzegorz Kończak (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach), *O testowaniu kierunkowych hipotez w analizie jednorodności danych*. Test jednorodności chi-kwadrat jest wykorzystywany gdy ze względu na jedną zmienną jest analizowanych kilka prób. Jeżeli dane są jednorodne, to proporcje obserwacji dla j -tej kategorii będą jednakowe dla wszystkich wyróżnionych kategorii. W przypadku tablicy o wymiarach 2×2 możliwe jest rozważanie kierunkowej hipotezy alternatywnej. W przypadku tablic wielodzielczych o większych wymiarach możliwe jest rozważanie wielokrotnych alternatywnych hipotez kierunkowych. W pracy została przedstawiona propozycja testu pozwalającego na weryfikację takich hipotez. Analizę własności testu przeprowadzono z wykorzystaniem symulacji komputerowych.

Jerzy Korzeniewski (Uniwersytet Łódzki), *Ocena efektywności metody Talavery wybierania zmiennych w analizie skupień na empirycznych zbiorach danych*. Talavera zaproponował metodę wybierania zmiennych tworzących strukturę skupień w zbiorze danych dla zbiorów, w których występują tylko zmienne mierzone na skali nominalnej. W pracy zbadano tę metodę na kilku empirycznych zbiorach opierając ocenę na tym jak spisywała się metoda w połączeniu z ustalonym sposobem grupowania danych (algorytm COBWEB). W innych podejściach do tego samego zagadnienia autorzy starają się oprzeć wybór zmiennych na samym uporządkowaniu zbioru zmiennych bez odwoływania się do grupowania obserwacji. W referacie badano także efektywność metody, również w odniesieniu do empirycznych zbiorów danych, uzależnioną tylko od uporządkowania zmiennych, opartą na kryterium największego skoku. Rozważano ponadto zbiory z niektórymi zmiennymi mierzonymi na mocniejszych skalach po uprzedniej dyskretyzacji zmiennych.

Mariusz Kubus (Politechnika Opolska), *O wyborze postaci modelu w wybranych metodach regularyzowanej regresji liniowej*. W ostatnich latach można zaobserwować dynamiczny rozwój różnych postaci regularyzacji w modelach liniowych. Wprowadzenie kary za duże wartości współczynników skutkuje zmniejszeniem wariancji oraz eliminacją niektórych zmiennych. Dodatkową korzyścią tych metod jest możliwość zastosowania w szczególnym przypadku, gdy liczba zmiennych jest większa od liczby obserwacji. Selekcja zmiennych za pomocą regularyzowanych modeli liniowych jest w problemach wielowymiarowych preferowana wobec popularnego podejścia polegającego na przeszukiwaniu przestrzeni cech i ocenie podzbiorów zmiennych za pomocą kryterium jakości modelu (*wrappers*). Przyczyną są mniejsze koszty obliczeń i mniejsza podatność na nadmierne dopasowanie. Celem pracy była ocena empiryczna kryteriów wyboru postaci modelu.

Marta Małecka (Uniwersytet Łódzki), *GARCH process application in risk valuation for WIG20 index*. W pracy przedstawiono zastosowanie modelu GARCH w estymacji wartości narażonej na ryzyko dla indeksu WIG20. Metoda ta została porównana z pięcioma innymi wykorzystywanymi w tym zakresie: metodą wariancji-kowariancji, symulacją historyczną, RiskMetrics, symulacją Monte Carlo, metodą bootstrapową. Celem referatu było wykazanie wyższości modelu GARCH nad innymi metodami oceny ryzyka.

Magdalena Makuch (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach), *O strategii losowania grupowego*. Schemat losowania grupowego jest jednym z ciekawszych schematów losowania. Zakłada się, że populacja jest podzielona na G rozłącznych grup, do próby losujemy grupy, a nie pojedyncze elementy. Wiadomo, że wariancja średniej z próby grupowej zależy od sposobu podziału populacji na grupy. Podziału dokonujemy na podstawie cechy dodatkowej, obserwowanej w całej populacji. Zakładamy, że cecha dodatkowa jest silnie skorelowana z cechą badaną, której średnią należy oszacować. Wybiera się ten podział, który prowadzi do minimalizacji wariancji średniej z próby grupowej. W pracy rozważono sześć sposobów doboru elementów do próby.

Małgorzata Misztal (Uniwersytet Łódzki), *Kilka uwag o imputacji danych z wykorzystaniem metody „missForest”*. W pracy Stekhovena i Bühlmann (2011) zaproponowano nową iteracyjną metodę imputacji (nazwaną „missForest”) opartą na metodzie *Random Forests* Breimana (2001). W pracy omówiono metodę „missForest” i porównano z nią kilka wybranych technik postępowania w sytuacji występowania braków danych. W tym celu wykorzystano podejście symulacyjne generując różne proporcje i mechanizmy powstawania braków danych w zbiorach danych pochodzących z repozytorium baz danych na Uniwersytecie Kalifornijskim w Irvine.

Dorota Pekasiewicz (Uniwersytet Łódzki), *Bayesowskie testy statystyczne dla wskaźnika struktury dla niezależnego i zależnego schematu losowania próby*. W wyniku

zastosowania bayesowskich testów statystycznych podejmuje się decyzję o akceptacji hipotezy, dla której ryzyko a posteriori jest mniejsze. Ryzyko a posteriori zależy od rozkładu a priori rozważanego parametru, funkcji straty i schematu losowania próby. W pracy przedstawiono bayesowskie testy statystyczne dla wskaźnika struktury, w przypadku różnych rozkładów a priori, przy niezależnym i zależnym schemacie losowania próby. Oprócz rozważań teoretycznych, zaprezentowano wyniki analiz symulacyjnych dotyczących własności tych testów.

Marcin Pełka (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), *Klasyfikacja danych symbolicznych z wykorzystaniem podejścia wielomodelowego*. Obiekty symboliczne, w odróżnieniu od obiektów w ujęciu klasycznym, mogą być opisywane przez wiele różnych typów zmiennych. Oprócz zmiennych w ujęciu klasycznym (metrycznych lub niemetrycznych) mogą być opisywane przez zmienne interwałowe, zmienne wielowariantowe i zmienne wielowariantowe z wagami, a także zmienne strukturalne. W zagadnieniu klasyfikacji danych symbolicznych może być z powodzeniem stosowane podejście wielomodelowe, tj. łączenie wyników wielu modeli w jeden model zagregowany. Celem pracy było przedstawienie wyników klasyfikacji danych symbolicznych z wykorzystaniem podejścia wielomodelowego na przykładzie różnych zbiorów danych symbolicznych. W części empirycznej przedstawiono wyniki klasyfikacji przy zastosowaniu różnorodnych modeli bazowych.

Robert Pietrzykowski (Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego), *Zastosowanie modyfikacji macierzy wag w badaniu zależności przestrzennych*. Podstawowym elementem analiz przestrzennych jest określenie interakcji pomiędzy badanymi jednostkami przestrzennymi: krajem, województwem, powiatem, gminą, miastem i itd. Zgodnie z prawem Toblera jednostki przestrzenne sąsiadujące ze sobą powinny bardziej oddziaływać na siebie niż te, które znajdują się dalej. Powiązania przestrzenne należy oprzeć o definicję sąsiedztwa, którą można określić przy pomocy tzw. macierzy wag. Określenie macierzy wag w analizach przestrzennych odgrywa kluczową rolę. Ponieważ macierz wag określa się a priori, a jakość dalszych analiz zależy od jej specyfikacji, dobór odpowiedniej macierzy wag stanowi poważny problem metodologiczny. W pracy zaproponowano modyfikację macierzy wag, która zawierałaby interakcje związane z położeniem badanej jednostki przestrzennej, ale również uwzględniałaby wagi związane z wybranymi wieloma cechami.

Krystyna Pruska (Uniwersytet Łódzki), *Modele probitowe i logitowe w procesie estymacji frakcji dla małego obszaru*. W pracy tej rozpatrywano estymację frakcji dla małego obszaru na podstawie modeli probitowych i logitowych. Przedstawiono wyniki eksperymentów symulacyjnych w przypadku różnych schematów losowania próby (losowanie niezależne i zależne). Próby losowano z całej populacji lub z podpopulacji. Porównywano błędy estymacji frakcji dla małego obszaru.

Dorota Raczkiewicz (Szkola Główna Handlowa w Warszawie), *Kariery: edukacyjna, zawodowa i rodzinna kobiet w Polsce*. Celem pracy była analiza statystyczna syntetycznych wskaźników na poziomie makro, opisujących kariery: edukacyjną, zawodową i rodzinną kobiet w Polsce, oraz analiza powiązań między tymi wskaźnikami karier na podstawie dostępnych danych statystycznych.

Dorota Rozmus (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach), *Porównanie dokładności taksonomii spektralnej oraz zagregowanych algorytmów taksonomicznych opartych na macierzy współwystąpień*. Stosując metody taksonomiczne w jakimkolwiek zagadnieniu klasyfikacji ważną kwestią jest zapewnienie wysokiej poprawności wyników grupowania. Od niej bowiem zależeć będzie skuteczność wszelkich decyzji podjętych na ich podstawie. Stąd też w literaturze wciąż proponowane są nowe rozwiązania, które mają przynieść poprawę dokładności grupowania w stosunku do tradycyjnych metod. Przykładem mogą tu być metody polegające na zastosowaniu podejścia zagregowanego oraz algorytmy spektralne. Głównym celem tego referatu było porównanie dokładności zagregowanych i spektralnych algorytmów taksonomicznych. W pracy rozważano tylko specyficzną klasę metod agregacji, która oparta jest na macierzy współwystąpień.

Jacek Stelmach (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach), *O testowaniu różnic pomiędzy populacjami za pomocą wektorów własnych*. Wykrywanie różnic pomiędzy kilkoma populacjami jest jednym z częściej rozważanych zagadnień w badaniach statystycznych. Najbardziej znaną i dobrze opisaną w literaturze jest wielowymiarowa analiza wariancji (MANOVA). Metoda ta, jako parametryczna wymaga spełnienia założeń o zgodności badanych populacji z rozkładem wielowymiarowym normalnym oraz homogeniczności macierzy wariancji/kowariancji wszystkich populacji. Oprócz trudności, jakie sprawia weryfikacja powyższych założeń, szczególnie dla prób o niewielkich licznosciach, bardzo często założenie o zgodności z rozkładem normalnym jest w rzeczywistości nierealne (na przykład w zjawiskach biologicznych lub fizycznych). W pracy zaprezentowano odmienne podejście, wykorzystujące testy permutacyjne – co zwalnia z weryfikacji wspomnianych założeń, gdyż możliwe jest stosowanie dowolnych, niestabilizowanych a dopasowanych do zjawiska statystyk testowych. W proponowanych statystykach wykorzystano fakt, że jeśli badane populacje nie różnią się od siebie, to także ich pierwsze wektory własne nie powinny być istotnie różne. Moc proponowanych testów porównano z mocą innych testów permutacyjnych wykorzystujących analizę odległości i analizę zmiennych oraz kilkoma najpopularniejszymi odmianami metody MANOVA. Do analiz wykorzystano symulację komputerową. Otrzymane wyniki zweryfikowano badając kilka przykładowych rzeczywistych zestawów prób wielowymiarowych.

Małgorzata Szerszunowicz (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach), *O pewnej konstrukcji planów eksperymentów czynnikowych*. Metody planowania eksperymentów są istotnym narzędziem doskonalenia procesów produkcyjnych wykorzystującym meto-

dy probabilistyczne i statystyczne. Planowanie eksperymentów pozwala na odpowiednie ustawienie parametrów procesu produkcyjnego oraz określenie wpływu czynników na jego wyniki. Ponadto metody planowania eksperymentów umożliwiają poprawę ekonomicznych rezultatów badanego procesu. Przedmiotem pracy było zagadnienie wyboru optymalnego układu doświadczeń wówczas, gdy eksperymentator, ze względu na koszty bądź warunki, nie ma możliwości realizacji kompletnego planu doświadczeń. Zaproponowano metodę wyznaczania kolejnych punktów planu, w których należy przeprowadzić doświadczenie. Zastosowania prezentowanej metody przedstawione zostały dla wybranych planów eksperymentów czynnikowych. Własności metody zostały sprawdzone w analizach symulacyjnych.

Janusz Wywiół (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach), *O estymacji średniej w domenie populacji*. W pracy średnią w domenie estymowano za pomocą statystyki Horvitz-Thompsona. Plan losowania próby był proporcjonalny do rozstępu z próby zmiennej dodatkowej. Badania symulacyjne wskazały, że rozważana strategia estymacji daje dokładniejsze oceny średniej w domenie niż zwykła średniej z próby prostej identyfikowanej w domenie.

Artur Zaborski, Marcin Pełka (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), *Geometryczna prezentacja preferencji z wykorzystaniem analizy PROFIT i programu R*. PROFIT jest przykładem „zewnętrznej” wektorowej metody map preferencji. Jest ona połączeniem skalowania wielowymiarowego i analizy regresji wielorakiej. Danymi wejściowymi w analizie PROFIT są zarówno współrzędne punktów reprezentujących obiekty na mapie percepcyjnej jak również oceny preferencji obiektów ze względu na wybrane zmienne. Dla konfiguracji punktów reprezentujących obiekty otrzymanej za pomocą skalowania wielowymiarowego przeprowadza się analizę regresji wielorakiej, w której zmiennymi objaśniającymi są współrzędne obiektów na mapie percepcyjnej, a zmiennymi zależnymi oceny marek ze względu na poszczególne cechy. Program dokonuje rozmieszczenia na mapie percepcyjnej zmiennych w postaci wektorów wskazujących kierunek maksymalnej preferencji ze względu na daną zmienną. Celem pracy była prezentacja analizy PROFIT oraz funkcji programu R, pozwalającej na jej realizację. Sposób użycia funkcji zilustrowano przykładem badania preferencji.

Wojciech Zieliński (Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie), *Porównanie przedziałów ufności dla wskaźnika struktury w skończonych populacjach*. W pracy porównano trzy przedziały ufności dla frakcji obiektów wyróżnionych w populacji skończonej: jeden wykorzystujący w swojej konstrukcji rozkład hipergeometryczny oraz dwa bazujące na przybliżeniach tego rozkładu – przybliżeniu rozkładem dwumianowym oraz przybliżeniu rozkładem normalnym.

Tomasz Żądło (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach), *O estymacji parametrów pewnego modelu dla danych wielookresowych*. W pracy rozważano problem modelowania profili wielookresowych przy założeniu, że populacja i przynależność elementów

domen mogą zmieniać się w czasie. Proponowany model jest przypadkiem szczególnym ogólnego modelu liniowego i ogólnego mieszanego modelu liniowego. W modelu tym uwzględniono dwa wektory składników losowych spełniające odpowiednio założenia przestrzennego modelu autoregresyjnego i modelu autoregresyjnego rzędu pierwszego w czasie. W symulacji rozważano dokładność estymatorów parametrów modelu uzyskanych metodą największej wiarygodności z ograniczeniami.

Teksty referatów, po pozytywnej recenzji, zostaną opublikowane w *Acta Universitatis Lodzensis, Folia Oeconomica*, „Multivariate Statistical Analysis”, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.

SPIS TREŚCI

Artur Prędkie – Wybrane metody estymacji w semiparametrycznym modelu granicznym	215
Agnieszka Lipieta – The economy with production and consumption systems changing in time	233
Aneta Zglińska-Pietrzak – Zastosowanie metody bootstrapowej w analizie portfelowej	246
Michał Przybyliński – Wrażliwość krajów Unii Europejskiej na zmiany cen zewnętrznych	259
Sylwester Bejger – Kartel producentów cementu w Indiach – próba identyfikacji	273
Agata Źółtaszek – Private financing of health care in Poland – microsimulation model . . .	290
Marcin Pełka, Aneta Rybicka – Pomiar i analiza preferencji wyrażonych z wykorzystaniem pakietu conjoint programu R	302

POLSCY STATYSTYCY I MATEMATYCY

Józef Pocięcha – Doktorat honorowy Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie dla Profesora Krzysztofa Jajugi	316
Krzysztof Jajuga – Wykład doktoranta	322

RECENZJE

Antoni Smoluk – Recenzja książki Aleksandra Jakimowicza ”Źródła niestabilności struktur rynkowych”	333
--	-----

SPRAWOZDANIA

Anna Witaszczyk, Aleksandra Kupis-Fijałkowska – Sprawozdanie z XXX Konferencji Wielowymiarowa Analiza Statystyczna 2011	340
---	-----

CONTENTS

Artur Prędk i – Selected Estimation Methods in the Semiparametric Frontier Model	215
Agnieszka Lipieta – The Economy with Production and Consumption Systems Changing in Time.....	233
Aneta Zglińska-Pietrzak – Application of Bootstrap Method for Portfolio Analysis....	246
Michał Przybyliński – Sensitivity of the EU Countries for Changes in External Prices ...	259
Sylwester Bejger – Indian Cement Cartel – An Attempt of Detection	273
Agata Żółtaszek – Private Financing of Health Care in Poland – Microsimulation Model ..	290
Marcin Pełka, Aneta Rybicka – The Evaluation and Analysis of Revealed Preferences with Application of R Package Conjoint	302

POLISH STATISTICIANS AND MATHEMATICIANS

Józef Pocięcha – Honorary Doctorate of the Cracow University of Economics for Professor Krzysztof Jajuga.....	316
Krzysztof Jajuga – Lecture by Honorary Doctor.....	322

REVIEWS

Antoni Smoluk – Book review: Sources of Instability of Market Structures by Aleksander Jakimowicz	333
---	-----

REPORTS

Anna Witaszczyk, Aleksandra Kupis-Fijałkowska – Report of the XXX Conference Multivariate Statistical Analysis 2011	340
---	-----