

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET STATYSTYKI I EKONOMETRII

PRZEGLĄD STATYSTYCZNY

STATISTICAL REVIEW

TOM 60

1

2013

WARSZAWA 2013

WYDAWCA

Komitet Statystyki i Ekonometrii Polskiej Akademii Nauk

RADA REDAKCYJNA

Andrzej S. Barczak, Marek Gruszczyński, Krzysztof Jajuga, Stanisław M. Kot, Tadeusz Kufel,
Władysław Milo (Przewodniczący), Jacek Osiewalski, Aleksander Welfe, Janusz Wywiół

KOMITET REDAKCYJNY

Magdalena Osińska (Redaktor Naczelny)
Marek Walesiak (Zastępca Redaktora Naczelnego)
Piotr Fiszeder (Sekretarz Naukowy)
Michał Majsterek (Redaktor)
Anna Pajor (Redaktor)

Wydanie publikacji dofinansowane przez Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego

© Copyright by Komitet Statystyki i Ekonometrii PAN

Strona WWW „Przegląd Statystyczny”:
<http://www.przegladstatystyczny.pan.pl>

Nakład: 250 egz.

PAN Warszawska Drukarnia Naukowa
00-056 Warszawa, ul. Śniadeckich 8
Tel./fax: +48 22 628 76 14

SPIS TREŚCI

Od Redakcji	5
Piotr Dudziński – Wpływ awersji do ryzyka na wybór prawnika – interpretacja za pomocą ryzykowności w sensie Rothschilda – Stiglitz	7
Agnieszka Kiedrowska – Struktura terminowa stóp procentowych w Polsce – estymacja i identyfikacja kształtujących ją czynników	21
Grzegorz Perczak, Piotr Fiszeder – Estymacja wariancji arytmetycznego ruchu Browna na podstawie znanych wartości minimum, maksimum, końcowej oraz dryfu	39
Michał Konopczyński – Stabilność małych gospodarek wchodzących do unii monetarnej w świetle pewnego modelu behawioralnego	63
Kesra Nermend, Małgorzata Tarczyńska-Łuniewska – Badanie jednorodności przestrzennej i czasowej rozwoju obiektów społeczno-gospodarczych	85

POLSCY STATYSTYCY I MATEMATYCY

Władysław Milo – Prof. dr hab. Władysław Welfe – Uczony, Nauczyciel, Organizator	101
Jan Mielniczuk – Wkład Polaków w rozwój statystyki matematycznej i stosowanej po drugiej wojnie światowej	109

SPRAWOZDANIA

Krzysztof Jajuga, Joanicjusz Nazarko, Marek Walesiak – Sprawozdanie z Konferencji Naukowej nt. „Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania”	121
Jadwiga Suchecka, Emilia Modrąka – Sprawozdanie z II Międzynarodowej Konferencji Naukowej nt. „Ekonometria Przestrzenna i Regionalne Analizy Ekonomiczne”	143

CONTENTS

From the Editors	5
Piotr Dudziński – Effect of Increase in Risk-Aversion on the Choice of a Lawyer – Interpretation in the Context of Rothschild-Stiglitz Riskiness	7
Agnieszka Kiedrowska – Term Structure of Interest Rates in Poland – Estimation and Identification of the Factors Determining its Shape	21
Grzegorz Perczak, Piotr Fiszeder – Estimation of Arithmetic Brownian Motion Variance when Values of Minimum, Maximum, Finish and Drift are Known	39
Michał Konopczyński – The Stability of Small Economies in the Monetary Union in the Light of a Simple Behavioral Model	63
Kesra Nermend, Małgorzata Tarczyńska-Łuniewska – Study of Spatial and Temporal Uniformity of Socioeconomic Objects Development	85

POLISH STATISTICIANS AND MATHEMATICIANS

Władysław Milo – Professor Władysław Welfe – Scholar, Master, Organizer	101
Jan Mielniczuk – The Contribution of Poles to the Development of Mathematical and Applied Statistics after the Second World War	109

REPORTS

Krzysztof Jajuga, Joanicjusz Nazarko, Marek Walesiak – „Classification and Data Analysis – Theory and Applications” – SKAD2012 Conference Report	121
Jadwiga Suchecka, Emilia Modrąka – Report on the II International Conference “Spatial Econometrics and Regional Economic Analysis”	143

OD REDAKCJI

Szanowni Państwo,

w 2012 roku Redakcja Czasopisma „Przegląd Statystyczny” wydała cztery numery zwykle z częstotliwością kwartalną oraz dwutomowy numer specjalny, poświęcony wyjątkowemu wydarzeniu, jakim był Kongres Statystyki Polskiej zorganizowany z okazji 100-lecia Polskiego Towarzystwa Statystycznego w Poznaniu. Łącznie w roczniku opublikowano 45 artykułów naukowych, w tym 20 w numerze specjalnym oraz 7 w języku angielskim. Publikacje te dostępne są na stronie internetowej Czasopisma.

Wszystkie publikacje poddane zostały procedurze recenzji, której zasady opublikowane są na stronie www Czasopisma. Procent odrzuceń prac nadesłanych do publikacji wyniósł w ostatnim roku 30, przy czym niektóre z nich dotyczyły niezgodności z profilem Czasopisma, inne zaś związane były z negatywną oceną anonimowych recenzentów.

W 2012 r. Czasopismo „Przegląd Statystyczny” zostało umieszczone w części B wykazu czasopism naukowych, opublikowanego przez MNiSW, uzyskując 7 punktów za publikację.

Czasopismo towarzyszyło ponadto środowisku naukowemu w wielu konferencjach naukowych, o czym świadczą zamieszczane w nim sprawozdania z tychże wydarzeń. Publikowane na łamach Przeglądu Statystycznego recenzje książek także mają charakter opiniotwórczy i są elementem niezbędnej w środowisku dyskusji naukowej.

Rok 2012 przyniósł szereg wydarzeń dotyczących bezpośrednio środowiska statystyków i ekonometryków w Polsce. Pożegnaliśmy w nim tak znaczące i zasłużone osobowości, jakimi byli Prof. dr hab. Michał Kolupa czy Prof. dr hab. Kazimierz Zajac. W roku 2012 Prof. dr hab. Krzysztof Jajuga uzyskał zaszczytny tytuł doktora honoris causa Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie. Informowaliśmy o tym w kolejnych numerach Przeglądu.

Początek roku 2013 przyniósł kolejną dotkliwą stratę dla środowiska, związaną ze śmiercią wybitnego ekonomisty, statystyka i ekonometryka, Prof. dr hab. Władysława Welfe, którego sylwetka zamieszczona została w bieżącym numerze Czasopisma.

Mając na względzie fakt, że Przegląd Statystyczny jest dla wielu osób najważniejszym w Polsce forum wymiany myśli naukowej grona pracowników naukowych, zajmujących się szeroko pojętymi metodami ilościowymi, Komitet Redakcyjny zapra-

sza Autorów reprezentujących środowiska statystyków i ekonometryków w Polsce i zagranicą do nadsyłania do publikacji artykułów naukowych omawiających osiągnięcia naukowe zgodne z profilem Czasopisma. Publikujemy zarówno w języku polskim, jak i w angielskim. W roku 2013 planujemy cały jeden numer Czasopisma wydać w języku angielskim.

Prace zgłaszane do publikacji w „Przeglądzie Statystycznym”, spełniające wszystkie wymogi formalne (zob. wymogi zawarte na stronie <http://www.przeglądstatystyczny.pan.pl/>), należy przysyłać pocztą elektroniczną na adres Sekretarza Naukowego Redakcji Piotra Fiszедера: piotr.fiszeder@umk.pl

*Redaktor Naczelna
Prof. dr hab. Magdalena Osińska*

PIOTR DUDZIŃSKI

WPLYW AWERSJI DO RYZYKA NA WYBÓR PRAWNIKA – INTERPRETACJA ZA POMOCĄ RYZYKOWNOŚCI W SENSIE ROTHSCHILD – STIGLITZA

1. WSTĘP

Osoby, które zagrożone są ryzykiem utraty majątku lub jego części mają do wyboru szereg możliwych działań prowadzących do zwiększenia bezpieczeństwa. Najpopularniejszym z nich jest oczywiście wykupienie polisy ubezpieczeniowej. Alternatywą dla ubezpieczenia są jednak indywidualne działania polegające na redukcji ewentualnych strat, nazywane samoubezpieczeniem, w skrócie SI¹, oraz działania mające na celu redukcję prawdopodobieństwa wystąpienia szkody, które nazywamy prewencją (SP²). Aby rozróżnić te pojęcia, rozważmy przykład zakupu i instalacji sejfów na kosztowności. W razie włamania utracone będą dobra pozostające poza sejfem, a zatem następuje redukcja strat, ale prawdopodobieństwo włamania w razie instalacji sejfów pozostaje takie samo. Jest to więc przykład samoubezpieczenia. Z kolei instalacja alarmu przeciwwłamaniowego powoduje, że do włamań dochodzi rzadziej, a zatem mamy do czynienia z redukcją prawdopodobieństwa wystąpienia szkody. Jeśli jednak system alarmowy zostanie sforsowany, to szkoda nie będzie zredukowana. Inwestycja w system alarmowy jest więc przykładem prewencji. Zakup gaśnicy jest przykładem samoubezpieczenia, zaś inwestycja w alarm przeciwpożarowy to przykład prewencji. Istnieje wiele przykładów samoubezpieczenia i prewencji w dziedzinie ochrony zdrowia. Regularne badania medyczne, zdrowe odżywianie, regularne ćwiczenia fizyczne, szczepionki, zażywanie witamin, itp. zwiększają ogólnie pojęte bezpieczeństwo zdrowotne. Na ogół redukują one prawdopodobieństwo zachorowania, ale w razie choroby, niektóre z tych działań redukują też dotkliwość jej skutków.

Pierwszymi autorami, którzy opisali i zaczęli w sposób systematyczny badać modele przedstawiające te zjawiska byli Becker i Ehrlich (1972). Zwrócili oni też uwagę na różnice między oboma pojęciami. Praca Ehrlicha i Beckera przyciągnęła uwagę wielu ekonomistów i od tamtego czasu powstała duża liczba prac teoretycznych przyczyniających się do zrozumienia natury tych zjawisk. Okazało się też, że różnice

¹ Skróć od „self-insurance”.

² Skróć od „self-protection”.

między oboma pojęciami są znaczące i dotyczą wielu aspektów ekonomicznych. Przykładowo, samoubezpieczenie jest zawsze substytutem rynkowego ubezpieczenia, zaś prewencja może być wobec niego komplementarna przy pewnych założeniach (Becker, Ehrlich, 1972; Courbage, 2001). Samoochrona i prewencja inaczej reagują także na zmiany awersji do ryzyka decydenta. Im bardziej jest on niechętny ryzyku, tym więcej inwestuje w samoochronę, ale poziom prewencji może podnieść się lub spaść, co wykazali Dionne i Eeckhoudt (1985). Briys i Schlesinger (1990) wyjaśnili ten paradoks dowodząc, że prewencja generalnie nie redukuje ryzykowności (w sensie Rothschilda-Stiglitz) związanej z bogactwem końcowym decydenta. Jullien, Salanie, Salanie (1999) udowodnili, że istnieje pewien krytyczny poziom prawdopodobieństwa poniesienia straty poniżej którego wzrost awersji do ryzyka powoduje wzrost inwestycji w prewencję, zaś powyżej tego progu efekt jest odwrotny.

Prace Chiu (2000, 2005), Eeckhoudta i Golliera (2005) oraz Dionne i Li (2010) dowodzą, że na optymalny poziom prewencji ma wpływ także poziom tzw. przezorności decydenta („prudence”) mierzony indeksem analogicznym do indeksów awersji do ryzyka Arrowa-Pratta, w którym kluczową rolę odgrywa trzecia pochodna użyteczności. Jak przyznają niektórzy badacze, w świetle powyższych wyników, determinanty optymalnej prewencji nie są na dzień dzisiejszy opisane w sposób wyczerpujący, a samo zjawisko nie jest w pełni zbadane teoretycznie.

Kolejnym problemem była izolacja efektów samoubezpieczenia i prewencji. W wielu przypadkach różnica między nimi jest trudna do określenia, zaś często zdarza się, że aktywność danej osoby prowadzi zarówno do zmniejszenia rozmiarów ewentualnej szkody, jak i redukcji prawdopodobieństwa jej wystąpienia, jest więc inwestycją zarówno w samoubezpieczenie, jak i w prewencję. Na to zjawisko zwrócili uwagę już Ehrlich i Becker: „...dobrzy prawnicy potrafią zredukować zarówno prawdopodobieństwo wyroku skazującego, jak i jego wysokość”. Dopiero jednak Lee (1998) formalnie zdefiniował „self-insurance-cum-protection” (SICP) jako połączenie samoubezpieczenia i samoochrony oraz zbadał jego podstawowe własności. Istnieje wiele przykładów SICP, są to np. zakup wysokiej jakości hamulców samochodowych, wykonywanie regularnych badań lekarskich, zakup kasku przez rowerzystę, zakup i instalacja automatycznych spryskiwaczy przeciwpożarowych, itp.

Przytoczony wcześniej cytat wskazuje, że wynajęcie prawnika jest także przykładem połączenia samoubezpieczenia i prewencji. Sevi i Yafil (2005) zauważyli jednak, że w pewnych systemach prawnych prawo pozwala na zwrot poniesionych kosztów w przypadku wygranej sprawy w sądzie. Koszty pokrywa na ogół strona przegrana. Standardowy model SP lub SICP nie uwzględnia jednak takiej sytuacji i wymaga modyfikacji związanej z ewentualną rekompensatą. Okazało się, że modyfikacja ta jest na tyle znacząca, że zmienia pewne podstawowe własności SP. W szczególności, Sevi i Yafil udowodnili, że inwestycja w usługi prawne jest monotoniczna względem stopnia awersji do ryzyka decydenta. W świetle cytowanych wcześniej wyników na temat własności SP, wynik ten oznacza, że wprowadzenie modyfikacji modelu polegającej na możliwości rekompensaty kosztów jest istotną zmianą i że mamy do

czynienia z jakościowo innym zjawiskiem. Sevi i Yafil rozważali jednak problem tylko w modelu przewencji, co w praktyce oznacza, że poczynili założenie o tym, że wielkość ewentualnej straty (kwoty zasądzonej) jest stała w każdym przypadku. Jest to o tyle zaskakujące, że jak sami autorzy podają, inspirowali się w swojej pracy wspomnianym cytatem Ehrlicha i Beckera, który jednoznacznie wskazuje na użycie modelu SICP.

W niniejszej pracy uogólnimy wspomniany wynik Sevi i Yafila na przypadek SICP. W praktyce oznacza to, że udowodnimy monotoniczność inwestycji w usługi prawne względem poziomu awersji do ryzyka porzucając założenie o tym, że wysokość straty jest stała. W rozdziale 2 wprowadzimy model SICP i zmodyfikujemy go o ewentualność zwrotu kosztów sądowych. Wykażemy przy tym, że istotną rolę dla wyniku odgrywa geometria strat.

Rozdział 3 jest poświęcony głównemu celowi tej pracy, czyli interpretacji i wytłumaczeniu powyższego wyniku za pomocą pojęcia ryzykowności w sensie Rothschilda-Stiglitz. Udowodnimy, że wzrost inwestycji w SICP powoduje wzrost ryzykowności związanej z bogactwem końcowym. To przy wzroście poziomu awersji do ryzyka spowoduje spadek oczekiwanej użyteczności końcowego bogactwa. Z tego powodu osoby bardziej niechętne ryzyku decydują się na zmniejszenie poziomu inwestycji w zrekompensowane SICP.

2. MODEL I PODSTAWOWY WYNIK

Rozważmy decydenta o ustalonym majątku początkowym w . Część tego majątku jest zagrożona ryzykiem straty w wyniku ewentualnego niekorzystnego wyroku sądowego. Decydent inwestuje kwotę e wybierając adwokata, który będzie go reprezentował. Poziom takiej inwestycji ma wpływ zarówno na prawdopodobieństwo przegranej, jak i na wysokość straty (wielkość zasądzonej kwoty). Są one więc funkcjami zmiennej e . Będziemy je oznaczać $p(e)$ i $l(e)$ odpowiednio. Zakładamy, że $0 \leq p(e) \leq 1$ i $l(e) \geq 0$ oraz że obie funkcje są dwukrotnie różniczkowalne w sposób ciągły. O pochodnych tych funkcji zakładamy³, że $p' < 0$, $p'' > 0$, $l' < 0$, $l'' > 0$.

Sevi i Yafil (2005) zauważyli, że w wielu systemach prawnych w razie zwycięstwa w sądzie koszty wynajmu adwokata (oraz inne koszty sądowe) mogą być zrekompensowane przez stronę przegraną. Tradycyjny model SP nie uwzględnia takiej sytuacji i musi być zmodyfikowany poprzez dostosowanie do możliwości rekompensaty. Zostało to dokonane w pracy Sevi'ego i Yafila, jednakże warto zauważyć że użycie modelu SP oznacza, że w konsekwencji zakłada się iż wysokość możliwej straty nie zależy od wielkości inwestycji w usługi prawne. Aby pominąć to założenie użyjemy modelu stanowiącego połączenie modeli SP i SI, czyli self-insurance-cum-protection

³ Nierówności te wyrażają często spotykaną prawidłowość polegającą na tym, że wzrost inwestycji w usługi prawne pociąga za sobą spadek prawdopodobieństwa przegranej w sądzie oraz zasądzonej ewentualnie kwoty, ale tempo tych spadków jest coraz wolniejsze.

(SICP) wprowadzonego do literatury przez Lee (1998). Zmodyfikujemy ten model tak, aby uwzględniał możliwość ewentualnej rekompensaty.

Bogactwo końcowe jest więc zmienną losową która przyjmuje wartości

- $A = w - e - l(e)$ z prawdopodobieństwem $p(e)$,
 - $B = w$ z prawdopodobieństwem $1 - p(e)$.
- (1)

Zachodzi oczywiście nierówność $A < B$. Celem decydenta jest wybór takiej wielkości e która zapewni maksymalizację oczekiwanej użyteczności końcowego bogactwa:

$$Eu = p(e)u(A) + (1 - p(e))u(B),$$

gdzie u oznacza funkcję użyteczności bogactwa decydenta. Zakładać będziemy, że jest ona dwukrotnie różniczkowalna w sposób ciągły, rosnąca i wklęsła, czyli że zachodzą nierówności $u' > 0$, $u'' \leq 0$. Wklęsłość użyteczności oznacza, że decydent przejawia awersję do ryzyka. Zakładać będziemy, że problem decydenta ma wewnętrzne rozwiązanie, które oznaczać będziemy e^* . Spełnia ono warunek konieczny istnienia ekstremum

$$\frac{\partial Eu}{\partial e} = p'(e)[u(A) - u(B)] - (l'(e) + 1)p(e)u'(A) = 0. \quad (2)$$

Zakładamy też, że zachodzi warunek drugiego rzędu⁴ (wystarczający dla istnienia maksimum): $\frac{\partial^2 Eu}{\partial e^2} < 0$.

Zauważmy, że aby istniało wewnętrzne rozwiązanie problemu, musi zachodzić nierówność $l'(e^*) > -1$, a zatem $|l'(e^*)| < 1$. Warunek ten oznacza, że tempo spadku strat w sytuacji wzrostu inwestycji w usługi prawne nie może być zbyt duże. W przeciwnym przypadku użyteczność krańcowa byłaby zawsze dodatnia i problem decydenta nie mógłby mieć rozwiązania wewnętrznego. Osobie pozwanej opłacałoby się ciągle zwiększać wydatki, gdyż zapewniałoby to ciągły wzrost użyteczności. Mimo że nie wykluczamy takich przypadków, to bardziej realistyczna wydaje się sytuacja w której straty maleją w umiarkowanym tempie. W całej pracy zakładamy więc będziemy, że na każdym poziomie inwestycji zachodzi nierówność $|l'| < 1$. Jest to także zgodne z typowym w literaturze założeniem o wypukłości funkcji straty, z którego wynika, że bezwzględne nachylenie funkcji straty jest coraz mniejsze, co z kolei oznacza, że straty maleją, ale w coraz wolniejszym tempie⁵.

⁴ Aby zachodził ten warunek jest potrzebne dodatkowe założenie, np. takie jak w pracy Jullien i in. (1999), czyli $p''p \geq 2(p')^2$.

⁵ W pracy Sevi'ego i Yafila nie występował ten problem, gdyż autorzy zakładali że funkcja straty jest stała, a zatem $l' = 0$.

Zajmiemy się teraz problem wpływem wzrostu awersji do ryzyka na decyzję o optymalnym poziomie inwestycji w usługi prawne w sytuacji możliwego zwrotu kosztów. W tym celu rozważymy drugiego decydenta będącego w tej samej sytuacji, co pierwszy, ale charakteryzującego się większą awersją do ryzyka. Przypomnijmy iż oznacza to, że dla dowolnego ryzyka premia za ryzyko w przypadku drugiego decydenta jest większa. Premia za ryzyko interpretowana jest na ogół jako kwota pieniężna, jaką dana osoba jest gotowa odstąpić, aby uniknąć ryzyka⁶. Zastosowanie tej definicji jest jednak mało praktyczne, gdyż oznaczałoby sprawdzenie zachowania w sytuacji każdego ryzyka (zmiennej losowej). Podstawą do analizy porównawczej jest w takich sytuacjach twierdzenie Pratt (1964). Mówi ono między innymi, że być bardziej niechętnym ryzyku oznacza mieć „bardziej wklęsłą” funkcję użyteczności. „Bardziej wklęsła” funkcja użyteczności powstaje przez złożenie z inną rosnącą i wklęsłą funkcją. Jak wiadomo, awersja do ryzyka jako taka jest integralnie związana z wklęsłością użyteczności. Zatem podstawowa intuicja wiążąca się z wzrostem awersji do ryzyka polega na wzroście wklęsłości użyteczności. Ta intuicja okazuje się być prawidłowa. Przypomnijmy formalnie twierdzenie Pratt:

Twierdzenie 1 (Pratt, 1964). Rozważmy dwóch decydentów o użytecznościach u i v odpowiednio oraz o tym samym bogactwie początkowym. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- a) użyteczność v reprezentuje większą awersję do ryzyka, niż u ,
- b) $-\frac{v''(x)}{v'(x)} \geq -\frac{u''(x)}{u'(x)}$ dla dowolnego x ,
- c) istnieje funkcja T taka, że $T' > 0$, $T'' \leq 0$, $v(x) = T(u(x))$ dla dowolnego x .

Ponadto funkcję $\lambda_u(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$ nazywa się *indeksem bezwzględnej awersji do ryzyka Arrowa-Pratta*.

Niech zatem v oznacza użyteczność reprezentującą większą awersję do ryzyka, niż u . Z twierdzenia Pratt wiemy, że $v(x) = T(u(x))$ dla pewnej funkcji T rosnącej i wklęsłej.

Oczekiwana użyteczność końcowego bogactwa ma więc postać

$$Ev = p(e)T(u(A)) + (1 - p(e))T(u(B)).$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum ma teraz postać

$$\frac{\partial Ev}{\partial e} = p'(e)[T(u(A)) - T(u(B))] - (l'(e) + 1)p(e)T'(u(A))u'(A) = 0. \quad (3)$$

⁶ Formalnie premia za ryzyko $\tilde{x}$ jest definiowana jako wielkość π spełniająca równanie $Eu(w + \tilde{x}) = u(w + E\tilde{x} - \pi)$.

Ponownie zakładamy, że warunek drugiego rzędu (wystarczający dla istnienia ekstremum) jest spełniony i że istnieje rozwiązanie wewnętrzne problemu, które oznaczać będziemy e_v .

Interesuje nas ustalenie relacji nierówności pomiędzy e_v i e^* , czyli między optymalnymi poziomami inwestycji w przypadku wzrostu awersji do ryzyka. Zachodzi następujące twierdzenia będące uogólnieniem wyniku pochodzącego z pracy Sevi i Yafila (dowód w aneksie na końcu pracy):

Twierdzenie 2. Jeśli bezwzględne nachylenie krzywej strat jest stale mniejsze niż 1, tzn. $l' > -1$, to wzrost awersji do ryzyka powoduje spadek inwestycji w usługi prawne, których koszty mogą być zwrócone w razie wygranej sprawy w sądzie.

Sevi i Yafil udowodnili analogiczne twierdzenie w przypadku SP, co faktycznie oznacza wprowadzenie dodatkowego założenia o tym, że funkcja straty jest stała niezależnie od poziomu inwestycji w usługi prawnicze. Twierdzenie 2 mówi więc, że jest to założenie zbędne i może być pominięte.

Po drugie, przypomnijmy, że jeśli koszty adwokata nie podlegają ewentualnemu zwrotowi w razie wygranej, to teza powyższego twierdzenia przestaje być prawdziwa. Do opisu sytuacji potrzebny jest wówczas standardowy model SP lub SICP o których wiadomo, że optymalne rozwiązanie problemu nie jest monotoniczne względem awersji do ryzyka. Zatem założenie o możliwości zwrotu kosztów w przypadku wygranej jest kluczowe dla powyższego twierdzenia.

3. INTERPRETACJA WYNIKU ZA POMOCĄ RYZYKOWNOŚCI W SENSIE ROTHSCILDA-STIGLITZA

Przy ustalonym poziomie inwestycji w zrekompensowane SICP, użyteczność bogactwa końcowego decydenta opisanego wzorem (1), charakteryzuje się określonym poziomem ryzykowności w sensie Rothschilda-Stiglitz. Rozważmy mały wzrost inwestycji w zrekompensowane SICP od e^* do $e^* + \delta$. Naszym celem jest porównanie ryzykowności w sensie Rothschilda-Stiglitz obu zmiennych losowych. Przypomnijmy, że Rothschild i Stiglitz wykazali równoważność szeregu warunków opisujących wzrost ryzykowności zmiennej losowej.

Twierdzenie 3 (Rothschild, Stiglitz, 1970). Niech X i Y oznaczają zmienne losowe oraz F i G – dystrybuanty ich rozkładów prawdopodobieństwa. Załóżmy, że $EX = EY$. Wówczas następujące warunki są równoważne⁷:

- a) Zmienna losowa Y ma taki sam rozkład jak zmienna $X + Z$, gdzie Z jest tzw. „białym szumem”, tzn. $E[Z|X] = 0$.

⁷ Dla prostoty zakładamy, że nośniki obu gęstości są zawarte w przedziale $[a, b]$.

- b) $\int_a^x F(t)dt \leq \int_a^x G(t)dt$ dla dowolnego $x \in [a, b]$.
- c) Dla każdej rosnącej i wklęsłej funkcji u zachodzi $Eu(X) \geq Eu(Y)$.

Każdy z powyższych warunków może być uznany za definicję wzrostu ryzykowności zmiennej losowej. Jeśli zachodzi któryś z nich (a zatem każdy), to mówimy, że zmienna losowa Y jest bardziej ryzykowna, niż zmienna X . Mówi się też, że zmienna Y cechuje się większą ryzykownością, niż zmienna X .

W opisywanej sytuacji zmiana poziomu inwestycji przez decydena powoduje zmianę dystrybuanty użyteczności bogactwa końcowego z F na F^δ . Wówczas zachodzi następująca zależność:

Twierdzenie 4. Jeśli decyden jest niechętny ryzyku, to mały wzrost inwestycji w zrekompensowane SICP powoduje, że wzrasta ryzykowność w sensie Rothschilda-Stiglitz'a użyteczności bogactwa końcowego decydena.

Dowód. Wprowadźmy oznaczenia

$$\begin{aligned} u_B^\delta &= u_B = u(w), \\ u_A &= u(w - e^* - l(e^*)), \\ u_A^\delta &= u(w - (e^* + \delta) - l(e^* + \delta)), \\ p^\delta &= p(e^* + \delta). \end{aligned}$$

Wielkości u_A i u_B są wartościami, jakie może pierwotnie przyjmować interesująca nas zmienna losowa przed wzrostem inwestycji, zaś u_A^δ i u_B^δ są to wartości przyjmowane przez zmienną losową po wzroście inwestycji do poziomu $e^* + \delta$. Wzrost inwestycji powoduje też zmianę prawdopodobieństwa, z jakim wystąpi szkoda z poziomu $p(e^*)$ do p^δ .

Przypomnijmy, że e^* maksymalizuje oczekiwaną użyteczność, a zatem zachodzi warunek konieczny istnienia ekstremum (2). Oznacza on, że krańcowa oczekiwana użyteczność bogactwa końcowego jest równa zeru, a zatem odpowiednio mała (jednostkowa) zmiana tej wielkości nie zmieni oczekiwanej użyteczności. To oznacza, że

$$p^\delta u_A^\delta + (1 - p^\delta) u_B^\delta = p u_A + (1 - p) u_B. \quad (4)$$

Zauważmy, że powyższa równość mówi w szczególności, że zmiana z F na F^δ odbywa się z zachowaniem średniej.

Z założenia $l' + 1 > 0$ wynika, że funkcja $x \mapsto x + l(x)$ jest rosnąca. Stąd wynika nierówność

$$(e^* + \delta) + l(e^* + \delta) > e^* + l(e^*).$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$w - (e^* + \delta) - l(e^* + \delta) < w - e^* - l(e^*).$$

Funkcja użyteczności jest rosnąca, a zatem możemy napisać

$$u(w - (e^* + \delta) - l(e^* + \delta)) < u(w - e^* - l(e^*)).$$

Zgodnie z wprowadzonymi oznaczeniami, zachodzi nierówność

$$u_A^\delta < u_A.$$

Zatem użyteczności pojawiające się w równości (3) mogą być uporządkowane następująco:

$$u_A^\delta < u_A < u_B^\delta = u_B.$$

Aby skorzystać z twierdzenia Rothschilda i Stiglitz, obliczymy całki z obu dystrybuant. Po prostych obliczeniach otrzymujemy, że

$$\int_a^x F(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{dla } x \in [a, u_A), \\ (x - u_A)p, & \text{dla } x \in [u_A, u_B), \\ (u_B - u_A)p + (x - u_B), & \text{dla } x \geq u_B, \end{cases}$$

oraz

$$\int_a^x F^\delta(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{dla } x \in [a, u_A^\delta), \\ (x - u_A^\delta)p^\delta, & \text{dla } x \in [u_A^\delta, u_B^\delta), \\ (u_B^\delta - u_A^\delta)p^\delta + (x - u_B^\delta), & \text{dla } x \geq u_B^\delta. \end{cases}$$

Oczywiście, zachodzi $\int_a^x F(t)dt = \int_a^x F^\delta(t)dt$ dla $x \leq u_A^\delta$. Z kolei dla $x \in (u_A^\delta, u_A)$ mamy $\int_a^x F(t)dt = 0$ oraz $\int_a^x F^\delta(t)dt > 0$.

Przypomnijmy, że $u_B^\delta = u_B$. Wówczas równość (4) możemy przekształcić do postaci

$$p^\delta(u_B^\delta - u_A^\delta) = p(u_B - u_A).$$

Wtedy dla $x \geq u_B^\delta$ zachodzi równość $\int_a^x F(t)dt = \int_a^x F^\delta(t)dt$.

Zauważmy teraz, że $\int_a^{u_B} F(t)dt = \int_a^{u_B} F^\delta(t)dt$, zaś dla $x = u_A$ zachodzi $\int_a^{u_A} F(t)dt = 0$ oraz $\int_a^{u_A} F^\delta(t)dt > 0$. Obie całki są liniowe względem x , więc na przedziale $[u_A, u_B)$ zachodzi nierówność

$$\int_a^x F(t)dt < \int_a^x F^\delta(t)dt.$$

Podsumowując, udowodniliśmy, że nierówność

$$\int_a^x F(t)dt \leq \int_a^x F^\delta(t)dt$$

jest spełniona przez wszystkie $x \in [a, b]$. To oznacza, że zmienna losowa odpowiadająca dystrybuancie F dominuje stochastycznie w sensie drugiego rzędu nad zmienną odpowiadającą dystrybuancie F^δ . W połączeniu z faktem, że zmiana z F na F^δ odbywa się z zachowaniem średniej, udowodniliśmy, że zachodzi warunek b) w twierdzeniu Rothschilda-Stiglitz. Po wzroście inwestycji w SICP nowa zmienna losowa jest więc bardziej ryzykowna, co kończy dowód.

Korzystając teraz z punktu c) tego samego twierdzenia, przyjmując jako funkcję rosnącą i wklęsłą funkcję T z twierdzenia Pratt'a o wzroście awersji do ryzyka, otrzymujemy wniosek, że decydent bardziej niechętny ryzyku preferuje mniej ryzykowną zmienną losową, czyli tę odpowiadającą dystrybuancie F .

Podsumowując, niewielki wzrost inwestycji w zrekompensowane SICP powoduje u osoby bardziej niechętniej ryzyku spadek oczekiwanej użyteczności końcowego bogactwa. Odwracając całe rozumowanie, spadek inwestycji spowoduje wzrost oczekiwanej użyteczności a zatem taka osoba zainwestuje mniej niż e^* .

4. KONKLUZJA

Optymalny poziom prewencji (SP) nie jest na ogół monotoniczny względem awersji do ryzyka decydenta. Jest to spowodowane tym, że wzrost inwestycji w SP nie przekłada się jednoznacznie na spadek ryzykowności zmiennej losowej związanej z problemem. W konsekwencji, kłopotliwe jest ustalenie kierunku efektu dochodowego, który często wiąże się z typem awersji do ryzyka decydenta. Okazuje się jednak, że jeśli istnieje możliwość rekompensaty kosztów (tak jak w przypadku wygranego procesu sądowego) to inwestycja w prewencję jest monotoniczna względem poziomu awersji do ryzyka. W niniejszej pracy uogólniliśmy tę zależność na model SICP, co w praktyce oznacza, że założenie o stałym poziomie strat jest nieistotne dla prawdziwości tezy. Kluczowe jest założenie o możliwości zwrotu kosztów oraz kształt funkcji straty.

Głównym celem pracy było jednak spojrzenie na problem pod innym kątem. Udowodniliśmy, że wzrost inwestycji w zrekompensowane SICP, a zatem przykładowo wynajęcie droższego i bardziej efektywnego prawnika, powoduje wzrost ryzykowności w sensie Rothschilda-Stiglitz użyteczności bogactwa końcowego decydenta. To wyjaśnia w nowy sposób związek między poziomem awersji do ryzyka decydenta

a jego inwestycją w prewencję i tłumaczy pozornie paradoksalną tezę twierdzenia 2. Osoby o zwiększonym poziomie awersji do ryzyka preferują mniej ryzykowne przedsięwzięcia, więc redukują poziom prewencji.

Istnieje kilka możliwych dalszych kierunków rozwoju tej teorii. Jednym z nich na pewno jest zbadanie kierunku efektu dochodowego na wybór prawnika. Innym byłoby rozważenie przypadku wielu stanów świata, gdyż istniejąca do tej pory analiza teoretyczna ogranicza się tylko do dwóch stanów. Wymaga to jednak poważnego uogólnienia modelu, zaś niektóre wyniki mogą się okazać jakościowo odmienne od dotychczasowych, jak to pokazał Lee (2005) w pracy na temat efektu dochodowego w przypadku samoubezpieczenia (SI).

Uniwersytet Gdański

LITERATURA

- [1] Briys E., Schlesinger H., (1990), Risk Aversion and the Propensities for Self – Insurance and Self-Protection, *Southern Economic Journal*, 57 (2), 458-467.
- [2] Chiu W. H., (2005), Degree of Downside Risk Aversion and Self-Protection, *Insurance: Mathematics and Economics*, 36, 93-101.
- [3] Chiu W. H., (2000), On the Propensity to Self-Protect, *Journal of Risk and Insurance*, 67 (4), 555-577.
- [4] Courbage C., (2001), Self-Insurance, Self-Protection and Market Insurance Within the Dual Theory of Choice, *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 26 (1), 43-56.
- [5] Dionne G., Eeckhoudt L., (1985), Self-Insurance, Self-Protection and Increasing RiskAversion, *Economics Letters*, 17 (1-2), 39-42.
- [6] Dionne G., Li, J., (2010), The Impact of Prudence on Optimal Prevention Revisited, *CIRRELT – 2010-33*.
- [7] Eeckhoudt L., Gollier, C., (2005), The Impact of Prudence on Optimal Prevention, *Economic Theory*, 26, 989-994.
- [8] Ehrlich I., Becker G. S., (1972), Market Insurance, Self-Insurance, and Self-Protection, *Journal of Political Economy*, 80 (4), 623-648.
- [9] Jullien B., Salanie B., Salanie F., (1999), Should More Risk-Averse Agents Exert More Effort?, *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 24 (1), 19-25.
- [10] Lee K., (1998), Risk Aversion and Self-Insurance-cum-Protection. *Journal of Risk and Uncertainty*, 17, 139-150.
- [11] Lee K. (2005), Wealth Effects on Self-Insurance and Self-Protection against Monetary and Nonmonetary Losses, *The Geneva Risk and Insurance Review*, 30, 147-159.
- [12] Lee K. (2010), Wealth Effects on Self-Insurance, *The Geneva Risk and Insurance Review* 35, 160-171.
- [13] Pratt J. W., (1964), Risk Aversion in the Small and in the Large, *Econometrica*, 32, 122-136.
- [14] Rothschild M., Stiglitz J., (1970), Increasing Risk. I. A Definition, *J. Econ. Theory* 2, 225-243.
- [15] Sweeney G., Beard, T. R., (1992), The Comparative Statics of Self – Protection, *Journal of Risk and Insurance*, 59, 301-309.
- [16] Sevi B., Yafil F., (2005), A Special Case of Self-Protection: The Choice of a Lawyer, *Economics Bulletin*, 4 (6), 1-8.

ANEKS

Twierdzenie. Załóżmy, że dane są punkty $A, B \in \mathbb{R}$ takie, że $A < B$. Wówczas dla każdej funkcji użyteczności u reprezentującej awersję do ryzyka istnieje użyteczność v taka, że

- 1) $v(A) = A$ i $v(B) = B$,
- 2) v reprezentuje te same preferencje wobec ryzyka, co u ,
- 3) $v'(A) > 1$ oraz $v'(B) < 1$.

Dowód. Łatwo zauważyć, że funkcja

$$v(x) = \frac{B - A}{u(B) - u(A)} u(x) + A - \frac{B - A}{u(B) - u(A)} u(A)$$

spełnia równości $v(A) = A$ i $v(B) = B$. Ponadto funkcja v jest dodatnią afiniczną transformacją użyteczności u , więc z twierdzenia von Neumanna-Morgensterna reprezentuje te same preferencje wobec ryzyka, co u .

Aby udowodnić trzecią własność, zauważmy, że z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej istnieje $\xi \in (A, B)$ takie, że

$$v'(\xi) = \frac{v(B) - v(A)}{B - A} = \frac{B - A}{B - A} = 1.$$

Skoro funkcja v jest wklęsła, to v' jest malejąca, a ponieważ $A < \xi$, to zachodzi

$$v'(A) > v'(\xi),$$

a zatem

$$v'(A) > 1.$$

Nierówność $v'(B) < 1$ dowodzimy analogicznie.

Dowód twierdzenia 2: Problemy obu decydentów są wklęsłe, więc zbadamy znak wyrażenia $\frac{\partial Ev}{\partial e}$ pochodzącego z (3) do którego wstawimy rozwiązanie problemu (2), czyli e^* . Skoro Ev jest wklęsłe, to $\frac{\partial Ev}{\partial e}$ jest malejące i przyjmuje wartość zerową w punkcie e_v . Zatem

$$\left. \frac{\partial Ev}{\partial e} \right|_{e=e^*} \leq 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } e_v \leq e^*.$$

Udowodnimy, że znak wyrażenia $\frac{\partial Ev}{\partial e}$ obliczonego w punkcie e^* , czyli rozwiązaniu równania (2), jest ujemny.

Korzystając z poprzedniego twierdzenia możemy założyć bez zmniejszenia ogólności, że zachodzą równości $T(u(A)) = u(A)$ i $T(u(B)) = u(B)$. Z równania (2) otrzymujemy, że

$$p'(e^*) = \frac{(l'(e^*)+1)p(e^*)u'(A)}{u(A)-u(B)}.$$

Po podstawieniu tej wielkości do $\frac{\partial Ev}{\partial e}$ i po prostych przekształceniach otrzymamy

$$\left. \frac{\partial Ev}{\partial e} \right|_{e=e^*} = (l'(e^*) + 1)p(e^*)u'(A)[1 - T'(u(A))].$$

Pierwsze trzy czynniki są dodatnie, zaś ostatni jest ujemny (z powyższego twierdzenia), więc zachodzi nierówność

$$\left. \frac{\partial Ev}{\partial e} \right|_{e=e^*} < 0.$$

Stąd wnioskujemy, że $e_v < e^*$, co było naszym celem.

WPLYW AWERSJI DO RYZYKA NA WYBÓR PRAWNIKA – INTERPRETACJA ZA POMOCĄ RYZYKOWNOŚCI W SENSIE ROTHSCHILDA – STIGLITZA

Streszczenie

W niniejszej pracy zajmujemy się problemem wyboru prawnika poprzez zastosowanie modelu stanowiącego połączenie samoubezpieczenia i prewencji (SICP) w sytuacji możliwości zwrotu kosztów w razie wygranej sprawy w sądzie. Jako pierwsi zagadnienie badali Sevi i Yafil (2005) jednak tylko w kontekście prewencji, co oznacza wprowadzenie dodatkowego założenia, że wielkość poniesionej straty jest stała niezależnie od poniesionych kosztów. W tej pracy uogólniamy wynik Sevi i Yafila dowodząc, że założenie o stałych stratach jest nieistotne. Wykazujemy że wzrost awersji do ryzyka powoduje spadek inwestycji w usługi prawne, których koszty mogą być zwrócone w razie wygranej sprawy w sądzie, co jak wiadomo, nie jest prawdą w standardowych modelach prewencji i SICP. Ponadto interpretujemy ten wynik za pomocą pojęcia ryzykowności w sensie Rothschilda-Stiglitz. Dowodzimy, że wzrost inwestycji w SICP powoduje wzrost ryzykowności związanej z bogactwem końcowym. W konsekwencji osoby bardziej niechętnie ryzyku decydują się na zmniejszenie poziomu inwestycji w zrekompensowane SICP.

Słowa kluczowe: prewencja, awersja do ryzyka, ryzykowność w sensie Rothschilda-Stiglitz

EFFECT OF INCREASE IN RISK-AVERSION ON THE CHOICE OF A LAWYER
– INTERPRETATION IN THE CONTEXT OF ROTHSCHILD-STIGLITZ RISKINESS

A b s t r a c t

We consider decision about the choice of a lawyer as a particular case of self-insurance-cum-protection when the lawyer's cost is repaid in case of victory. The problem was introduced by Sevi and Yafil (2005) in the context of self-protection, which requires assumption that the size of loss does not depend on effort (level of the expenditure on lawyer). In this paper we drop that assumption and our model includes possibility that both loss and probability of incurring a loss depend on effort. We prove that unlike the standard cases of SP and SICP, the level of effort is monotone in risk aversion. We interpret and explain the result in terms of mean-preserving spread and increasing riskiness in the sense of Rothschild-Stiglitz. We prove that increase in SICP with indemnity leads to increased riskiness of the utility of final wealth. As a consequence, the more risk-averse individual is, the less she invests in legal expenses.

Keywords: self-protection, self-insurance-cum-protection, riskiness, risk-aversion

AGNIESZKA KIEDROWSKA

STRUKTURA TERMINOWA STÓP PROCENTOWYCH W POLSCE – ESTYMACJA I IDENTYFIKACJA KSZTAŁTUJĄCYCH JĄ CZYNNIKÓW

1. WSTĘP

Efektywne zarządzanie portfelami dłużnych papierów wartościowych, pozwalające na osiągnięcie założonej przez inwestora rentowności przy akceptowalnym poziomie ryzyka, wymaga znajomości struktury terminowej stóp procentowych opisującej zależność stóp procentowych od terminu do wykupu. Umożliwia ona prawidłową wycenę instrumentów dłużnych, a co za tym idzie, wskazanie instrumentów przeszacowanych i niedoszacowanych.

Narodowy Bank Polski na potrzeby prowadzonej polityki pieniężnej przeprowadza estymację struktury terminowej stóp procentowych odzwierciedlającej oczekiwania inflacyjne. W odróżnieniu od niektórych banków centralnych, nie publikuje on jednak swoich oszacowań, mimo tego że ich znajomością może być zainteresowanych wiele innych podmiotów rynku finansowego (banki komercyjne, fundusze inwestycyjne, towarzystwa ubezpieczeniowe itd.). W rezultacie podmioty te zmuszone są do prowadzenia własnych estymacji struktury terminowej stóp procentowych.

Zagadnienia struktury terminowej oraz jej estymacji są szeroko opisywane w literaturze zagranicznej, jednakże polskie opracowania są tutaj stosunkowo nieliczne.

Celem niniejszego artykułu jest oszacowanie struktury terminowej stóp procentowych w Polsce oraz zidentyfikowanie jej determinantów, co jest niezbędne w skutecznym zarządzaniu ryzykiem stóp procentowych.

2. STRUKTURA TERMINOWA STÓP PROCENTOWYCH

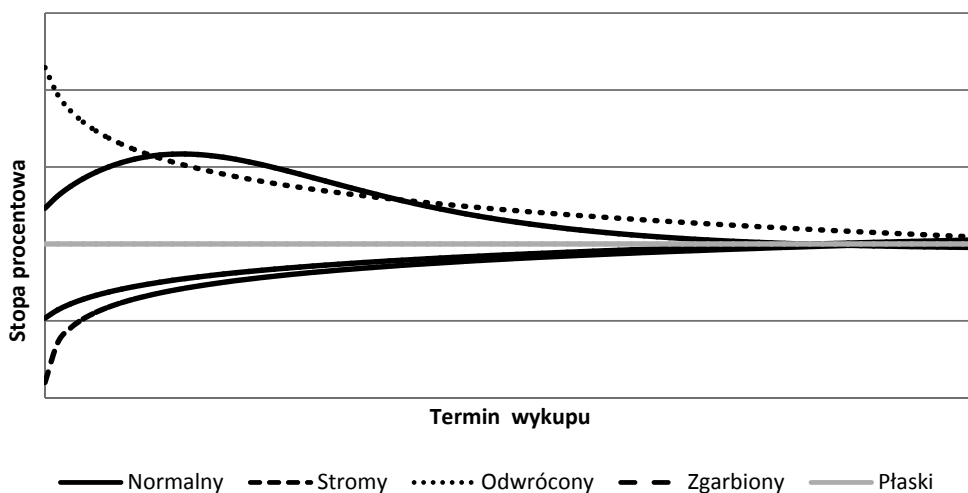
Zróznicowane czasy trwania inwestycji implikują różne poziomy stóp procentowych zobrazowane określoną strukturą terminową stóp procentowych (ang. *term structure of interest rates*). W zależności od rodzaju stopy, dla której określana jest struktura terminowa, wyróżnia się różne jej rodzaje. Podstawowym rodzajem struktury stóp procentowych jest, wyznaczana na podstawie stóp zerokuponowych, struktura terminowa stóp *spot*. Innym rodzajem struktury stóp procentowych jest, otrzymywana na podstawie stóp *forward*¹, struktura stóp *forward*. Z tej racji, że stopy *forward*

¹ Szerzej o rodzajach struktury terminowej pisze m.in. Jajuga (2005).

otrzymywane są na podstawie stóp *spot*, staje się możliwe określenie struktury stóp *forward* na podstawie struktury stóp *spot*.

2.1. KSZTAŁTY KRZYWEJ DOCHODOWOŚCI

Graficzną reprezentacją struktury terminowej jest krzywa dochodowości. W zależności od danej sytuacji gospodarczej może ona przyjmować różne kształty. Najczęściej spotykanymi kształtami są: normalny, odwrócony, zgarbiony i płaski. Niekiedy wyróżnia się również kształt stromy (por. Nawalkha, Soto, Beliaeva, 2005; Świętoń, 2002; Jajuga, Jajuga, 2007; Fabozzi, Modigliani, Ferri, 1998). Typowe kształty krzywej dochodowości przedstawia rysunek 1.



Rysunek 1. Podstawowe kształty krzywej dochodowości

Źródło: opracowanie własne.

Najczęściej spotykanym kształtem krzywej dochodowości jest kształt normalny (ang. *normal yield curve*). Charakteryzuje się on rosnącymi stopami procentowymi wraz z wydłużeniem terminu wykupu. Kształt taki jest wskaźnikiem, że gospodarka rozwija się prawidłowo (por. Nawalkha, Soto, Beliaeva, 2005).

Odwrócony kształt krzywej dochodowości (ang. *inverted yield curve*) występuje najczęściej w fazie rozkwitu, a więc wtedy, gdy stopy procentowe utrzymują się na znacznym poziomie. Po fazie tej może nastąpić recesja, a zatem stopy procentowe o dłuższym okresie do wykupu są niższe od stóp krótkookresowych (Nawalkha, Soto, Beliaeva, 2005).

Zgarbiony kształt krzywej dochodowości (ang. *humped yield curve*) występuje, gdy spodziewana jest krótkotrwała poprawa sytuacji gospodarczej, a po niej kolejna

recesja. W sytuacji odwrotnej krzywa dochodowości przyjmuje odwrócony kształt łukowaty (ang. *inverted humped yield curve*) (por. Nawalkha, Soto, Beliaeva, 2005; Dziwok, 2008).

W przypadku, gdy stopa procentowa nie zależy od terminu do wykupu (jest stała) krzywa dochodowości jest płaska (ang. *flat yield curve*). Jest to najprostsza w analizie struktura terminowa. Świętoń (2002) zwraca jednak uwagę na fakt, że idealny kształt płaski jest kształtem czysto teoretycznym, gdyż nie zaobserwowano jego występowania w praktyce.

Kształt stromy krzywej dochodowości (ang. *steep yield curve*), traktowany czasem jako odmiana kształtu normalnego, występuje najczęściej w gospodarkach będących w fazie wychodzenia z kryzysu, kiedy to spodziewana jest poprawa sytuacji gospodarczej, a co za tym idzie, stopy procentowe o dłuższym terminie do wykupu stają się dostrzegalnie wyższe od stóp krótkookresowych.

2.2. MODELOWANIE KRZYWEJ DOCHODOWOŚCI

Jak wcześniej zasygnalizowano, na podstawie stóp *spot* można wyznaczyć inne rodzaje stóp procentowych. Stąd też zaleca się, aby określać strukturę terminową właśnie na podstawie stóp *spot* (Fabozzi, 2000). Stopy te można wyznaczyć na podstawie cen i parametrów obligacji zerokuponowych, jednak z powodu zazwyczaj niewielkiej liczby tych obligacji na rynku nie jest możliwe zbudowanie na ich podstawie ciągłej struktury terminowej stóp procentowych. Sprawia to, iż zachodzi konieczność jej estymacji na podstawie powszechnie występujących odsetkowych dłużnych papierów wartościowych.

Modele struktury terminowej można podzielić na dwie klasy, a mianowicie: modele aproksymacji krzywej dochodowości oraz modele dynamiki stóp procentowych. Modele aproksymacji krzywej dochodowości mają na celu wyjaśnianie obecnej struktury terminowej stóp procentowych. Do najpopularniejszych modeli tej klasy należą modele regresyjne, krzywych sklepanych (por. McCulloch, 1971; McCulloch, 1975) oraz modele oszczędne takie jak model Nelsona-Siegla (1987) czy też model Svenssona (1994). Natomiast modele dynamiki stóp procentowych mają na celu wyjaśnienie zmian struktury terminowej stóp procentowych. Do tej klasy modeli zalicza się między innymi modele klasy ARIMA-GARCH, modele drzew dwumianowych oraz modele stochastycznych równań różniczkowych².

2.3. METODA KRZYWYCH SKLEJANYCH TRZECIEGO STOPNIA

W ramach przeprowadzonego badania dokonano estymacji struktury terminowej korzystając z metody krzywych sklepanych trzeciego stopnia. Wybór tej metody

² Szerzej o modelach tej klasy pisze Jajuga (2005).

podyktowany był chęcią uzyskania możliwie dobrego dopasowania krzywej do danych empirycznych, które umożliwiłoby przeprowadzenie analizy głównych składowych struktury terminowej.

Przed omówieniem metody krzywych sklejanych niezbędne jest zaprezentowanie sposobu wyceny obligacji. Wartość obligacji określana jest jako suma zdyskontowanych przepływów pieniężnych przysługujących posiadaczowi obligacji do terminu jej wykupu. Przepływy pieniężne związane są z otrzymywaniem kuponów, a ostatni z przepływów zawiera ponadto wartość nominalną obligacji. Zależność tę, przy założeniu kapitalizacji ciągłej, przedstawia poniższy wzór (por. Jajuga, Jajuga, 2007; Nawalkha, Soto, Beliaeva, 2005):

$$P = \sum_{t=1}^n CF_t e^{-y(t)t}, \quad (1)$$

gdzie:

P – wartość obligacji,

CF_t – przepływ pieniężny w chwili t ,

n – liczba przepływów pieniężnych otrzymywanych przez posiadacza obligacji,

$y(t)$ – ciągła stopa procentowa.

Ponieważ obligacje notowane są na rynku, to znana jest ich wartość rynkowa. Ponadto, dla obligacji o stałym oprocentowaniu znane są przepływy pieniężne przysługujące jej posiadaczowi. Na podstawie tych danych wyznaczane są stopy procentowe $y(t)$.

Wyrażenie $e^{-y(t)t}$ ze wzoru (1) określane jest mianem funkcji dyskontowej $d(t)$:

$$d(t) = e^{-y(t)t}. \quad (2)$$

Aby zaprezentować ideę metody krzywych sklejanych rozważmy zbiór K obligacji o terminach do wykupu wynoszących odpowiednio $t_1, t_2, \dots, t_K$ lat. Na rynku występuje zdecydowanie więcej obligacji o krótkich terminach zapadalności niż o długich. W tej sytuacji, aby uzyskać jak najlepsze dopasowanie krzywej dochodowości do danych rynkowych, warto jest podzielić przedział czasowy, dla którego szacuje się strukturę terminową, w taki sposób, aby liczba obligacji w każdym z podprzedziałów była do siebie zbliżona. Powstające miejsca podziału nazywane są punktami węzłowymi.

W celu uzyskania jak najlepszego dopasowania krzywej dochodowości do rzeczywistych danych, funkcja dyskontowa opisywana jest jako kombinacja liniowa s ciągłych i różniczkowalnych funkcji $g_i(t)$ (por. Nawalkha, Soto, Beliaeva, 2005). Aby ją otrzymać przedział czasowy dzieli się na $s - 2$ przedziały rozdzielone $s - 1$ punktami węzłowymi $T_1, T_2, \dots, T_{s-1}$, gdzie $T_1 = 0$ i $T_{s-1} = t_k$. Funkcja dyskontowa dana jest zatem wzorem:

$$d(t) = 1 + \sum_{i=1}^s \alpha_i g_i(t). \quad (3)$$

Ponieważ czynnik dyskontowy dla chwili 0 wynosi 1, funkcje $g_i(t)$ muszą spełniać warunek:

$$g_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (4)$$

Zarówno postać funkcji $g_i(t)$, jak i wartość s mają kluczowe znaczenie dla jakości oszacowania funkcji dyskontowej.

W modelu krzywych sklejanych trzeciego stopnia McCulloch (1975) przyjął następującą postać rodziny funkcji $g_1(t)$, $g_2(t)$, ..., $g_s(t)$:

Jeżeli $i < s$:

$$g_i(t) = \begin{cases} 0 & t < T_{i-1}, \\ \frac{(t - T_{i-1})^3}{6(T_i - T_{i-1})} & T_{i-1} \leq t < T_i, \\ \frac{(T_i - T_{i-1})^2}{6} + \frac{(T_i - T_{i-1})(t - T_i)}{2} + \frac{(t - T_i)^2}{2} - \frac{(t - T_i)^3}{6(T_{i+1} - T_i)} & T_i \leq t < T_{i+1}, \\ (T_{i+1} - T_{i-1}) \left(\frac{2T_{i+1} - T_i - T_{i-1}}{6} + \frac{t - T_{i+1}}{2} \right) & t \geq T_{i+1}. \end{cases} \quad (5)$$

Jeżeli $i = s$, to

$$g_i(t) = t.$$

Zastosowanie powyższej rodziny funkcji zapewnia ciągłość i gładkość krzywej nie tylko w poszczególnych przedziałach, ale również w punktach węzłowych. Jest to zagwarantowane tym, że funkcje zdefiniowane na sąsiednich przedziałach (T_{i-1}, T_i) oraz (T_i, T_{i+1}) mają równe wartości, a także równe pierwsze i drugie pochodne w punkcie T_i .

Na podstawie równań (1)-(3) otrzymujemy:

$$P(t_m) - \sum_{j=1}^m CF_j = \sum_{i=1}^s \alpha_i \sum_{j=1}^m CF_j g_i(t_j). \quad (6)$$

Estymacja funkcji dyskontowej (6) sprowadza się do oszacowania nieznanymi parametrów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ dążąc do minimalizacji sumy kwadratów odchyłeń danych modelowych od danych empirycznych. Następnie strukturę terminową stóp *spot* wyznacza się w oparciu o odpowiednio przekształcone równanie (2).

Na jakość dopasowania wpływa również liczba zastosowanych przedziałów. McCulloch (1975) proponuje, aby liczba segmentów (s) była równa liczbie całkowitej najbliższej pierwiastkowi z liczby obserwacji. Ponadto, sugeruje, że liczba instrumen-

tów wykorzystywanych w poszczególnych przedziałach powinna być jak najbardziej do siebie zbliżona. W ten sposób możliwe jest lepsze dopasowanie struktury terminowej na krótkim odcinku krzywej, a więc na obszarze z wyższą koncentracją danych.

McCulloch (1975) zaleca następujący sposób wyznaczania punktów węzłowych:

$$T_i = \begin{cases} 0 & i = 1, \\ t_h + \theta(t_{h+1} - t_h) & 2 \leq i \leq s - 2, \\ t_K & i = s - 1, \end{cases} \quad (7)$$

gdzie h jest wyznaczone jako:

$$h = \left\lfloor \frac{(i-1)K}{s-2} \right\rfloor, \quad (8)$$

natomiast parametr θ obliczany jest ze wzoru:

$$\theta = \frac{(i-1)K}{s-2} - h. \quad (9)$$

Tak dobrana liczba segmentów i przypadających na nie danych sprawia, że zarówno liczba s , jak również stosunek K/s rosną wraz ze wzrostem liczby obligacji. Zapewnia to tym większą dokładność modelu, im większą liczbą danych dysponujemy.

3. METODA GŁÓWNYCH SKŁADOWYCH

W zarządzaniu ryzykiem stopy procentowej coraz większą popularność zdobywa analiza głównych składowych³ przedstawiona przez Hotellinga (1933). Polega ona na ortogonalnym przekształceniu zbioru obserwacji wielowymiarowych na zbiór nieskorelowanych zmiennych, nazywanych głównymi składowymi i będących kombinacjami liniowymi wyjściowych obserwacji. Jeżeli obserwowane zmienne są silnie skorelowane, wówczas zbiór p zmiennych można przekształcić na wyraźnie mniejszy zbiór k głównych składowych, który zawiera znaczącą większość informacji niesionej przez zbiór początkowych zmiennych.

Założmy, że $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_p]^T$ jest wektorem skorelowanych zmiennych obserwowalnych o zerowej średniej, a więc $E[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$. Wykorzystując metodę głównych składowych można wyznaczyć wektor nieskorelowanych zmiennych $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_p]^T$ będący liniową transformacją wektora $\mathbf{X}$ opisaną równaniem (por. Ostasiewicz, 1999)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}^T \mathbf{X}, \quad (10)$$

³ Rosnące zainteresowanie analizą głównych składowych potwierdzają m.in. prace: Barber, Cooper (1996), Bliss (1997), Falkenstein, Hanweck (1997), Singh (1997), Wadhwa (1999), Golub, Tilmann (2000).

gdzie A jest macierzą przekształcenia ortogonalnego, a więc spełniającą warunek następującej postaci:

$$A^T A = I. \quad (11)$$

Przekształcenia dokonuje się tak, aby suma wariancji wszystkich głównych składowych była równa całkowitej wariancji wszystkich początkowych zmiennych oraz aby wariancje kolejnych składowych były coraz mniejsze. Zmienne Y_i muszą zatem spełniać następujące warunki:

$$var(Y_1) > var(Y_2) > \dots > var(Y_p) \quad (12)$$

oraz

$$\sum_{i=1}^p var(Y_i) = \sum_{i=1}^p var(X_i). \quad (13)$$

Aby znaleźć macierz A , w pierwszym kroku wyznacza się taki wektor $[a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1p}]$, będący wierszem macierzy A , który maksymalizuje wariancję pierwszej składowej Y_1 . Następnie wyznacza się wektor $[a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2p}]$, w taki sposób, by wariancja Y_2 była maksymalna przy spełnionym warunku, że Y_1 i Y_2 są nieskorelowane. Pozostałe wektory wierszowe macierzy wyznacza się w analogiczny sposób.

Oznaczmy przez $\mathbf{a}_i$ i -tą kolumnę poszukiwanej macierzy A . Wówczas i -tym wierszem macierzy A^T będzie $\mathbf{a}_i^T$. Zatem równanie (10) można przedstawić następująco:

$$Y_i = \mathbf{a}_i^T \mathbf{X} \quad (i = 1, \dots, p). \quad (14)$$

Korzystając z własności wariancji, wariancję wyrażenia $\mathbf{a}_i^T \mathbf{X}$ można wyznaczyć jako:

$$var(\mathbf{a}_i^T \mathbf{X}) = var\left(\sum_{j=1}^p a_{ij} X_j\right) = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p a_{ij} a_{ik} cov(X_i, X_j) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{C} \mathbf{a}_i, \quad (15)$$

gdzie $\mathbf{C}$ jest macierzą wariancji-kowariancji zmiennych X_i .

Wariancję zmiennej Y_i oznaczmy przez λ_i . Korzystając z równań (14) oraz (15) otrzymujemy:

$$var(Y_i) = \lambda_i = \mathbf{a}_i^T \mathbf{C} \mathbf{a}_i. \quad (16)$$

Zakłada się, że główne składowe mają być nieskorelowane, zatem:

$$cov(Y_i, Y_j) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{C} \mathbf{a}_j = 0 \quad \text{dla } i \neq j. \quad (17)$$

Oznaczmy przez Λ macierz wariancji-kowariancji zmiennych Y_i . Z równań (16) i (17) wynika, że ma ona następującą postać:

$$\Lambda = A^T C A \quad (18)$$

oraz że jest macierzą diagonalną o elementach na głównej przekątnej $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Macierz symetryczna dodatnio określona ma wszystkie wartości własne dodatnie, więc $\text{var}(Y_i) \geq 0$ dla $i = 1, \dots, p$.

Ponieważ macierz Λ jest macierzą diagonalną, to elementy $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ są jednocześnie jej wartościami własnymi. Równanie (18) można utożsamiać z przekształceniem sprowadzającym macierz C do postaci diagonalnej, a wówczas elementy $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ są również wartościami własnymi macierzy C .

Elementy diagonalne macierzy Λ można uporządkować malejąco, a więc

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p. \quad (19)$$

Ponieważ prawdziwe jest twierdzenie mówiące, że jeżeli wektory własne macierzy symetrycznej odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne, to wektory własne macierzy C odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne. Poszukiwaną ortogonalną macierz A tworzą unormowane wektory własne odpowiadające kolejnym malejącym wartościom własnym.

Niech U_i oznacza wektor własny odpowiadający wartości własnej λ_i . Wektory a_i oblicza się wówczas w następujący sposób:

$$a_i = U_i \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \quad \text{dla } i = 1, \dots, p. \quad (20)$$

Unormowane wektory własne, a_i , są nazywane ładunkami czynników, a interpretuje się je jako współczynniki korelacji pomiędzy zmiennymi a czynnikami. Ponieważ $\text{var}(Y_i) = \lambda_i$, więc udział wariancji i -tej głównej składowej w całkowitej wariancji zmiennych obserwowalnych wynosi:

$$\frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^p \lambda_j}. \quad (21)$$

W ogólności można wyznaczyć p głównych składowych. Należy jednak pamiętać, że celem analizy głównych składowych jest redukcja liczby zmiennych. Z tego względu wyznacza się jedynie kilka składowych, których udział w wyjaśnianiu zmienności zmiennych obserwowalnych jest największy. Wybór liczby składowych uzależniony jest od celu, w którym dokonuje się analizy.

Powyższe rozważania są oparte na wykorzystaniu macierzy kowariancji C . Często jednak zdarza się, że obserwowalne zmienne wyrażone są w różnych jednostkach lub ich wariancje zdecydowanie się od siebie różnią. Zastosowanie w takim przypadku

macierzy kowariancji skutkuje tym, że zmienne o wysokich wariancjach uzyskują wyższe wartości w macierzy A , a zmienne o niskich wariancjach – niewielkie wartości. Aby wyeliminować tę niedogodność, zamiast macierzą C , można posłużyć się macierzą korelacji R , będącą zarazem macierzą kowariancji zestandaryzowanych zmiennych.

Metoda głównych składowych wykorzystywana jest między innymi w zarządzaniu ryzykiem stopy procentowej. Aby wyjaśnić zmienność zmian stóp procentowych często przyjmuje się (por. Soto, 2004), że wystarczają trzy główne składowe (związane z wysokością, nachyleniem i krzywizną krzywej dochodowości). Następnie wrażliwość wartości portfela inwestycyjnego na czynniki ryzyka mierzona jest przez wskaźniki trwałości i wypukłości głównych składowych. Inną zaletą metody głównych składowych, poza redukcją liczby zmiennych, jest uzyskiwanie ortogonalnych czynników ryzyka. Ułatwia to zdecydowanie zarządzanie ryzykiem stopy procentowej, bowiem każdy z czynników może być analizowany niezależnie od pozostałych (Nawalkha, Soto, Beliaeva, 2005). Załóżmy, że każdy ruch struktury terminowej stóp procentowych (ang. *term structure of interest rates shift* – *TSIR shift*) może być opisany m -wymiarowym wektorem zmian stóp *spot* (por. Nawalkha, Soto, Beliaeva, 2005; Trzpiot, 2010):

$$TSIR\ shift = (\Delta y(t_1), \Delta y(t_2), \dots, \Delta y(t_m)). \quad (22)$$

Metoda głównych składowych umożliwia analizę ruchów struktury terminowej za pomocą głównych składowych. Wektor z równania (22) przyjmuje wówczas postać:

$$TSIR\ shift = (c_1, c_2, \dots, c_m), \quad (23)$$

gdzie $c_1, c_2, \dots, c_m$ oznaczają kolejne główne składowe, które są kombinacjami linowymi stóp *spot*. Zatem otrzymujemy zależność postaci:

$$c_j = \sum_{i=1}^m u_{ij} \Delta y(t_i) \quad (j = 1, \dots, m), \quad (24)$$

gdzie u_{ij} są współczynnikami głównej składowej. Macierz współczynników u_{ij} jest ortogonalna, więc żeby wyznaczyć zmiany stóp procentowych równanie (24) można przekształcić do postaci:

$$\Delta y(t_i) = \sum_{j=1}^m u_{ij} c_j \quad (i = 1, \dots, m). \quad (25)$$

Zmniejszenia wymiaru przestrzeni zmiennych dokonuje się poprzez pominięcie tych głównych składowych, które w najmniejszym stopniu wyjaśniają zmiany stóp procentowych (tzn. mają najniższe wartości własne). Liczbę zmiennych redukuje

się przede wszystkim z dwóch powodów, a mianowicie w celu dążenia do prostoty i oszczędności modelu oraz minimalizacji szumów w danych.

Wyrażenie zmian stóp *spot* jako kombinacji liniowej k ($k < m$) początkowych składowych umożliwia uzyskanie, poprzez pomiar wrażliwości portfela jedynie na te składniki, profilu ryzyka stopy procentowej, na jakie narażony jest portfel.

Aby uniezależnić ruchy struktury terminowej od wariancji poszczególnych głównych składowych, model modyfikuje się tak, aby każdy czynnik miał jednostkową wariancję. Cel ten osiąga się poprzez zastosowanie przekształcenia postaci:

$$\Delta y(t_i) = \sum_{j=1}^k (u_{ij} \sqrt{\lambda_j}) \frac{c_j}{\sqrt{\lambda_j}} + \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad (26)$$

gdzie ε_i – zmienna losowa.

Jak już zaznaczono, w praktyce, do analizy głównych składowych struktury terminowej wykorzystywane są trzy pierwsze składowe. Każda z tych składowych ma swoją interpretację⁴.

Pierwsza główna składowa związana jest z przesunięciami równoległymi krzywej dochodowości. Z tego względu jest ona często nazywana czynnikiem wysokości lub poziomu (ang. *height/level factor*). Przesunięcie to występuje gdy wszystkie stopy procentowe zmieniają się o stałą wartość.

Druga główna składowa wyjaśnia natomiast zmiany nachylenia krzywej dochodowości, dlatego też nazywana jest czynnikiem nachylenia (ang. *slope factor*). Poziom nachylenia jest zazwyczaj wyrażony *spreadem* pomiędzy rentownością instrumentów krótko- i długoterminowych.

Trzecia główna składowa, nazywana jest czynnikiem krzywizny (ang. *curvature factor*) ponieważ jest ona związana ze zmianami krzywizny krzywej dochodowości. Przyczyną tych zmian jest przesunięcie motyla (ang. *butterfly shift*) polegające na przesunięciu stóp krótko- i długoterminowych zdecydowanie powyżej lub poniżej poziomu stóp średnioterminowych.

Wykorzystując jedynie trzy, opisane powyżej, główne składowe, równanie (26) można zapisać w uproszczonej postaci, danej następująco:

$$\Delta y(t_i) \approx l_{ih}c_h + l_{is}c_s + l_{ic}c_c, \quad (27)$$

gdzie czynniki wyrażone są jako:

$$c_h = \frac{c_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad c_s = \frac{c_2}{\sqrt{\lambda_2}}, \quad c_c = \frac{c_3}{\sqrt{\lambda_3}}, \quad (28)$$

⁴ Interpretacje głównych składowych przedstawiają Nawalkha, Soto, Beliaeva (2005), Trzpiot (2010).

a ładunki czynników zdefiniowane są w następujący sposób:

$$l_{ih} = u_{1i}\sqrt{\lambda_1}, \quad l_{is} = u_{2i}\sqrt{\lambda_2}, \quad l_{ic} = u_{3i}\sqrt{\lambda_3}. \quad (29)$$

Poszczególne składowe wyznacza się zgodnie z procedurą analizy głównych składowych.

4. ANALIZA EMPIRYCZNA

Do przeprowadzenia estymacji krzywej dochodowości zostały wykorzystane ceny i parametry polskich obligacji skarbowych. Wybór ten podyktowany był przede wszystkim możliwością traktowania obligacji Skarbu Państwa jako instrumentów pozbawionych ryzyka niewypłacalności emitenta, w związku z czym różnice w cenach związane są wyłącznie ze zróżnicowaniem stóp procentowych. Instrumenty te notowane są na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie, dzięki czemu dostępna jest ich wycena rynkowa.

Ze względu na konieczność wyznaczenia wszystkich przyszłych przepływów pieniężnych przysługujących posiadaczowi obligacji, wybrane zostały wyłącznie instrumenty o oprocentowaniu stałym i zerokuponowe.

Krzywa dochodowości szacowana była na podstawie kursów zamknięcia obligacji w okresie od 1 lipca 2009 r. do 2 października 2009 r. Aby struktura terminowa w całym przedziale estymowana była na podstawie tych samych danych, do badania wybrano obligacje wyemitowane przed 1.07.2009 r. i o terminie wykupu późniejszym niż 2.10.2009 r. W celu minimalizacji ewentualnych błędów związanych z ograniczoną płynnością rynku obligacji, wykorzystano te instrumenty, dla których w analizowanym okresie wyznaczone było co najmniej 10 kursów zamknięcia. Ponadto, brane pod uwagę były tylko te obligacje, których pierwsze notowanie w przyjętym przedziale czasowym przypadało nie później niż 10.07.2009 r. Tym sposobem liczbę instrumentów wykorzystaną do badania ograniczono do 15 obligacji, których parametry zestawiono w tabeli 1.

Można zauważyć, że terminy zapadalności obligacji wybranych do estymacji są dość równomiernie rozłożone w czasie. Cecha ta jest niezmiernie ważna dla prawidłowego oszacowania krzywej dochodowości.

W badanym okresie pojawiały się dni, w które dla niektórych obligacji nie dochodziło do transakcji. W takim przypadku za cenę z tego dnia przyjęto poprzednio zarejestrowaną cenę.

Warto zwrócić uwagę na fakt, iż nie należy utożsamiać kursu zamknięcia z wartością obligacji. Po pierwsze, w celu zapewnienia porównywalności instrumentów, obligacje notowane są jako procent wartości nominalnej. Po drugie, cena uzyskana na podstawie notowań jest to tak zwana cena „czysta”⁵, a więc niezawierająca naro-

⁵ Zagadnienie ceny „czystej” i ceny „brudnej” omawiają Jajuga, Jajuga (2007).

Tabela 1.

Parametry obligacji wykorzystanych w badaniu oraz ich terminy wykupu na dzień 1.07.2009 r.

Symbol	Oprocentowanie [%]	Wartość nominalna [PLN]	Okres zapadalności	Data wykupu	Termin wykupu
OK0112	0,00	1 000,00	2 lata	2012-01-25	2,57
OK0710	0,00	1 000,00	2 lata	2010-07-25	1,07
OK0711	0,00	1 000,00	2 lata	2011-07-25	2,07
PS0310	5,75	1 000,00	5 lat	2010-03-24	0,73
PS0412	4,75	1 000,00	5 lat	2012-04-25	2,82
PS0413	5,25	1 000,00	5 lat	2013-04-25	3,82
PS0414	5,75	1 000,00	5 lat	2014-04-25	4,82
PS0511	4,75	1 000,00	5 lat	2011-05-24	1,90
SP0610	5,00	100,00	5 lat	2010-06-01	0,92
SP1210	4,50	100,00	5 lat	2010-12-01	1,42
DS1013	5,00	1 000,00	10 lat	2013-10-24	4,32
DS1015	6,25	1 000,00	10 lat	2015-10-24	6,32
DS1017	5,25	1 000,00	10 lat	2017-10-25	8,32
DS1019	5,50	1 000,00	10 lat	2019-10-25	10,32
WS0922	5,75	1 000,00	20 lat	2022-09-23	13,24

Źródło: opracowanie własne.

słych odsetek. Narosłe odsetki (ang. *accrued interest* – *AI*) wyliczane są na podstawie wzoru:

$$AI = C \left(\frac{t_0 - t_p}{t_q - t_p} \right), \quad (30)$$

gdzie: C – kupon, t_0 – chwila obecna, t_p – data poprzedniej płatności kuponu, t_q – data następnej płatności kuponu.

W przypadku obligacji Skarbu Państwa o stałym oprocentowaniu wysokość kuponu nalicza się w oparciu o konwencję *actual/actual*⁶. Oznacza to, że do obliczenia $t_0 - t_p$ oraz $t_q - t_p$ wykorzystywana jest rzeczywista liczba dni pomiędzy datami.

⁶ Innymi stosowanymi konwencjami są *actual/360*, *30/360*. Sposoby ich wykorzystania przedstawiają Nawalkha, Soto, Beliaeva (2005).

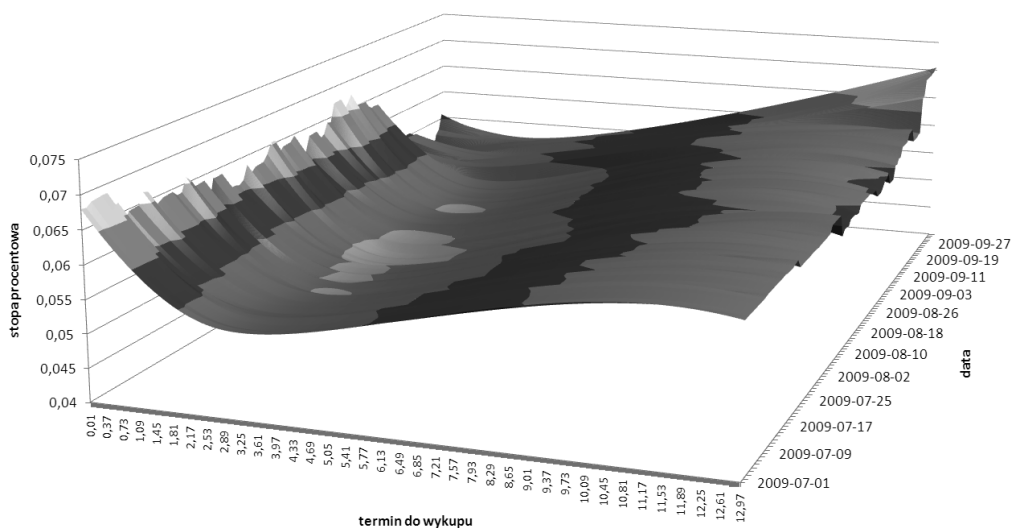
Do estymacji krzywej dochodowości wykorzystywana jest wartość obligacji wyznaczana w następujący sposób:

$$P = \text{Cena notowana} + AI. \quad (31)$$

W związku z powyższym konieczne okazało się wyznaczenie wielkości narosłych odsetek dla każdego dnia z badanego przedziału.

4.1. WYNIKI ESTYMACJI STRUKTURY TERMINOWEJ

Wyniki estymacji struktury terminowej stóp procentowych w Polsce w okresie 1.07.2009–2.10.2009 r. ilustruje graficznie rysunek 2.



Rysunek 2. Struktura terminowa stóp procentowych w okresie 1.07.2009–2.10.2009

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 2 widoczny jest wyraźny podział rynku dłużnych papierów wartościowych. Można wydzielić na nim rynek instrumentów krótkoterminowych, o terminach do wykupu do ok. 3 lat, oraz rynek instrumentów długoterminowych, o terminach do wykupu powyżej 3 lat. Ponadto, krzywa przyjmuje we wrześniu nieco odmienny kształt niż w lipcu i sierpniu 2009 r. W lipcu i sierpniu 2009 r. w początkowej części krzywej dochodowości, odpowiadającej instrumentom o okresie zapadalności do 3 lat, stopy procentowe gwałtownie malały. Wynika stąd, że na rynku instrumentów krótkoterminowych występował wyższy popyt na instrumenty o najkrótszym terminie do wykupu. Świadczy to zarazem o potrzebie zwiększonej płynności instytucji finansowych inwe-

stujących w obligacje. Pozostała część krzywej dochodowości ma kształt normalny. Wynika stąd, że rynek oczekiwał wzrostu stóp procentowych lub wymagał rosnącej premii za utratę płynności. Na rynku występowała stosunkowo niska płynność po stronie inwestorów długoterminowych. Niewielki spadek stóp procentowych dla terminu zapadalności powyżej 10 lat prawdopodobnie związany jest z błędami wynikającymi z ograniczonej płynności rynku i niewielkiej liczby obligacji o tak długim okresie do wykupu.

We wrześniu 2009 r. spadek stóp procentowych w początkowej części struktury terminowej nie był już tak gwałtowny, a krzywa dochodowości na obszarze odpowiadającym instrumentom długoterminowym osiągała wyższe wartości niż w miesiącach poprzednich. Przypuszczalnie, zmiany te mają związek z ogłoszonym na początku września 2009 r. planowanym deficytem budżetowym na rok 2010. Według obecnego ministra finansów, Rostowskiego (Komentarz rynkowy, 2009), deficyt budżetowy miał przekroczyć poziom 50 mld PLN. Wówczas w reakcji na tą informację inwestorzy zaczęli wyprzedawać papiery. W rezultacie stopy procentowe dla krótkich terminów zapadalności zdecydowanie spadły. Na kształt długiego odcinka krzywej dochodowości zapewne miały wpływ także ogłoszone dane makroekonomiczne, informujące o inflacji przekraczającej oczekiwania rynkowe, wysokim poziomie sprzedaży detalicznej oraz wyhamowaniu spadków produkcji przemysłowej.

4.2. WYNIKI ANALIZY GŁÓWNYCH SKŁADOWYCH STRUKTURY TERMINOWEJ

Oszacowaną strukturą terminową stóp *spot* posłużono się do przeprowadzenia analizy głównych składowych struktury terminowej stóp procentowych w Polsce. Spośród oszacowanych tu stóp w dalszej analizie pozostawiono stopy o zapadalnościach jedno- i dwutygodniowych, jedno-, trzy- i sześciomiesięcznych, roczne i dalej co rok, aż do 13-letnich. Uzyskane wartości własne poszczególnych czynników i ich udziały w wariancji przedstawione zostały w tabeli 2.

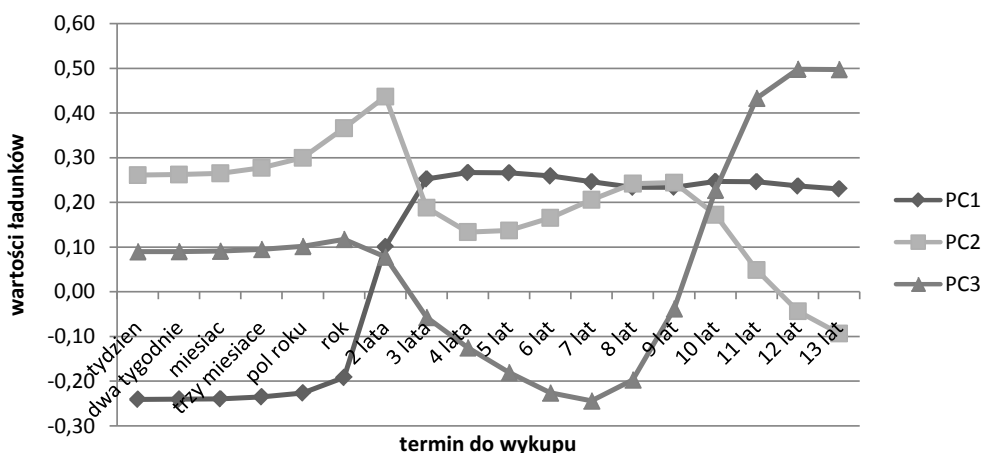
Pierwsza główna składowa wyjaśnia ok. 69% wariancji zmian stóp procentowych. Drugi czynnik wyjaśnia ok. 21,6% wariancji, trzeci ok. 6,7%, a czwarty niecałe 3%. Udział pozostałych czternastu składowych w wariancji jest niewielki i wynosi od 0 do 0,02%. Zatem trzy pierwsze składowe wyjaśniają ponad 97% zmienności stóp procentowych, podczas gdy wszystkie pozostałe czynniki wyjaśniają ok. 3%, a więc można przyjąć, zgodnie ze wskazaniem literaturowym, że do wyjaśnienia zmienności struktury terminowej stóp procentowych wystarczają trzy pierwsze główne składowe. Ładunki tych trzech głównych składowych zostały przedstawione na rysunku 3. Widoczna jest na nim wyraźna segmentacja rynku. Można wyróżnić rynek papierów krótkoterminowych, odpowiadający instrumentom o terminach do wykupu do dwóch lat, oraz rynek papierów długoterminowych, odpowiadający instrumentom o terminach do wykupu powyżej dwóch lat. Tak scharakteryzowaną segmentację potwierdza przebieg oszacowanej krzywej dochodowości.

Tabela 2.

Wartości własne i ich udział w wariancji zmian stóp procentowych

Czynnik	Wartość własna	Udział w wariancji	Skumulowany udział w wariancji
1	12,4266	69,0367%	69,0367%
2	3,8870	21,5944%	90,6311%
3	1,2013	6,6739%	97,3050%
4	0,4820	2,6778%	99,9828%
5	0,0030	0,0167%	99,9994%
6	0,0001	0,0006%	100,0000%
7–18	0,0000	0,0000%	100,0000%

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 3. Ładunki trzech pierwszych głównych składowych

Źródło: opracowanie własne.

Ładunki pierwszej głównej składowej (na wykresie PC1), reprezentującej równoległe przesunięcia krzywej dochodowości, przyjmują inne wartości dla terminów zapadalności do 1 roku, a inne dla terminów od 2 lat. Jednocześnie w każdym z tych podokresów wartości ładunków są w miarę stałe. Z faktu, że ładunki czynników dla krótkich terminów są ujemne, a dla długich dodatnie, wynika, że w badanym okresie ogólny poziom krótkoterminowych stóp procentowych zmieniał się w przeciwnym kierunku niż poziom stóp długoterminowych.

Wartości ładunków drugiej głównej składowej (na wykresie PC2), odpowiadającej zmianom nachylenia krzywej dochodowości, świadczą o zróżnicowanym przebiegu

krzywej dochodowości. W krótkim okresie (do dwóch lat) kąt nachylenia krzywej był wysoki, a w długim okresie wyraźnie zmalał.

Ładunki trzeciej głównej składowej (na wykresie PC3), odpowiadającej zmianom krzywizny krzywej dochodowości, mają charakter dodatniego przesunięcia motyla. Czynniki dla terminów do wykupu od 3 do 9 lat przyjmują wartości ujemne, podczas gdy czynniki dla terminów do wykupu poniżej 3 lat i powyżej 9 lat – dodatnie. Wynika stąd że stopy procentowe w średnim okresie były niższe niż stopy w okresie krótkim i długim.

Uzyskane wyniki świadczą o tym, że na strukturę terminową stóp procentowych w Polsce wpływają zasadniczo trzy znaczące rodzaje czynników opisanych powyżej. Zatem, aby skutecznie zarządzać ryzykiem stopy procentowej stosując strategię krzywej dochodowości należy prognozować nie tylko kierunek, lecz również rodzaj przesunięcia krzywej.

5. PODSUMOWANIE

Przeprowadzone badanie empiryczne wykazało, że estymacja krzywej dochodowości w oparciu dane z polskiego rynku instrumentów dłużnych jest zagadnieniem przysparzającym wiele trudności. Głównym problemem jest niska płynność rynku obligacji. Nie są niestety dostępne notowania cen dla każdego dnia analizowanego okresu. Na potrzeby prowadzonego badania za cenę z dnia, w którym nie dochodziło do transakcji przyjęto ostatnią wcześniej notowaną cenę. Kolejnym problemem są stosunkowo krótkie terminy do wykupu obligacji skarbowych. W związku z tym strukturę terminową można oszacować tylko dla terminów zapadalności do 10 lat. Zdecydowanie ogranicza to możliwość zastosowania takiej struktury terminowej do zarządzania portfelem inwestycji długoterminowych.

Przeprowadzona estymacja krzywej dochodowości dla okresu 1.7–2.10.2009 r. wykazała znaczną segmentację rynku dłużnych papierów wartościowych na rynki instrumentów krótko- i długoterminowych. Krzywa dochodowości na obszarze odpowiadającym terminom zapadalności do 3 lat gwałtownie maleje. Świadczy to o wysokiej potrzebie płynności instytucji finansowych inwestujących w obligacje. Na pozostałym obszarze krzywa dochodowości ma kształt normalny. Wynika stąd, że rynek oczekuje wzrostu stóp procentowych w długim okresie. Badanie wykazało również znaczny wpływ danych makroekonomicznych na strukturę terminową stóp procentowych w Polsce, przejawiający się zmianą kształtu krzywej dochodowości po komunikatach z września 2009 r.

Przeprowadzona analiza głównych składowych struktury terminowej stóp procentowych pozwoliła na wyodrębnienie czynników ryzyka. Uzyskane wyniki wykazały, że do wyjaśnienia zmienności struktury terminowej stóp procentowych w Polsce wystarczą trzy główne składowe, związane z wysokością, nachyleniem i krzywizną krzywej dochodowości. Różnice w wartościach składowych dla krótkich i długich

terminów do wykupu potwierdzają zaobserwowaną segmentację rynku dłużnych papierów wartościowych. Zatem z badania wynika, że aby skutecznie zarządzać ryzykiem stopy procentowej należy prognozować zarówno kierunek, jak również rodzaj przesunięcia krzywej dochodowości.

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

LITERATURA

- [1] Barber J. R., Cooper M. L., (1996), *Immunization Using Principal Component Analysis*, Journal of Portfolio Management, Fall, 23, (1), 99–105.
- [2] Bliss R. R., (1997), *Movements in the Term Structure of Interest Rates*, Economic Review, Federal Reserve Bank of Atlanta, 4th quarter, 16–33.
- [3] Dziwok E., (2008), *Krzywa dochodowości: Metody konstrukcji i zastosowanie*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.
- [4] Fabozzi F. J., (2000), *Bond markets, analysis and strategies*, Prentice-Hall International, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.
- [5] Fabozzi F. J., Modigliani F., Ferri M. G., (1998), *Foundations of Financial Markets and Institutions*, Prentice-Hall International, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.
- [6] Falkenstein E., Henweck J., (1997), *Minimizing Basis Risk from Non-Parallel Shifts in the Yield Curve. Part II: Principal Components*, Journal of Fixed Income, 7, 85–90.
- [7] Golub B. W., Tilmann L. M., (2000), *Risk Management. Approaches for Fixed Income Markets*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [8] Hotelling H., (1933), *Analysis of a Complex of Statistical Variables Into Principal Components*, Journal of Educational Psychology, 24, 417–441.
- [9] Jajuga K., (2005), *Modelowanie struktury terminowej stop procentowych – wyzwanie dla ekonometrii*, [w:] M. Szreder (red.), *Ekonometryczne modelowanie i prognozowanie wzrostu gospodarczego*, Prace i Materiały Wydziału Zarządzania Uniwersytetu Gdańskiego, Sopot, 25–38.
- [10] Jajuga K., Jajuga T., (2007), *Inwestycje. Instrumenty finansowe, aktywa finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [11] Komentarz rynkowy, (2009), opracowanie Novo fundusze inwestycyjne, dostępny na: <http://www.mbank.pl/indywidualny/inwestycje/sfi/komentarze/2009/pazdziernik/Raport-analityczny-Novo-pazdziernik-2009.pdf> [dostęp 5.05.2010]
- [12] McCulloch J. R., (1971), *Measuring the Term Structure of Interest Rates*, Journal of Business, 44, 19–31.
- [13] McCulloch J. R., (1975), *The Tax-Adjusted Yield Curve*, The Journal of Finance, 30, 811–830.
- [14] Nawalkha S. K., Soto G.M., Beliaeva N.A., (2005), *Interest Rate Risk Modeling. The fixed income valuation course*, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.
- [15] Nelson C. R., Siegel, A.F., (1987), *Parsimonious Modeling of Yield Curves*, Journal of Business, 60, 473–489.
- [16] Ostasiewicz W., (red.) (1999), *Statystyczne metody analizy danych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław.
- [17] Singh M. K., (1997), *Value at Risk Using Principal Component Analysis*, Journal of Portfolio Management, 24, 101–112.
- [18] Soto G. M., (2004), *Using principal component analysis to explain term structure movements: Performance and stability*, [w:] A. Tavidze (red.), *Progress in Economics Research*, 8, Nova Science Publishers, New York, 203–226.

- [19] Svensson, L. E. O., (1994), *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992–1994*, NBER Working Papers Series, 4871.
- [20] Świętoń M., (2002), *Terminowa struktura dochodowości skarbowych papierów wartościowych w Polsce w latach 1998–2001*, NBP, Materiały i studia, Zeszyt 150, Warszawa.
- [21] Trzpiot G., (red.) (2010), *Wielowymiarowe metody statystyczne w analizie ryzyka rynkowego*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- [22] Wadwa P., (1999), *An Empirical Analysis of the Common Factors Governing U.S. Dollar-LIBOR Implied Volatility Movements*, Journal of Fixed Income, 9, (3), 61–68.

STRUKTURA TERMINOWA STÓP PROCENTOWYCH W POLSCE – ESTYMACJA I IDENTYFIKACJA KSZTAŁTUJĄCYCH JĄ CZYNNIKÓW

Streszczenie

Celem artykułu była estymacja struktury terminowej stóp procentowych w Polsce oraz identyfikacja czynników wpływających na jej kształt, co jest niezbędne dla efektywnego zarządzania ryzykiem stóp procentowych. Przeprowadzona aproksymacja krzywej dochodowości wykazała znaczną segmentację rynku dłużnych papierów wartościowych na rynki instrumentów krótko- i długoterminowych. Analiza głównych składowych struktury terminowej stóp procentowych pozwoliła na wyodrębnienie czynników ryzyka. Uzyskane wyniki wykazały, że do wyjaśnienia zmienności struktury terminowej stóp procentowych w Polsce wystarczą trzy główne składowe, związane z wysokością, nachyleniem i krzywizną krzywej dochodowości, których wartości potwierdzają zaobserwowaną segmentację rynku.

Słowa kluczowe: stopa procentowa, struktura terminowa stóp procentowych, krzywa dochodowości, krzywe sklepane trzeciego stopnia, analiza głównych składowych

TERM STRUCTURE OF INTEREST RATES IN POLAND – ESTIMATION AND IDENTIFICATION OF THE FACTORS DETERMINING ITS SHAPE

Abstract

The aim of the article was to estimate the term structure of interest rates in Poland, as well as to identify factors affecting its shape, which is essential in effective interest rate risk management. The approximation of the yield curve presented in the article shows a significant segmentation of the debt securities market into markets of short-term and long-term instruments. The principal component analysis of the term structure of interest rates made it possible to separate out risk factors. The results obtained indicate that the volatility of the term structure of interest rates in Poland can be explained by only three principal components related to the level, the steepness and the curvature of the yield curve, which values confirm the observed market segmentation.

Key words: interest rate, term structure of interest rates, yield curve, cubic splines, principal component analysis

GRZEGORZ PERCZAK, PIOTR FISZEDER

ESTYMACJA WARIANCJI ARYTMETYCZNEGO RUCHU BROWNA NA PODSTAWIE ZNANYCH WARTOŚCI MINIMUM, MAKSYMUM, KOŃCOWEJ ORAZ DRYFU¹

1. WPROWADZENIE

Zmienność jest jednym z ważniejszych pojęć współczesnych finansów. Jej znaczenie w teorii finansów jest fundamentalne. Wynika zarówno z teorii finansów, jak i zastosowań praktycznych. Zmienność ma zastosowanie zarówno w klasycznej teorii portfela, wycenie opcji czy analizach obejmujących problem pomiaru ryzyka. Wariancja logarymicznej stopy zwrotu instrumentu finansowego może być miarą niepewności co do wielkości przyszłych zmian ceny tego instrumentu. Estymacja tego parametru dokonywana jest na podstawie historycznych notowań rynkowych. W praktyce występuje jednak zazwyczaj problem z dostępem do szczegółowych danych. W ogólnodostępnych publikowanych notowaniach cen instrumentów finansowych podawane są najczęściej ceny: otwarcia, minimalna, maksymalna oraz zamknięcia, jakie zostały zaobserwowane w danym dniu. Z jednej strony, tak niepełny zbiór danych utrudnia precyzyjne oszacowanie wariancji. Z drugiej strony, bardzo często w analizie danych finansowych wykorzystuje się szeregi czasowe tylko cen zamknięcia, co powoduje, że estymator wariancji konstruowany jest na podstawie jeszcze bardziej skąpego zbioru danych składającego się z dziennych stóp zwrotu. Celowe wydaje się zatem przedstawienie problemu wykorzystania dodatkowych informacji o minimalnej i maksymalnej dziennej cenie rynkowej w estymacji dziennej wariancji, którym to terminem określano w dalszej części pracy wariancję stopy zwrotu zaobserwowaną między zamknięciami notowań w kolejnych dniach.

Literatura naukowa dostarcza wielu metod estymacji dziennej wariancji. Często różnią się one przyjętymi założeniami, a także wykorzystują różnego typu dostępne notowania. Konstruowane w ten sposób estymatory różnią się również znacząco efektywnością. W niniejszym opracowaniu zostaną bliżej omówione tylko te, które wykorzystują znajomość co najwyżej cen otwarcia, minimalnej, maksymalnej i zamknięcia. Przedmiotem zainteresowania nie są estymatory konstruowane na podstawie średzennych stóp zwrotu (patrz np. Doman, 2011).

¹ Praca została sfinansowana ze środków Narodowego Centrum Nauki projekt numer 2012/05/B/HS4/00675 nt. „Modelowanie i prognozowanie zmienności – wykorzystanie dodatkowych informacji o cenach minimalnych i maksymalnych”.

Analiza publikacji zawierających metody estymacji dziennej wariancji: Parkinson (1980), Garman, Klass (1980), Rogers, Satchell (1991), Kunitomo (1992), Yang, Zhang (2000) prowadzi do wniosku, że w każdej z nich zastosowano inne podejście modelowe. Zostanie zatem podjęta próba kompleksowego spojrzenia na ten problem i dokonany zostanie przegląd najbardziej popularnych estymatorów, skonstruowanych na podstawie tego samego aparatu matematycznego. Prezentacja istniejącego stanu wiedzy z jednej wspólnej perspektywy pozwoli ocenić wady i zalety istniejących estymatorów, wyznaczyć analitycznie ich efektywność, ocenić zasadność założeń, na podstawie których są konstruowane, ocenić własności estymatorów w sytuacji, gdy nie są spełnione założenia modelowe, a także stać się inspiracją do poszukiwań innych sposobów estymacji wariancji.

Podstawą prowadzonych w pracy analiz będzie rozkład łączny trójwymiarowego wektora, którego współrzędnymi są zmienne losowe minimum, maksimum i wartości końcowej arytmetycznego ruchu Browna. Znajomość rozkładu tego wektora umożliwia obliczenie wartości oczekiwanych praktycznie dowolnych funkcji współrzędnych tego wektora. Zostanie pokazane, że niektóre z tych wartości oczekiwanych są równe wariancji procesu, uzyskany zostanie zatem pewien zbiór estymatorów tego parametru. To z kolei umożliwi zarówno sprawdzenie nieobciążoności znanych estymatorów, jak również obliczenie ich efektywności oraz konstrukcję nowego, nieobciążonego estymatora. Ponadto, zostanie pokazane, że jest on efektywniejszy od wielu innych dotychczas zaproponowanych estymatorów, pomimo że nie wymaga spełnienia restrykcyjnych założeń.

Wspólną cechą podstawowych, znanych estymatorów dziennej wariancji stopy zwrotu jest fakt, że albo zakładają one uproszczony model, gdy dryf ma wartość zerową, albo ich konstrukcja nie wykorzystuje znajomości wartości dryfu. Wydaje się natomiast, że wykorzystanie informacji o wartości dodatkowego parametru powinno zwiększyć efektywność estymatora. W opracowaniu zostaną przedstawione wyniki dotyczące wykorzystania takiego estymatora do estymacji wariancji procesu obserwowanego na rynku kapitałowym. Zostanie pokazane, że szacunki zmienności konstruowane na podstawie estymatorów wykorzystujących dodatkowo znajomość dziennych cen minimalnych i maksymalnych są bardziej trafne niż te, które konstruuje się na podstawie modelu GARCH. Estymator konstruowany na podstawie dodatkowych informacji o cenach minimalnych i maksymalnych może być w przyszłości wykorzystany do budowy modeli GARCH, dzięki czemu będzie możliwe uzyskanie jeszcze trafniejszych szacunków zmienności.

Układ artykułu jest następujący. W części drugiej zostanie przedstawiony rozkład łączny zmiennych losowych minimum, maksimum i wartości końcowej arytmetycznego ruchu Browna, a następnie zostanie wyznaczona jego gęstość i funkcja charakterystyczna oraz wartości oczekiwane iloczynów potęg tych zmiennych losowych. Dodatkowo obliczone zostaną wartości oczekiwane funkcji zmiennych losowych minimum, maksimum i wartości końcowej dla niezerowej wartości dryfu. Część trzecia zawierać będzie omówienie znanych estymatorów dziennej wariancji. Wyznaczona

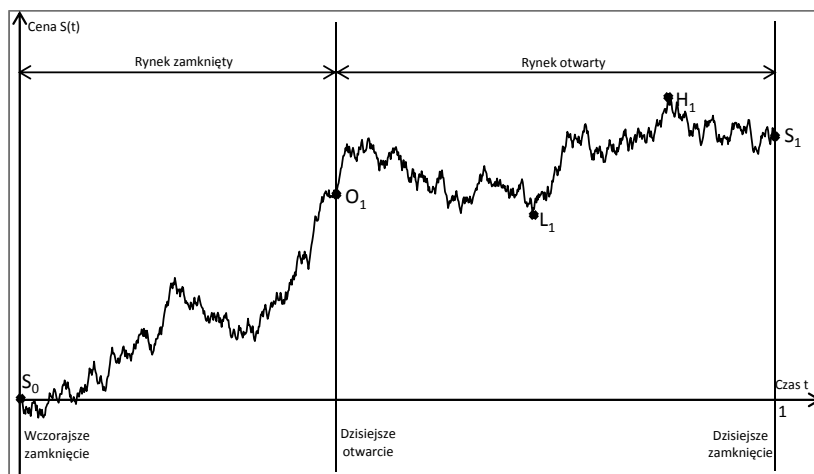
będzie nie tylko ich efektywność, lecz także wartość obciążenia, w sytuacji gdy nie są spełnione założenia modelowe, na podstawie których były one konstruowane. Informacje przedstawione w części drugiej zostaną wykorzystane do propozycji nowego estymatora dziennej wariancji. Estymator ten zostanie następnie zastosowany w badaniu dotyczącym szacowania zmienności stóp zwrotu indeksu WIG20 notowanego na GPW w Warszawie. Opracowanie kończy podsumowanie. Artykuł powstał na podstawie fragmentów pracy Perczaka (2013).

2. TRÓJWYMIAROWY WEKTOR LOSOWY MINIMUM, MAKSYMUM I WARTOŚCI KOŃCOWEJ RUCHU BROWNA

2.1. ZAŁOŻENIA ORAZ OZNACZENIA

W opracowaniu przyjęto, że: t jest ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią, jednostką czasu t jest jeden dzień (czyli wartość $t = 1$ odpowiada jednej dobie), zmienna τ spełnia warunek $0 \leq \tau \leq t$, $\tau = 0$ oznacza moment rozpoczęcia notowań w bieżącym okresie, który jest jednocześnie momentem otwarcia rynku w bieżącym okresie, B_τ jest standardowym procesem Wienera, S_τ jest ceną instrumentu finansowego odnotowaną w chwili τ . Stopa zwrotu, zdefiniowana jako $x_\tau = \ln(S_\tau/S_0)$ jest realizacją arytmetycznego ruchu Browna: $X_\tau = \mu\tau + \sigma B_\tau$ w punkcie $\tau = t$. Ponadto przyjęto: $C_t := \max_{0 \leq \tau \leq t} X_\tau$, $A_t := \min_{0 \leq \tau \leq t} X_\tau$.

W praktyce najczęściej zakłada się, że rozpatrywany okres t jest równy jednej dobie. Problem wyznaczenia minimum i maksimum dziennej logarytmicznej stopy zwrotu jest nieco bardziej złożony. Jego ilustrację przedstawia rysunek 1.



Rysunek 1. Przykładowa realizacja ceny instrumentu finansowego w ciągu dnia
Źródło: opracowanie własne na podstawie pracy Garmana, Klassa (1980, str. 70).

Z notowań w ciągu dnia zazwyczaj ogólnodostępnych jest tylko pięć wielkości:

S_0 – wczorajsza cena zamknięcia,

O_1 – dzisiejsza cena otwarcia,

H_1 – odnotowane w dniu dzisiejszym maksimum ceny,

L_1 – odnotowane w dniu dzisiejszym minimum ceny,

S_1 – dzisiejsza cena zamknięcia.

Wykorzystanie informacji dotyczących cen, jakie zaobserwowano tylko w okresie od momentu rozpoczęcia do zakończenia notowań rynkowych, nie pozawalała na prawidłowe wyznaczenie zmienności dobowej. W takim wypadku można co najwyżej oszacować zmienność jaka miała miejsce w czasie funkcjonowania rynku. Wartości notowań L_1 i H_1 zostały ustalone dla okresu, w którym rynek był otwarty, a nie dla całej doby, co ilustruje rysunek 1. W związku z tym konieczne jest przededefiniowanie wartości minimalnej i maksymalnej tak, aby obejmowały one okres pomiędzy dwoma kolejnymi zamknięciami notowań (czyli pełnej doby). Ostatecznie zostaną zatem przyjęte następujące definicje dziennych stóp zwrotu minimum i maksimum $A_t = \min(\ln L_1, \ln S_0) - \ln S_0$, $C_t = \max(\ln H_1, \ln S_0) - \ln S_0$. Zmienna $X_t = \ln(S_t/S_0)$ będzie określana jako stopa zwrotu wartości końcowej. Ponadto, przyjęto założenie, że wariancja procesu jest stała w ciągu dnia, a jednocześnie dopuszczalna jest jej zmienność w kolejnych dniach. Z tego powodu ustalony został warunek: $0 < t \leq 1$.

2.2. ROZKŁAD ŁĄCZNY ZMIENNYCH LOSOWYCH STÓP ZWROTU MAKSYMUM, MINIMUM I WARTOŚCI KOŃCOWEJ RUCHU BROWNA

Znajomość rozkładu łącznego wektora trzech zmiennych losowych (A_t, C_t, X_t) umożliwia wyznaczenie wartości oczekiwanych wybranych funkcji tych zmiennych. Ponieważ rozkład ten ma skomplikowaną postać, zatem w pierwszej kolejności zaprezentowane zostaną rozkłady łączne wektorów (C_t, X_t) oraz (A_t, X_t) .

Istnieje wiele opracowań, w których omawiany jest problem rozkładu łącznego wektorów (C_t, X_t) , np. Cox, Miller (1965), Harrisson (1985). Zagadnienie to jest również bardzo często omawiane przy wycenie opcji barierowych (patrz np. Li, 1998; Jakubowski i inni, 2006).

Rozważane jest zdarzenie losowe $\{C_t \leq c, X_t \leq x\}$ gdy $x \leq c$ i $0 \leq c$. Dystrybuenta rozkładu łącznego wektora zmiennych losowych (C_t, X_t) opisana jest formułą (patrz Harrisson, 1985, str. 13, wzór (8)):

$$P(C_t \leq c, X_t \leq x; \mu, \sigma^2, t) = \Phi\left(\frac{x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2\mu c}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{x - 2c - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right), \quad (1)$$

gdzie Φ oznacza dystrybuentę standaryzowanego rozkładu normalnego.

Na podstawie równania (1) wyprowadzono formułę na gęstość rozkładu łącznego wektora zmiennych losowych (C_t, X_t) :

$$\begin{aligned}
 f_{C_t, X_t}(c, x; \mu, \sigma^2, t) &= \frac{\partial^2 P(C_t \leq c, X_t \leq x; \mu, \sigma^2, t)}{\partial c \partial x} = \\
 &= \frac{\sqrt{2}(2c - x)e^{-\frac{(x-\mu t)^2 - 4c(x-c)}{2\sigma^2 t}}}{\sqrt{\pi}\sigma^3 t^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}(2c - x)e^{-\frac{(x-2c-\mu t)^2 - 4\mu ct}{2\sigma^2 t}}}{\sqrt{\pi}\sigma^3 t^{\frac{3}{2}}}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Wyznaczono również funkcję charakterystyczną rozkładu łącznego wektora zmiennych losowych (C_t, X_t) :

$$\begin{aligned}
 \varphi_{C_t, X_t}(q, s; \mu, \sigma^2, t) &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^c e^{iqc + isx} f_{C_t, X_t}(c, x; \mu, \sigma^2, t) dx dc = \\
 &= \frac{((q+s)\sigma^2 - i\mu)e^{\frac{1}{2}(q+s)(-(q+s)\sigma^2 + 2i\mu)t} \operatorname{erfc}\left(\frac{(-\mu - i(q+s)\sigma^2)\sqrt{t}}{\sqrt{2}\sigma}\right)}{(q+2s)\sigma^2 - 2i\mu} + \\
 &\quad + \frac{(s\sigma^2 - i\mu)e^{\frac{1}{2}s(-s\sigma^2 + 2i\mu)t} \operatorname{erfc}\left(\frac{(\mu + is\sigma^2)\sqrt{t}}{\sqrt{2}\sigma}\right)}{(q+2s)\sigma^2 - 2i\mu}, \quad (3)
 \end{aligned}$$

gdzie $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$.

Z kolei rozważmy zdarzenie $\{A_t > a, X_t > x\}$ gdy $a \leq 0$ i $a \leq x$. Także w tym wypadku można wyznaczyć jego prawdopodobieństwo stosując analogię do poprzednio rozpatrywanego zdarzenia:

$$P(A_t > a, X_t > x; \mu, \sigma^2, t) = \Phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2\mu a}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-x + 2a + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right). \quad (4)$$

Gęstość rozkładu łącznego wektora zmiennych losowych (A_t, X_t) dana jest formułą:

$$\begin{aligned}
 f_{A_t, X_t}(a, x; \mu, \sigma^2, t) &= \frac{\partial^2 P(A_t > a, X_t > x; \mu, \sigma^2, t)}{\partial a \partial x} = \\
 &= \frac{\sqrt{2}(x - 2a)e^{-\frac{(x-\mu t)^2 - 4a(x-a)}{2\sigma^2 t}}}{\sqrt{\pi}\sigma^3 t^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}(x - 2a)e^{-\frac{(x-2a-\mu t)^2 - 4\mu at}{2\sigma^2 t}}}{\sqrt{\pi}\sigma^3 t^{\frac{3}{2}}}. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Funkcja charakterystyczna rozkładu łącznego wektora zmiennych losowych (A_t, X_t) wygląda następująco:

$$\begin{aligned}
\varphi_{A_t, X_t}(p, s; \mu, \sigma^2, t) &= \int_{-\infty}^0 \int_a^{\infty} e^{ipa+isx} f_{A_t, X_t}(a, x; \mu, \sigma^2, t) dx da = \\
&= \frac{((p+s)\sigma^2 - i\mu)e^{\frac{1}{2}(p+s)(-(p+s)\sigma^2 + 2i\mu)t} \operatorname{erfc}\left(\frac{(\mu + i(p+s)\sigma^2)\sqrt{t}}{\sqrt{2}\sigma}\right)}{(p+2s)\sigma^2 - 2i\mu} + \\
&\quad + \frac{(s\sigma^2 - i\mu)e^{\frac{1}{2}s(-s\sigma^2 + 2i\mu)t} \operatorname{erfc}\left(\frac{(-\mu - is\sigma^2)\sqrt{t}}{\sqrt{2}\sigma}\right)}{(p+2s)\sigma^2 - 2i\mu}. \quad (6)
\end{aligned}$$

Problem wyznaczenia rozkładu wektora (A_t, C_t, X_t) rozważany był np. w opracowaniach Coxa, Millera (1965), Li (1998). Gęstość rozkładu X_t z górną i dolną barierą absorbującą równymi odpowiednio c i a opisuje następujący wzór (patrz Cox, Miller, 1965, str. 222, formuła (78)):

$$\begin{aligned}
f_{X_t}(x; C_t \leq c, A_t > a; \mu, \sigma^2, t) &= \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2k(c-a)\mu}{\sigma^2}} \left(e^{-\frac{(x-2k(c-a)-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} - e^{-\frac{2c\mu t - (x-2c-2k(c-a)-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} \right), \quad (7)
\end{aligned}$$

gdzie $a \leq 0 \leq c, a \leq x \leq c$.

Korzystając ze wzoru (7) wyznaczono gęstość rozkładu łącznego wektora zmiennych losowych (A_t, C_t, X_t) :

$$\begin{aligned}
f_{A_t, C_t, X_t}(a, c, x; \mu, \sigma^2, t) &= -\frac{\partial^2 f_{X_t}(x; C_t \leq c, A_t > a; \mu, \sigma^2, t)}{\partial a \partial c} = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (g(a, c, x; k, k, \mu, \sigma, t) - g(a, c, x; k, k+1, \mu, \sigma, t)), \quad (8)
\end{aligned}$$

gdzie funkcja g opisana jest zależnością:

$$\begin{aligned}
g(a, c, x; m, n, \mu, \sigma, t) &= \\
&= \frac{4mn}{\sqrt{2\pi}\sigma^5 t^{5/2}} \left[(x - 2(nc - ma))^2 - \sigma^2 t \right] e^{\frac{2(nc-ma)\mu t - (x-2(nc-ma)-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}}. \quad (9)
\end{aligned}$$

Funkcję charakterystyczną rozkładu łącznego wektora zmiennych losowych (A_t, C_t, X_t) opisuje formuła:

$$\begin{aligned} \varphi_{A_t, C_t, X_t}(p, q, s; \mu, \sigma^2, t) &= \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} \int_a^c e^{ipa+iqc+isx} f_{A_t, C_t, X_t}(a, c, x; \mu, \sigma^2, t) dx dc da. \end{aligned} \quad (10)$$

Z uwagi na bardzo złożoną postać tej funkcji jej szczegółowe przedstawienie zostanie w tym przypadku pominięte².

Znajomość postaci funkcji charakterystycznych umożliwia obliczenie wartości oczekiwanych wybranych zmiennych losowych. Przykładowo, dla całkowitych wartości u, v, w uzyskujemy:

$$E[A_t^u C_t^v X_t^w] = \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n \varphi_{A_t, C_t, X_t}(p, q, s; \mu, \sigma^2, t)}{\partial p^u \partial q^v \partial s^w}, \quad (11)$$

gdzie $n = u + v + w$.

W sytuacji, gdy $u = 0$ lub $v = 0$, wygodniej jest skorzystać odpowiednio z formuł:

$$E[C_t^v X_t^w] = \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n \varphi_{C_t, X_t}(q, s; \mu, \sigma^2, t)}{\partial q^v \partial s^w} \quad (12)$$

oraz

$$E[A_t^u X_t^w] = \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n \varphi_{A_t, X_t}(p, s; \mu, \sigma^2, t)}{\partial p^u \partial s^w}. \quad (13)$$

2.3. MOMENTY ZWYKŁE ZMIENNYCH LOSOWYCH STÓP ZWROTU MINIMUM, MAKSIMUM I WARTOŚCI KOŃCOWEJ RUCHU BROWNA

Przyjęto następujące oznaczenia i definicje:

$$v := \frac{\mu\sqrt{t}}{\sigma}, \quad (14)$$

$$Z(n, y, v) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+y)^n} e^{-\frac{2k(k+1)v^2}{(2k+1)^2}}, \quad (15)$$

dla $n \in \mathbb{Z}, n > 0, y > 0, v \in \mathbb{R}$,

$$\zeta(n) := Z(n, 0, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}, \quad (16)$$

² Formuła może zostać udostępniona na życzenie Czytelnika.

dla $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$ $\zeta(n)$ jest tzw. funkcją Zeta-Riemanna,

$$Z_1(v) := Z(1, 0, v) - 2Z\left(1, \frac{1}{2}, v\right) + Z(1, 1, v), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} Z_2(v) &:= 1 - Z(2, 0, v) + Z(2, 1, v) = \\ &= 2(3 - 4 \ln 2)v^2 + 2v^4 + \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty} v^{2m} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(-1)^{m+j} (2^{2j+1} - 1) \zeta(2j+1)}{2^{m+2j-3} m(m-1)(m-j-1)! (j-1)!} = \\ &= 2(3 - 4 \ln 2)v^2 + \left(2 - \frac{7\zeta(3)}{4}\right)v^4 + \left(\frac{7\zeta(3)}{24} - \frac{31\zeta(5)}{96}\right)v^6 + \\ &+ \left(-\frac{7\zeta(3)}{192} + \frac{31\zeta(5)}{384} - \frac{127\zeta(7)}{3072}\right)v^8 + \\ &+ \left(\frac{7\zeta(3)}{1920} - \frac{31\zeta(5)}{2560} + \frac{127\zeta(7)}{10240} - \frac{511\zeta(9)}{122880}\right)v^{10} + \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

$$Z_3(v) := Z(3, 0, v) + Z(3, 1, v), \quad (19)$$

$$Z_4(v) := 1 - Z(4, 0, v) + Z(4, 1, v), \quad (20)$$

$$H_1(v) := \frac{1}{2} + \frac{1}{2v^2}(-3 + Z_2(v) + Z_3(v)) + \frac{1}{4v^4}(8Z_2(v) - Z_4(v)), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} H_2(v) &:= -Z\left(3, \frac{1}{2}, v\right) + 4Z_1(v) + \frac{1}{2}Z_2(v) - \\ &- \frac{3}{2v^2}(4Z_1(v) + Z_2(v)) + \frac{3}{v^4}Z_2(v), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} H_3(v) &:= -\frac{3}{2} - \frac{v^2}{2} + 6Z_1(v) + \frac{3}{4}Z_2(v) - \frac{3}{2}Z\left(3, \frac{1}{2}, v\right) + \\ &+ \frac{1}{v^2}\left(\frac{9}{4} - 9Z_1(v) - 3Z_2(v) - \frac{3}{4}Z_3(v)\right) + \\ &+ \frac{1}{v^4}\left(-\frac{3}{2} + 3\zeta(3)e^{-\frac{v^2}{2}} + 3Z_2(v) - \frac{3}{2}Z_3(v) + \frac{3}{4}Z_4(v)\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Korzystając z formuł (11), (12), (13) można obliczyć wartości oczekiwane dowolnych potęg zmiennych A_t , C_t , X_t . Poniżej przedstawiono wyprowadzone wzory dla wybranych momentów do czwartego rzędu włącznie.

Momenty pierwszego rzędu dla $v \neq 0$ ($\mu \neq 0$) dane są w postaci:

$$E[X_t] = \mu t = v\sigma\sqrt{t}, \quad (24)$$

$$E[C_t] = \frac{\sigma\sqrt{t}}{2} \left(\left(\frac{1}{v} + v \right) \operatorname{erf}\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} + v \right), \quad (25)$$

$$E[A_t] = \frac{\sigma\sqrt{t}}{2} \left(-\left(\frac{1}{v} + v \right) \operatorname{erf}\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} + v \right). \quad (26)$$

Momenty drugiego rzędu dla $v \neq 0$ ($\mu \neq 0$) opisują formuły:

$$E[X_t^2] = \sigma^2 t + \mu^2 t^2 = \sigma^2 t(1 + v^2), \quad (27)$$

$$E[C_t^2] = \sigma^2 t \left[\left(-\frac{1}{2v^2} + 2v^2 + 1 \right) \operatorname{erf}\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) + \frac{(1 + v^2)e^{-\frac{v^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}v} + 1 + \frac{v^2}{2} \right], \quad (28)$$

$$E[A_t^2] = \sigma^2 t \left[\left(\frac{1}{2v^2} - 2v^2 - 1 \right) \operatorname{erf}\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) - \frac{(1 + v^2)e^{-\frac{v^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}v} + 1 + \frac{v^2}{2} \right], \quad (29)$$

$$E[A_t C_t] = \sigma^2 t \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{4v^2} Z_2(v) \right], \quad (30)$$

$$E[C_t X_t] = \sigma^2 t \left[\left(-\frac{1}{2v^2} + 2v^2 + 1 \right) \operatorname{erf}\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) + \frac{(1 + v^2)e^{-\frac{v^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}v} + \frac{1}{2} + \frac{v^2}{2} \right], \quad (31)$$

$$E[A_t X_t] = \sigma^2 t \left[\left(\frac{1}{2v^2} - 2v^2 - 1 \right) \operatorname{erf}\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) - \frac{(1 + v^2)e^{-\frac{v^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}v} + \frac{1}{2} + \frac{v^2}{2} \right]. \quad (32)$$

Moment trzeciego rzędu dla $v \neq 0$ ($\mu \neq 0$) opisuje zależność:

$$E[X_t^3] = 3\sigma^2 \mu t^2 + \mu^3 t^3 = \sigma^3 t^{\frac{3}{2}} (3v + v^3). \quad (33)$$

Momenty czwartego rzędu dla $v \neq 0$ ($\mu \neq 0$) przedstawione są równaniami:

$$E[X_t^4] = 3\sigma^4 t^2 + 6\sigma^2 \mu^2 t^3 + \mu^4 t^4, \quad (34)$$

$$E[A_t^2 X_t^2 + C_t^2 X_t^2] = 4\sigma^4 t^2 + 7\sigma^2 \mu^2 t^3 + \mu^4 t^4, \quad (35)$$

$$E[A_t^4 + C_t^4] = 6\sigma^4 t^2 + 8\sigma^2 \mu^2 t^3 + \mu^4 t^4, \quad (36)$$

$$E[A_t^3 X_t + C_t^3 X_t] = \frac{9}{2}\sigma^4 t^2 + \frac{15}{2}\sigma^2 \mu^2 t^3 + \mu^4 t^4, \quad (37)$$

$$E[A_t X_t^3 + C_t X_t^3] = 3\sigma^4 t^2 + 6\sigma^2 \mu^2 t^3 + \mu^4 t^4, \quad (38)$$

$$E[A_t^2 C_t^2] = \sigma^4 t^2 H_1(v), \quad (39)$$

$$E[A_t^2 C_t X_t + A_t C_t^2 X_t] = \sigma^4 t^2 \left(H_2(v) - \frac{v^2}{2} - \frac{1}{2} \right), \quad (40)$$

$$E[A_t C_t X_t^2] = \sigma^4 t^2 \left(\frac{1}{2} H_2(v) - \frac{v^2}{2} - \frac{1}{2} \right), \quad (41)$$

$$E[A_t^3 C_t + A_t C_t^3] = \sigma^4 t^2 H_3(v). \quad (42)$$

Dla $v = 0$ ($\mu = 0$) przedstawione w równaniach (24-42) momenty zmiennych losowych można wyznaczyć analogicznie korzystając z tych samych formuł (11), (12), (13). Jednak w tym wypadku konieczne jest wyznaczenie granic funkcji po prawej stronie dla $v \rightarrow 0$ ($\mu \rightarrow 0$). W większości wypadków, prostszym sposobem jest jednak wykorzystanie wzoru Vasicka (patrz Garman, Klass, 1980, str. 78). Gotowe wyniki można znaleźć w pracy Garmana, Klasa (1980, str. 74).

3. ESTYMATORY ZMIENNOŚCI

3.1. PRZEGLĄD ESTYMATORÓW WARIANCJI KONSTRUOWANYCH NA PODSTAWIE ZNAJOMOŚCI CEN MINIMALNYCH, MAKSYMALNYCH I ZAMKNIĘCIA

Tożsamości (24-42) zostały wyprowadzone przy wykorzystaniu znajomości rozkładu łącznego zmiennych losowych A_t , C_t , X_t . Na ich podstawie można uzyskać wiele informacji na temat znanych estymatorów wariacji ruchu Browna. Autorom publikacji nie jest znane żadne opracowanie, w którym przedstawiona byłaby kom-

pleksowa analiza estymatorów wariancji przy wykorzystaniu tego samego aparatu matematycznego. W punkcie 3.1 wyznaczone zostaną m.in. obciążenia wybranych, popularnych estymatorów wariancji dla niezerowego dryfu, a także sformułowane zostaną dokładne wartości wariancji estymatorów. Te charakterystyki nie były dotąd nigdzie publikowane.

Najbardziej popularny, nieobciążony estymator wariancji procesu konstruowany jest na podstawie jedynie cen zamknięcia, ale wymaga również znajomości wartości dryfu. Można go przedstawić w postaci formuły:

$$\widehat{s}_0^2(t) = (X_t - \mu t)^2. \quad (43)$$

Jego wariancja jest równa:

$$\text{Var}[\widehat{s}_0^2(t)] = E[(X_t - \mu t)^2 - \sigma^2 t]^2 = E[(X_t - \mu t)^4 - \sigma^4 t^2] = 2\sigma^4 t^2. \quad (44)$$

Wysoka wartość wariancji tego estymatora wynika oczywiście z częściowego tylko wykorzystania zbioru danych A_t , C_t , X_t .

Podobną cechę ma **estymator Parkinsona** (1980) dany wzorem:

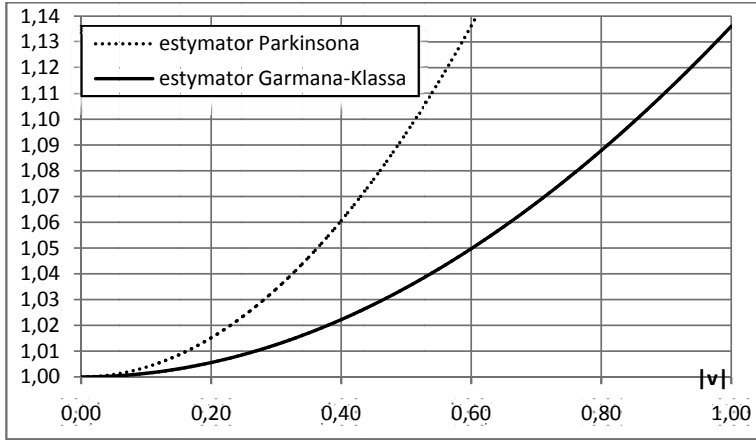
$$\widehat{s}_1^2(t) = \frac{(C_t - A_t)^2}{4 \ln 2}, \quad (45)$$

przy konstrukcji którego nie wykorzystuje się znajomości X_t . Dla $\mu = 0$ jest on nieobciążonym estymatorem wariancji $\sigma^2 t$ arytmetycznego ruchu Browna. W praktyce, estymator ten wykorzystywany jest często w sytuacji, gdy wartość dryfu μ jest nieznaną, bądź też, gdy $\mu \neq 0$. Korzystając z równań (28-30) wyprowadzono formułę na wartość oczekiwaną estymatora Parkinsona dla niezerowego dryfu:

$$\begin{aligned} E[\widehat{s}_1^2(t)] &= \frac{1}{4 \ln 2} \left(3 - \frac{1}{2v^2} Z_2(v) + v^2 \right) \sigma^2 t = \\ &= \left(1 + \frac{1}{4 \ln 2} \sum_{m=1}^{\infty} v^{2m} \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^{m+j} (2^{2j+1} - 1) \zeta(2j+1)}{2^{m+2j-1} m(m+1)(m-j)!(j-1)!} \right) \sigma^2 t = \\ &= \left[1 + \frac{7\zeta(3)}{32 \ln 2} v^2 + \left(-\frac{7\zeta(3)}{192 \ln 2} + \frac{31\zeta(5)}{768 \ln 2} \right) v^4 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{7\zeta(3)}{1536 \ln 2} - \frac{31\zeta(5)}{3072 \ln 2} + \frac{127\zeta(7)}{24576 \ln 2} \right) v^6 + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{7\zeta(3)}{15360 \ln 2} + \frac{31\zeta(5)}{20480 \ln 2} - \frac{127\zeta(7)}{81920 \ln 2} + \frac{511\zeta(9)}{983040 \ln 2} \right) v^8 + \dots \right] \sigma^2 t, \quad (46) \end{aligned}$$

gdzie v oraz $\zeta(\cdot)$ zostały zdefiniowane w równaniach (14) i (16).

Rysunek 2 daje pogląd na temat wielkości obciążenia tego estymatora w zależności od wartości parametru v .



Iloraz wartości oczekiwanej estymatora i wariancji ruchu Browna w zależności od parametru v .

Rysunek 2. Obciążenie estymatorów Parkinsona i Garmana-Klassa dla niezerowego dryfu

Źródło: opracowanie własne.

Korzystając z tożsamości podanych we wzorach (28–30), (36), (39) i (42) można wyznaczyć wariancję estymatora Parkinsona:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\widehat{s}_1^2(t)] &= E \left[\left(\frac{(C_t - A_t)^2}{4 \ln 2} - E \left[\frac{(C_t - A_t)^2}{4 \ln 2} \right] \right)^2 \right] = \\ &= \left[\frac{-3 + 2v^2 + Z_2(v) + 6H_1(v) - 4H_3(v)}{16 \ln^2 2} + \frac{3Z_2(v)}{16v^2 \ln^2 2} - \frac{Z_2^2(v)}{64v^4 \ln^2 2} \right] \sigma^4 t^2. \end{aligned} \quad (47)$$

Na podstawie tożsamości zawartych w Garman, Klass (1980, str. 74), dla $\mu = 0$ otrzymujemy:

$$\text{Var}[\widehat{s}_1^2(t)] = \left(-1 + \frac{9\zeta(3)}{16 \ln^2 2} \right) \sigma^4 t^2 \approx 0,407332 \sigma^4 t^2. \quad (48)$$

Wynik ten zgodny z rezultatem podanym przez Parkinsona (1980, str. 63), lecz odbiega od szacunku podanego przez Garmana, Klassa (1980, str. 71), według których estymator $\widehat{s}_1^2(t)$ jest 5.2 razy efektywniejszy od $\widehat{s}_0^2(t)$. W żadnej z omawianych prac nie podano dokładnych formuł, na podstawie których zostały wyznaczone te wartości.

Garman, Klass (1980) rozważali również tylko przypadek, gdy $\mu = 0$. Skonstruowali oni estymator wariancji arytmetycznego ruchu Browna dany formułą (określany dalej jako estymator G-K):

$$\widehat{s^2}_2(t) = \frac{(C_t - A_t)^2}{2} - (2 \ln 2 - 1)X_t^2. \quad (49)$$

Na podstawie równań (28-30) skonstruowano formułę na wartość oczekiwaną estymatora G-K dla $v \neq 0$ ($\mu \neq 0$):

$$\begin{aligned} E[\widehat{s^2}_2(t)] &= \left(\left(\frac{5}{2} - 2 \ln 2 \right) + \left(\frac{3}{2} - 2 \ln 2 \right) v^2 - \frac{1}{4v^2} Z_2(v) \right) \sigma^2 t = \\ &= [1 + (1 - 2 \ln 2)v^2 + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} v^{2n} \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \frac{(2^{2j+1} - 1)\zeta(2j+1)}{2^{n+2j} n(n+1)(n-j)!(j-1)!}] \sigma^2 t = \\ &= \left[1 + \left(1 - 2 \ln 2 + \frac{7}{16} \zeta(3) \right) v^2 + \left(-\frac{7}{96} \zeta(3) + \frac{31}{384} \zeta(5) \right) v^4 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{7\zeta(3)}{768} - \frac{31\zeta(5)}{1536} + \frac{127\zeta(7)}{12288} \right) v^6 + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{7\zeta(3)}{7680} + \frac{31\zeta(5)}{10240} - \frac{127\zeta(7)}{40960} + \frac{511\zeta(9)}{491520} \right) v^8 + \dots \right] \sigma^2 t. \end{aligned} \quad (50)$$

Na podstawie rysunku 2 można ocenić wielkość obciążenia tego estymatora w zależności od wartości parametru v .

Wariancja estymatora G-K jest równa:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\widehat{s^2}_2(t)] &= \\ &= E \left[\left(\frac{(C_t - A_t)^2}{2} - (2 \ln 2 - 1)X_t^2 - E \left[\frac{(C_t - A_t)^2}{2} - (2 \ln 2 - 1)X_t^2 \right] \right)^2 \right] = \\ &= \left[\frac{13}{4} - 12 \ln 2 + 8 \ln^2 2 + \left(\frac{17}{2} - 24 \ln 2 + 16 \ln^2 2 \right) v^2 + \frac{3H_1(v)}{2} - \right. \\ &\quad \left. - (2 \ln 2 - 1)H_2(v) - H_3(v) + \left(\frac{3}{4} - \ln 2 \right) Z_2(v) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(5 - 4 \ln 2)Z_2(v)}{4v^2} - \frac{Z_2^2(v)}{16v^4} \right] \sigma^4 t^2. \end{aligned} \quad (51)$$

Przy wyprowadzeniu równania (51) korzystano z formuł (28-30), (34-36), (39), (41) i (42). Na podstawie tożsamości zawartych w Garman, Klass (1980, str. 74), dla $\mu = 0$ otrzymujemy:

$$\text{Var}[\widehat{s}_2^2(t)] = \left(2 - 8 \ln 2 + 4 \ln^2 2 + \left(4 - \frac{7}{2} \ln 2\right) \zeta(3)\right) \sigma^4 t^2 \approx 0,2687 \sigma^4 t^2. \quad (52)$$

Uzyskany w równaniu (52) rezultat jest zgodny z szacunkami podanymi przez Garmana, Klasa (1980, str. 74), według których estymator $\widehat{s}_2^2(t)$ jest 7,4 razy bardziej efektywny od $\widehat{s}_0^2(t)$ oraz z wynikami Rogersa, Satchella (1991, str. 505), według których wariancja estymatora $\widehat{s}_2^2(t)$ jest równa $0,27 \sigma^4 t^2$.

Rogers, Satchell (1991) prowadzili badania dla niezerowego dryfu. Zaproponowali oni następujący estymator wariancji procesu X_t (określany dalej jako R-S):

$$\widehat{s}_3^2(t) = C_t(C_t - X_t) + A_t(A_t - X_t), \quad (53)$$

który nie tylko jest nieobciążony dla wszystkich wartości $\mu \neq 0$, ale znajomość tego parametru nie jest konieczna do estymacji wariancji procesu. Wariancja tego estymatora jest równa:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\widehat{s}_3^2(t)] &= E[(C_t(C_t - X_t) + A_t(A_t - X_t) - \sigma^2 t)^2] = \\ &= (2H_1(v) - H_2(v)) \sigma^4 t^2. \end{aligned} \quad (54)$$

Równanie (54) zostało wyprowadzone z wykorzystaniem formuł (35-37), (39-42). Dla $\mu = 0$ uzyskujemy:

$$\text{Var}[\widehat{s}_3^2(t)] = \left(1 - 4 \ln 2 + \frac{7}{4} \zeta(3)\right) \sigma^4 t^2 \approx 0,331011 \sigma^4 t^2. \quad (55)$$

Otrzymana wartość $\text{Var}[\widehat{s}_3^2(t)]$ jest zgodna z wynikami Rogersa, Satchella (1991, str. 505). Także w tym wypadku nie podano formuł, na podstawie których wartość ta została wyznaczona.

W niniejszej pracy rozważane są estymatory, które konstruowane są na podstawie jedynie pojedynczego wektora zmiennych losowych (A_t, C_t, X_t) . W badaniach finansowych wykorzystuje się szereg innych estymatorów zmienności, które konstruowane są na podstawie szerszego zbioru informacji. Jednym z nich jest estymator o bardzo wysokiej efektywności, zaproponowany przez Kunitomo (1992). Wykorzystuje on tzw. skorygowaną maksymalną i minimalną wartość, lecz do ich wyznaczenia konieczna jest znajomość wszystkich śróddziennych stóp zwrotu. Z tego względu estymator ten nie będzie bliżej omawiany.

Jak zostało to już zaznaczone, przedstawione dotychczas estymatory stosowane są w praktyce do wyznaczania wariancji dla jednego dnia notowań. Przy określeniu

ich własności przyjęto założenie, że dzienne logarytmiczne stopy zwrotu są realizacją ruchu Browna o ustalonych na dany dzień wartościach dryfu μ oraz wariancji σ^2 . Czasami jednak estymatory te wykorzystywane są do obliczenia wariancji dla okresu, którego długość przekracza jeden dzień. Wówczas zakłada się, że wariancja stóp zwrotu jest stała w danym okresie, ponadto przyjmuje się, że jej szacunek w skali jednego dnia jest równy średniej arytmetycznej dziennych wariancji wyznaczonych dla kolejnych dni należących do przyjętego okresu. W takim wypadku mamy zatem do czynienia z bardzo istotnym wzmocnieniem założeń przyjętego modelu. Należy jednak zauważyć, że dla większości szeregów finansowych tak wzmocnione założenie jest nieprawdziwe w świetle wyników badań empirycznych (patrz np. prace przeglądowe dotyczące zmienności warunkowej wariancji – Bollerslev, Chou, Kroner, 1992, Bollerslev, Engle, Nelson, 1994). Z tego powodu, taki sposób wykorzystania przedstawionych estymatorów nie był przedmiotem zainteresowania niniejszego opracowania.

Przy założeniu stałości wariancji dla okresu dłuższego niż jeden dzień skonstruowany został również estymator zaproponowany przez Yanga, Zhanga (2000). Wykorzystuje on znajomość wartości ciągu wektorów o długości większej od 1, których współrzędnymi są ceny dziennego otwarcia, maksimum, minimum i zamknięcia. Zatem, dodatkowo uwzględniane są tzw. zwroty nocne, czyli stopy zwrotu pomiędzy ceną zamknięcia poprzedniego dnia i ceną otwarcia dnia następnego (patrz rysunek 1). Ze względu na wysoką efektywność i powszechną dostępność danych, na podstawie których jest konstruowany, jest on jednym z najpowszechniej stosowanych estymatorów zmienności wykorzystujących cenę otwarcia, minimalną, maksymalną i zamknięcia. Nie jest natomiast możliwe wykorzystanie tego estymatora do szacowania wariancji tylko dla jednego dnia. Z tego względu, a także z powodu przyjętych bardzo silnych założeń, estymator ten nie będzie również bliżej omawiany.

3.2. PROPOZYCJA NOWEGO ESTYMATORA ZMIENNOŚCI

Według wiedzy autorów, w przypadku gdy nie jest znana wartość dryfu μ , estymator R-S jest najbardziej efektywnym ze znanych estymatorów wariancji ruchu Browna dla niezerowej wartości dryfu konstruowanym na podstawie realizacji wektora zmiennych (A_t, C_t, X_t) (w przypadku $\mu = 0$ najbardziej efektywnym znanym estymatorem jest estymator G-K). Można postawić pytanie, czy w sytuacji, gdy znana jest wartość parametru μ , istnieje możliwość wykorzystania tej dodatkowej informacji tak, aby poprawić efektywność estymatora R-S.

Poniżej zostanie zaproponowany estymator wariancji ruchu Browna przy znanej wartości parametru μ , konstruowany na podstawie realizacji (A_t, C_t, X_t) . Rozważmy następujące estymatory wariancji:

$$\widehat{s^2}_{11}(t) = A_t X_t + C_t X_t - \mu^2 t^2, \quad (56)$$

$$\widehat{s}_{12}^2(t) = \frac{1}{2}(A_t^2 + C_t^2 - \mu^2 t^2), \quad (57)$$

$$\widehat{s}_{13}^2(t) = X_t^2 - \mu^2 t^2. \quad (58)$$

Wykorzystując formuły (31), (32), (27), (28), (29), można łatwo pokazać, że $\widehat{s}_{11}^2(t)$, $\widehat{s}_{12}^2(t)$, $\widehat{s}_{13}^2(t)$ są nieobciążonymi estymatorami wariancji $\sigma^2 t$ arytmetycznego ruchu Browna. W związku z tym estymator:

$$\widehat{s}^2(a, b, t) = a\widehat{s}_{11}^2(t) + b\widehat{s}_{12}^2(t) + (1 - a - b)\widehat{s}_{13}^2(t) \quad (59)$$

jest również nieobciążonym estymatorem wariancji $\sigma^2 t$ dla wszystkich $a, b \in \mathbb{R}$. Łatwo zauważyć, że dla $a = -1$ i $b = 2$ otrzymujemy estymator R-S. Wariancja estymatora $\widehat{s}^2(a, b, t)$ dana jest formułą:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\widehat{s}^2(a, b, t)] &= \left(H_2(v) \left(a + \frac{b}{2} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{4} H_{12}(v) \left(b - \frac{4(1+2v^2)}{H_{12}(v)} \right)^2 - \frac{4(1+2v^2)^2}{H_{12}(v)} + 2 + 4v^2 \right) \sigma^4 t^2, \end{aligned} \quad (60)$$

gdzie:

$$H_{12}(v) = 2H_1(v) - H_2(v) + 2 + 4v^2, \quad (61)$$

natomiast funkcje H_1 i H_2 zdefiniowano odpowiednio w równaniach (21) i (22).

Funkcje $H_2(v)$ i $H_{12}(v)$ przyjmują wartości dodatnie dla $v \in \mathbb{R}$. Z uwagi na ograniczoną objętość artykułu dowód tego faktu zostanie pominięty³. W związku z tym funkcja $V[\widehat{s}^2(a, b)]$ osiąga minimum dla:

$$b = b_{\min}(v) := \frac{4(1+2v^2)}{H_{12}(v)}, \quad (62)$$

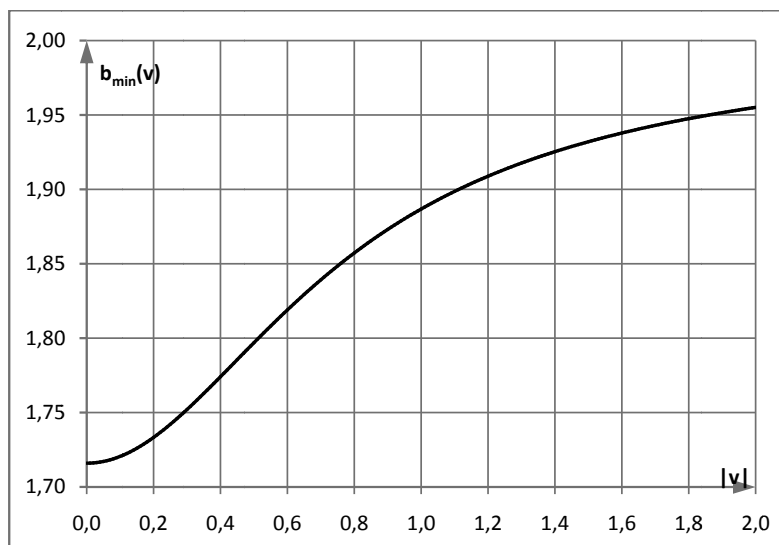
$$a = a_{\min}(v) := -\frac{b_{\min}(v)}{2} = -\frac{2(1+2v^2)}{H_{12}(v)}. \quad (63)$$

Jeżeli $v = 0$, wówczas wartość parametru b , dla której wariancja estymatora osiąga minimum wynosi:

³ Wyniki mogą zostać udostępnione na życzenie Czytelnika.

$$b_{\min}(0) := \frac{16}{12 - 16 \ln 2 + 7\zeta(3)} \approx 1,715994. \quad (64)$$

Funkcja $b_{\min}$ jest parzysta. Rosnące wartości bezwzględne argumentu v powodują monotoniczny wzrost $b_{\min}$; dla $v \rightarrow \pm\infty$ funkcja ta asymptotycznie dąży do 2 (patrz rysunek 3).



Rysunek 3. Wartości parametru b w zależności od wartości v , dla których wariancja zaproponowanego estymatora osiąga minimum

Źródło: opracowanie własne.

Dla $v = 0$ wariancja estymatora jest równa:

$$V[\widehat{s^2}(a_{\min}(0), b_{\min}(0), t)] = \left(2 - \frac{16}{12 - 16 \ln 2 + 7\zeta(3)}\right) \sigma^4 t^2 \approx 0,284 \sigma^4 t^2. \quad (65)$$

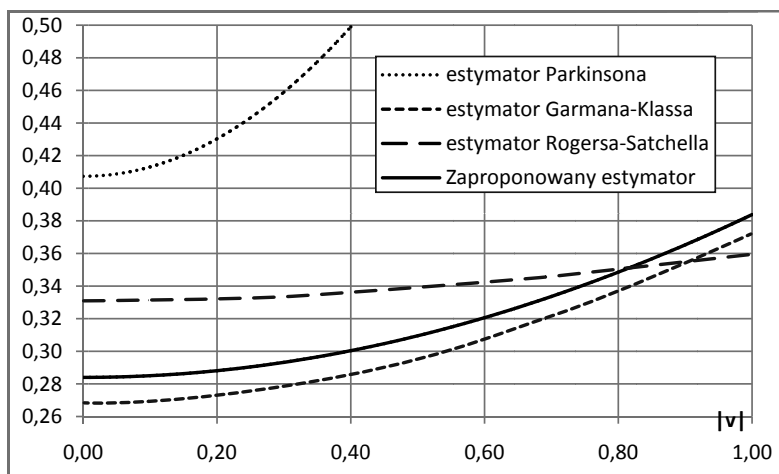
Jest ona zatem mniejsza od wariancji estymatora R-S $\widehat{s^2}_3$ i tylko nieznacznie większa od estymatora G-K $\widehat{s^2}_2$.

Sytuacja, w której postać estymatora o minimalnej wariancji zależy od wartości estymowanego parametru powoduje, że niemożliwe jest skonstruowanie najefektywniejszego estymatora. Innymi słowy, aby ustalić postać estymatora o minimalnej wariancji, trzeba znać z góry wartość estymowanego parametru. Fakt ten nie oznacza jednak, że nie ma możliwości poprawienia efektywności znanych estymatorów. W praktyce, w badaniach finansowych, w ogromnej większości przypadków występuje zależność: $|v| \ll \sigma\sqrt{t}$, czyli wartość v jest bliska 0. Do praktycznych zastosowań

wań można przyjąć wartości $b = 1,72$ i $a = -0,86$. Proponowany estymator ma zatem następującą postać:

$$\widehat{s^2}(-0,86, 1,72, t) = 0,86(C_t(C_t - X_t) + A_t(A_t - X_t)) + 0,14(X_t^2 - \mu^2 t^2). \quad (66)$$

Rysunek 4 przedstawia wykres zależności wartości wariancji estymatorów $\widehat{s^2}_1(t)$, $\widehat{s^2}_2(t)$, $\widehat{s^2}_3(t)$ i $\widehat{s^2}(-0,86, 1,72, t)$ od parametru v .



Iloraz wariancji estymatora i kwadratu wariancji ruchu Browna w zależności od parametru v .

Rysunek 4. Efektywność estymatorów wariancji w zależności od wartości parametru v

Źródło: opracowanie własne.

Jak zostało to wcześniej zaznaczone, stosowanie estymatora $\widehat{s^2}(-0,86, 1,72, t)$ wymaga znajomości parametru dryfu μ . W analizach szeregów finansowych, jego dokładna wartość niemal nigdy nie jest znana i konieczna jest jego estymacja. Powstaje zatem problem określenia wpływu estymacji dryfu na własności estymatora $\widehat{s^2}(-0,86, 1,72, t)$.

Niech $\hat{\mu}$ będzie estymatorem dryfu, określonym na podstawie dużej próby o liczebności n . Ponieważ estymacja zmienności przeprowadzana jest na podstawie informacji z pojedynczego dnia tej próby, zatem estymator wariancji $\widehat{s^2}(-0,86, 1,72, t)$ jest zależny od estymatora dryfu $\hat{\mu}$. Zależność ta maleje jednak wraz ze wzrostem liczebności próby, na podstawie której konstruowany jest estymator dryfu. W dalszej części wywodu zostanie przyjęte, że zależność ta jest na tyle słaba, że można ją pominąć. W tej sytuacji zachodzi zależność $E[\hat{\mu}^2] = \mu^2$. Można łatwo pokazać, że

obciążenie estymatora $\widehat{s^2}(-0,86, 1,72, t)$ będzie wówczas równe $0,14(\mu^2 t^2 - \hat{\mu}^2 t^2)$. Z tego wynika, że maksymalna bezwzględna wartość obciążenia estymatora $\widehat{s^2}(-0,86, 1,72, t)$ spowodowana estymacją dryfu, wynosi $0,14 \max(\mu^2 t^2, \hat{\mu}^2 t^2)$. Oznacza to, że w sytuacji gdy np. $\hat{\mu}^2 = 0$, wielkość obciążenia tego estymatora wyniesie $0,14 \nu^2 \sigma^2 t$ i tylko nieznacznie przekroczy obciążenie estymatora G-K $\widehat{s^2}_3(t)$ (patrz równanie (50) i rysunek 2). Ponadto konieczność estymacji dryfu nie spowoduje wzrostu wariancji estymatora $\widehat{s^2}(-0,86, 1,72, t)$. Ocenę obciążenia i jego wpływu na wariancję estymatora $\widehat{s^2}(-0,86, 1,72, t)$, w przypadku gdy przyjęte założenie nie będzie spełnione, można przeprowadzić dla określonych estymatorów dryfu na podstawie metody Monte Carlo.

3.3. ESTYMACJA ZMIENNOŚCI STÓP ZWROTU INDEKSU WIG20

W celu ilustracji przydatności rozważanych estymatorów zastosowano je dla indeksu rynku akcji WIG20 do szacowania wariancji logarytmicznych stóp zwrotu pomnożonych przez 100. Indeks ten został wybrany celowo, z uwagi na fakt, że obejmuje największe i najbardziej płynne spółki notowane na GPW w Warszawie. Jest to istotne, ponieważ w badaniu korzystano z danych śróddziennych, których jakość zależy w dużym stopniu od płynności rynku (Doman, 2011). Zastosowano następujące estymatory: konstruowany na podstawie cen zamknięcia $\widehat{s^2}_0(t)$, G-K $\widehat{s^2}_2(t)$, R-S $\widehat{s^2}_3(t)$ oraz zaproponowany $\widehat{s^2}(-0,86, 1,72, t)$ (opisane odpowiednio równaniami (45), (49), (53), (66)). Analizę przeprowadzono dla 10-letniego okresu od 30 września 2002 r. do 28 września 2012 r., czyli okresu obejmującego zarówno okresy hossy, jak i bessy a także, co jest istotne, kryzysu finansowego. Skonstruowano 2513 wektorów dziennych stóp zwrotu: $(a_1, c_1, x_1), (a_2, c_2, x_2), \dots, (a_{2513}, c_{2513}, x_{2513})$. Następnie przeprowadzono estymację dryfu wg następującej formuły⁴: $\hat{\mu} = \frac{1}{2513} \sum_{i=1}^{2513} x_i \approx 0,00032613502$. Kolejnym krokiem było oszacowanie wariancji dla każdego dnia w próbie, czyli dla $1 \leq i \leq 2513$:

$$\widehat{s^2}_{0,i}(1) = (x_i - \hat{\mu})^2, \quad (67)$$

$$\widehat{s^2}_{2,i}(1) = \frac{(c_i - a_i)^2}{2} - (2 \ln 2 - 1)x_i^2. \quad (68)$$

⁴ Założono stałość dryfu w czasie. Przyjęto najprostszą postać estymatora dryfu. Gdyby zastosować efektywniejszy estymator dryfu, to należałoby się spodziewać, że uzyskane wyniki szacowania zmienności na podstawie zaproponowanego estymatora nie będą mniej dokładne od tych jakie przedstawiono w pracy.

$$\widehat{s}_{3,i}^2(1) = c_i(c_i - x_i) + a_i(a_i - x_i), \quad (69)$$

$$\widehat{s}_i^2(-0,86, 1,72, 1) = 0,86(c_i(c_i - x_i) + a_i(a_i - x_i)) + 0,14(x_i^2 - \hat{\mu}^2). \quad (70)$$

Dla porównania skonstruowano również szacunki wariancji na podstawie modelu GARCH⁵. Na podstawie kryterium informacyjnego Schwartza wybrano model GARCH(1,3) z warunkowym rozkładem t-Studenta (oznaczony jako GARCH-t(1,3)). Dodatkowo zastosowano również najczęściej stosowaną w badaniach empirycznych postać modelu GARCH(1,1) z warunkowym rozkładem normalnym. Do estymacji parametrów wspomnianych modeli wykorzystano odpowiednio metodę największej wiarygodności oraz metodę quasi-największej wiarygodności.

Do oceny dokładności szacunków zmienności jako realizacje wariancji przyjęto sumy kwadratów śróddziennych stóp zwrotu. Istotnym problemem przy zastosowaniu takich danych jest wybór odpowiedniej częstotliwości obserwacji (patrz np. Andersen, Bollerslev, Diebold, Labys, 2000 oraz Oomen, 2001). Z tego względu zmienność zrealizowaną szacowano w różnych wariantach poprzez wyznaczenie sum kwadratów 5-, 10-, 15-, 20-, 30- i 60-minutowych stóp zwrotu. Oceny dokładności szacunków zmienności konstruowanych na podstawie rozważanych metod dokonano za pomocą następujących miar⁶: odsetek przeszacowań, błąd średni ME, pierwiastek błędu średniokwadratowego RMSE, pierwiastek błędu średniokwadratowego skorygowany o heteroskedastyczność HRMSE, funkcja straty LINEX ($a = -0,01$ i $0,01$) oraz współczynnik determinacji R^2 dla równania regresji realizacji wariancji względem szacunków wariancji.

Tabela 1 przedstawia wyniki przeprowadzonej analizy w przypadku, gdy zmienność zrealizowaną obliczano na podstawie 10-minutowych stóp zwrotu. Bardzo zbliżone relacje pomiędzy rozważanymi metodami szacowania zmienności występowały również wtedy, gdy zmienność zrealizowana była wyznaczana dla 5-, 15-, 20-, 30- i 60-minutowych stóp zwrotu.

Otrzymane wyniki dla odsetka przeszacowań oraz błędu średniego wskazują, że szacunki zmienności konstruowane na podstawie estymatorów wykorzystujących dane o cenach minimalnych i maksymalnych są znacząco niedoszacowane. Wynika to jednak nie ze słabej jakości tych estymatorów, a z przyjętej miary zmienności zrealizowanej, w tym przypadku sumy kwadratów stóp zwrotu z danych śróddziennych. Podobnie jak dla danych dziennych kwadrat śróddzienną stopy zwrotu jest nieefektywnym estymatorem wariancji śróddziennej stopy zwrotu. Z tego względu w tabeli 2 przedstawiono wyniki oceny dokładności szacunków zmienności jednakże tym razem zmienność zrealizowaną szacowano na podstawie 10-minutowych

⁵ Nie zaobserwowano istotnej statystycznie autokorelacji, dlatego przyjęto następującą specyfikację równania dla średniej: $x_i = \gamma_0 + \varepsilon_i$.

⁶ Ich opis można znaleźć na przykład w pracy Fiszедера (2009).

stóp zwrotu i estymatora R-S. Przy takim podejściu stopień niedoszacowania szacunków zmienności, konstruowanych na podstawie tych estymatorów znacząco się zmniejsza.

Tabela 1.

Ocena dokładności szacunków zmienności dla indeksu WIG 20 – zmienność zrealizowana obliczana na podstawie kwadratów 10-minutowych stóp zwrotu

Estymator wariancji	Odsetek przeszacowań	ME	RMSE	HRMSE	LINEX (a = 0,01)	LINEX (a = -0,01)	R ²
s_0^2	34,06	0,0811	4,8953	1,2882	1,19E-03	1,23E-03	0,2472
s_2^2 (G-K)	22,24	0,7144	2,5562	0,4704	3,36E-04	3,21E-04	0,6532
s_3^2 (R-S)	28,21	0,6946	2,7346	0,5502	3,85E-04	3,66E-04	0,6230
s^2	26,46	0,6087	2,4212	0,4593	3,02E-04	2,86E-04	0,6848
GARCH-t(1,3)	66,77	0,0441	3,3739	1,0747	6,22E-04	5,26E-04	0,3392
GARCH(1,1)	67,29	0,0647	3,2964	1,0402	5,95E-04	5,01E-04	0,3821

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 2.

Ocena dokładności szacunków zmienności dla indeksu WIG 20 – zmienność zrealizowana obliczana na podstawie estymatora R-S i 10-minutowych stóp zwrotu

Estymator wariancji	Odsetek przeszacowań	ME	RMSE	HRMSE	LINEX (a = 0,01)	LINEX (a = -0,01)	R ²
s_0^2	39,79	-0,5497	4,7246	2,0265	1,06E-03	1,19E-03	0,2480
s_2^2 (G-K)	40,79	0,0836	2,5591	0,6936	3,18E-04	3,41E-04	0,5255
s_3^2 (R-S)	43,97	0,0637	2,8469	0,7834	3,95E-04	4,20E-04	0,5004
s^2	45,13	-0,0221	2,4830	0,7065	3,00E-04	3,20E-04	0,5659
GARCH-t(1,3)	80,30	-0,5867	2,7366	1,5616	3,91E-04	3,61E-04	0,2965
GARCH(1,1)	81,66	-0,5661	2,6555	1,5214	3,69E-04	3,39E-04	0,3248

Źródło: obliczenia własne.

Wyniki pozostałych mierników przedstawione w tabeli 1 wskazują na wyraźną przewagę estymatorów wariancji wykorzystujących dane o cenach minimalnych i maksymalnych nad estymatorem konstruowanym na podstawie modelu GARCH. Rezultaty zaprezentowane w tabeli 2 sugerują, że przewaga badanych estymatorów nie jest już tak istotna, a estymator R-S wypada nawet nieco gorzej od estymatora wariancji konstruowanego na podstawie modelu GARCH. Wszystkie rozważane

miary (poza HRMSE, tabela 2) wskazują, że najbardziej dokładne szacunki zmienności konstruowane były na podstawie zaproponowanego w pracy estymatora wariancji. Oczywiście przewaga tego podejścia nad estymatorami G-K i R-S nie zawsze jest znacząca i w wielu przypadkach jest prawdopodobnie nieistotna statystycznie.

4. ZAKOŃCZENIE

W opracowaniu przedstawiony został rozkład łączny stóp zwrotu minimum, maksimum i wartości końcowej ruchu Browna. Dzięki wykorzystaniu tego rozkładu:

- a) Udowodniono nieobciążoność najbardziej popularnych estymatorów zmienności: Parkinsona, G-K dla zerowej wartości dryfu oraz R-S dla dowolnego dryfu; innymi słowy potwierdzono zasadnicze wyniki prac jakie uzyskali autorzy tych estymatorów;
- b) Wyznaczono wartości oczekiwane estymatorów Parkinsona i G-K, w sytuacji gdy wartość dryfu jest różna od zera;
- c) Skonstruowano formuły wariancji estymatorów Parkinsona, G-K i R-S w sytuacji gdy wartość dryfu jest różna od zera.

Autorom nie są znane publikacje, które zawierałyby wyniki, o których mowa jest w punktach b) i c).

Ponadto zaproponowano nowy estymator wariancji procesu dla znanej niezerowej wartości dryfu. Nie udało się skonstruować estymatora, dla którego wariancja osiągałaby wartość minimalną niezależnie od wartości dryfu. Podjęte badania umożliwiły natomiast sformułowanie estymatora, który dla obserwowanych na rynkach finansowych rządów wielkości dryfu będzie miał mniejszą wariancję od estymatora R-S. Przyjęte w pracy założenie, że stopy zwrotu w ciągu dnia są realizacjami arytmetycznego ruchu Browna nie jest spełnione w przypadku większości szeregów finansowych, dlatego w przyszłości będą konieczne dalsze badania dotyczące innych założeń modelowych.

Wyniki przedstawione w pracy badania dla indeksu WIG20 wskazują, że szacunki wariancji konstruowane na podstawie tego estymatora są znacząco dokładniejsze od tych, jakie można uzyskać na podstawie wariancji warunkowej modelu GARCH. Estymator ten może być w przyszłości wykorzystany do budowy modeli GARCH i SV, które są obecnie najczęściej stosowane do estymacji wariancji procesów obserwowanych na rynkach finansowych (patrz np. prace przeglądowe dotyczące polskiego rynku finansowego Pipień, Osiewalski, 2004; Doman, Doman, 2009; Fiszeder, 2009, Pajor, 2010), dzięki czemu będzie możliwe uzyskanie jeszcze dokładniejszych szacunków zmienności, a co ważniejsze konstruowanie trafniejszych prognoz zmienności.

LITERATURA

- [1] Andersen T. G., Bollerslev T., Diebold F. X., Labys P., (2000), Great Realizations, *Risk*, March, 105–108.
- [2] Bollerslev T., Chou R. Y., Kroner K. F., (1992), ARCH Modelling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence, *Journal of Econometrics*, 52, 5–59.
- [3] Bollerslev T., Engle R. F., Nelson D. B., (1994), ARCH Models, w: Engle R. F., McFadden D., (red.), *Handbook of Econometrics*, 4, Elsevier Science B. V., Amsterdam.
- [4] Cox D. R., Miller M. D., (1965), *The Theory of Stochastic Processes*, Methuen and Co., London.
- [5] Doman M., (2011), *Mikrostruktura giełd papierów wartościowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.
- [6] Doman M., Doman R., (2009), *Modelowanie zmienności i ryzyka. Metody ekonometrii finansowej*, Wolters Kluwer Polska, Kraków.
- [7] Fiszeder P., (2009), *Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych*, Wydawnictwo UMK, Toruń.
- [8] Garman M. B., Klass M. J., (1980), On the Estimation of Security Price Volatilities from Historical Data, *The Journal of Business*, 53 (1), 67–78.
- [9] Harrison J. M., (1985), *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems*, John Wiley & Sons, New York.
- [10] Jakubowski J., Palczewski A., Rutkowski M., Stettner Ł. (2006), *Matematyka finansowa, instrumenty pochodne*, WNT, Warszawa.
- [11] Kunitomo N., Ikeda M., (1992), Pricing Options with Curved Boundaries, *Mathematical Finance*, 2 (4), 275–298.
- [12] Kunitomo N. (1992), Improving the Parkinson Method of Estimating Security Price Volatilities, *Journal of Business*, 65, 295–302.
- [13] Li A., (1999), The Pricing of Double Barrier Options and Their Variations, *Advances in Futures and Options Research*, 10, 17–41.
- [14] Osiewalski J., Pipień M., (2004), Bayesian Comparison of Bivariate ARCH-Type Models for the Main Exchange Rates in Poland, *Journal of Econometrics*, 123, 371–391.
- [15] Oomen R., (2001), Using High Frequency Stock Market Index Data to calculate, Model, European University Institute, Discussion Paper No. 2001/6.
- [16] Pajor A., (2010), *Wielowymiarowe procesy wariancji stochastycznej w ekonometrii finansowej. Ujęcie bayesowskie*, Zeszyty Naukowe, Seria Specjalna: Monografie 195, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie.
- [17] Parkinson M., (1980), The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return, *The Journal of Business*, 53 (1), 61–65.
- [18] Perczak G., (2013), Dodatkowe informacje o cenach minimalnych i maksymalnych w modelach klasy GARCH, rozprawa doktorska przygotowywana pod kierunkiem P. Fiszедера.
- [19] Rogers L. C. G., Satchell S. E., (1991) Estimating Variance From High, Low and Closing Prices, *The Annals of Applied Probability*, 1 (4), 504–512.
- [20] Yang D., Zhang Q., (2000), Drift-Independent Volatility Estimation Based on High, Low, Open, and Closing Prices, *Journal of Business*, 73, 477–491.

ESTYMACJA WARIANCJI ARYTMETYCZNEGO RUCHU BROWNA NA PODSTAWIE
ZNANYCH WARTOŚCI MINIMUM, MAKSYMUM, KOŃCOWEJ ORAZ DRYFU

Streszczenie

W opracowaniu poruszony jest problem wyznaczenia wariancji stopy zwrotu instrumentu finansowego na podstawie rynkowych notowań dziennych cen otwarcia, minimalnej, maksymalnej i zamknięcia. Wykorzystując znajomość łącznego rozkładu minimum, maksimum i wartości końcowej arytmetycznego ruchu Browna dokonano analizy porównawczej znanych estymatorów wariancji. Wyznaczono formuły wartości oczekiwanych bardzo wielu funkcji zmiennych losowych, które posłużyły do konstrukcji tych estymatorów. Ponadto, na ich podstawie zaproponowano nowy estymator wariancji. Dokonano analizy założeń, które przyjęto przy konstrukcji tego estymatora. Metodami analitycznymi porównano jego efektywność z efektywnością podstawowych znanych estymatorów zmienności dziennej.

Słowa kluczowe: estymator zmienności, cena otwarcia, minimum, maksimum, zamknięcia, ruch Browna

ESTIMATION OF ARITHMETIC BROWNIAN MOTION VARIANCE WHEN VALUES OF
MINIMUM, MAXIMUM, FINISH AND DRIFT ARE KNOWN

Abstract

This paper examines the problem of calculating the variance of returns of a financial instrument which is based upon the historical opening, closing, high, and low prices. For this purpose the joint distribution of minimum, maximum and final values of arithmetic Brownian motion was used. It gave a possibility to make a comparative analysis of the variance estimators. The formulae of expected values of many random variables, which were used for the construction of these estimators were calculated. Moreover, on the basis of those formulae, the new estimator of variance was proposed. The assumptions that were adopted for the construction of the estimator were examined. The efficiency of the proposed estimator was compared with the efficiency of the well-known estimators of daily volatility.

Key words: volatility estimator, open price, low price, high price, close price, Brownian motion

MICHAŁ KONOPCZYŃSKI

STABILNOŚĆ MAŁYCH GOSPODAREK WCHODZĄCYCH DO UNII MONETARNEJ W ŚWIELE PEWNEGO MODELU BEHAWIORALNEGO

1. WPROWADZENIE

Wspólna waluta i związana z tym większa przejrzystość cen owocuje wzrostem konkurencji w skali całej Europy, co prowadzi do stopniowej (choć powolnej) niwelacji różnic w poziomach cen między poszczególnymi krajami Unii Gospodarczej i Walutowej (UGW). Zjawisko to zostało udokumentowane w wielu pracach empirycznych, i to nawet w okresie kiedy unia monetarna w Europie była dopiero w fazie planów. Na przykład Sosvilla-Rivero i Gil-Pareja (2002) wykazali systematyczną konwergencję poziomów cen towarów podlegających wymianie (ang. *tradables*) w latach 1975–1995. W pracach Rogers, Hufbauer i Wada (2001) oraz EBC (2005) wykazano, że zróżnicowanie cen spadło w UE do poziomu typowego dla Stanów Zjednoczonych. Wnioski z nowszych publikacji są nieco bardziej niejednoznaczne. Na przykład Parsley i Wei (2008) twierdzą, że wspólna waluta nie pomogła zredukować różnic w poziomach cen w poszczególnych krajach strefy euro. Podobnie sceptyczna jest Wolszczak (2010).

W pracy Konopczyński (2006) proces konwergencji cen ujęliśmy w formie modelu behawioralnego, opartego na matematycznym opisie reakcji podmiotów gospodarczych na nierównowagę. Celem tego artykułu jest uogólnienie owego modelu poprzez wprowadzenie opisu dynamiki zapasów (na wzór przedstawionego w pracy Konopczyński, 2009), a także opisu konwergencji stóp procentowych na obszarze UGW. Ponieważ konwergencja cen jest procesem długotrwałym, prezentowany model należy traktować jako średniookresowy (o horyzoncie czasu rzędu kilkunastu lat)¹.

W pracach teoretycznych dotyczących UGW z reguły zakłada się jednakowy poziom stóp procentowych na obszarze całej unii – zob. np. Temperton (2001), Pentecost, van Poeck (2001), Wyplosz (2006), Carlberg (2007), de Grauwe (2007). Założenie to wynika z braku ryzyka kursowego oraz braku ograniczeń w przepływach kapitału. W odniesieniu do Europejskiej Unii Monetarnej to założenie w zasadzie

¹ Nie chcemy używać określenia „modele długookresowe”, ponieważ abstrahujemy tutaj od procesów akumulacji wielkości istotnie wpływających na wzrost gospodarczy w długim okresie, np. kapitału produkcyjnego czy kapitału ludzkiego, długu publicznego.

było zgodne z rzeczywistością, aż do momentu wybuchu tzw. kryzysu zadłużenia w strefie euro, który pokazał, że ryzyko niewypłacalności ma bardzo istotne znaczenie dla poziomu stóp procentowych. Gdy kryzys dobiegnie końca, różnice w poziomach stóp procentowych prawdopodobnie znów znikną.

Z tych względów ważną częścią przedstawionego modelu jest matematyczny opis konwergencji stóp procentowych. W opisie tym dopuszczamy taką sytuację, w której w pewnym momencie poziom stóp procentowych w kraju istotnie odbiega od poziomu w pozostałych państwach UGW, ale z czasem mechanizm rynkowy (przepływy pieniądza) niweluje tę różnicę. Sądzymy, że opis ten odpowiada obecnej sytuacji strefy euro, w której w wielu niewielkich (w sensie gospodarczym) państwach stopy procentowe pozostają bardzo wysokie w porównaniu do krajów tzw. twardego jądra. Przedstawiony model ma też drugą interpretację. Może on opisywać proces konwergencji uruchamiany z chwilą wejścia do unii monetarnej nowego kraju, w którym początkowo stopy procentowe odbiegają od średniej dla całej UGW.

Struktura artykułu jest następująca. W punkcie 1 przedstawiamy konstrukcję modelu wraz ze wszystkimi założeniami. Następnie definiujemy stan równowagi i badamy warunki konieczne i wystarczające (lokalnej asymptotycznej) stabilności. Mają one postać dość skomplikowanych ograniczeń na parametry behawioralne modelu. W celu zilustrowania tych wniosków, w punkcie 4 przedstawiamy symulacje numeryczne, a w punkcie 5 przyglądamy się dokładniej parametrom mającym istotne znaczenie dla stabilności gospodarki. Na koniec przedstawiamy dynamiczną analizę procesu przejścia pomiędzy dwoma stanami równowagi, wywołanego przez rozluźnienie polityki fiskalnej.

2. KONSTRUKCJA MODELU

Model przedstawiony w artykule Konopczyńskiego (2006) rozbudujemy dodając do niego dwa równania. Pierwsze opisuje kształtowanie się cen w kraju w odpowiedzi na nadmierny lub zbyt niski stan zapasów, a drugie odzwierciedla przepływy pieniądza wywołane zróżnicowanym poziomem stóp procentowych.

Założmy, że istnieje pewien normatywny wskaźnik zapasów w gospodarce, określony przez egzogeniczny parametr $\tilde{z}$, zdefiniowany jako optymalny stosunek zapasów Z do produkcji Y . Zmienna Z obejmuje zapasy produktów gotowych oraz półprodukty i materiały do produkcji. Utrzymywanie rezerw materiałów i półproduktów wiąże się z technologią – proces produkcji jest rozłożony w czasie. Natomiast zapasy produktów gotowych (do sprzedaży) są utrzymywane z dwóch, co najmniej, powodów. Pierwszy to chęć uniknięcia sytuacji, w której w razie nieoczekiwanego wzrostu popytu firma musiałaby odmówić klientom dostawy towarów z powodu ich braku w magazynach. Drugi, to przyczyny ekonomiczne związane z minimalizacją kosztu produkcji². Jeżeli

² Więcej na ten temat w Sachs, Larrain (1993, str. 131–133). Fundament pod współczesne teorie zapasów położyła pionierska praca Holt et.al. (1960).

w pewnym momencie zapasy w kraju są nadmierne ($Z > \tilde{z}Y$), to firmy redukują ceny, i odwrotnie. Zależność tę zapiszemy w formie równania behawioralnego³:

$$\dot{P} = \varepsilon_1 \cdot \left(\tilde{z} - \frac{Z}{Y} \right) \cdot P, \quad (1)$$

przy czym parametr reakcji $\varepsilon_1 > 0$.

Oczywiście zmiana stanu zapasów jest równa różnicy między zagregowanym popytem na produkty krajowe, a wielkością produkcji, co zapisujemy w formie równania definicyjnego:

$$\dot{Z} = Y - [A^P(Y, T, r) + G + H], \quad (2)$$

gdzie T i G – przychody i wydatki budżetu państwa (zmienne egzogeniczne); A^P – absorpcja sektora prywatnego (suma konsumpcji i inwestycji tego sektora); r – realna stopa procentowa w kraju; H – saldo bilansu handlowego.

Jeżeli nominalna stopa procentowa w kraju (R) przewyższa średnią stopę unijną (R^*), to następuje napływ pieniądza do kraju:

$$\dot{M}^S = \varepsilon_2 (R - R^*) \cdot M^S. \quad (3)$$

Parametr $\varepsilon_2 > 0$ jest wskaźnikiem mobilności kapitału finansowego w unii. W uproszczeniu proces ten można sobie wyobrażać następująco. Jeśli $R > R^*$, to podmioty krajowe chętnie zaciągają kredyty w bankach zagranicznych (w innych krajach strefy euro), a oszczędności – zarówno krajowe jak i zagraniczne – są lokowane w bankach krajowych. W rezultacie stopniowo rośnie ilość pieniądza w kraju (podaż pieniądza M^S). Parametr $\varepsilon_2 > 0$ odzwierciedla tempo tego procesu i oczywiście w poszczególnych krajach może być różny nawet ze względów kulturowych czy językowych, nie mówiąc o różnicach w rozwoju systemu finansowego.

Zakładamy ponadto, że rynek pieniądza w kraju funkcjonuje doskonale sprawnie, dzięki czemu realny popyt na pieniądz $L(Y, R)$ jest w każdym momencie równy jego realnej podaży M^S/P . Korzystając z twierdzenia o funkcji uwikłanej możemy wówczas zdefiniować funkcję:

$$R = R(Y, M^S, P), \text{ gdzie: } R_Y > 0, R_{M^S} < 0, R_P > 0. \quad (4)$$

Podobnie można wyobrażać sobie proces konwergencji cen. Jeżeli ceny w kraju są niższe niż za granicą, to bilans handlowy ulega poprawie, i odwrotnie. W uproszczeniu, jeżeli $P < P^*$, to (średnio rzecz biorąc) opłaca się eksportować towary za granicę, a nie opłaca się ich importować. Pomijając takie „drobiazgi”, jak towary nie

³ Kropką nad symbolem zmiennej oznaczamy pochodną względem czasu, np. $\dot{Z} = dZ(t) / dt$.

podlegające wymianie (np. nieruchomości czy niektóre usługi) oraz koszty transportu, założenie to można sformalizować w postaci równania różniczkowego:

$$\dot{H} = \varepsilon_1 [1 - P/P^*]. \quad (5)$$

Parametr $\varepsilon_1 > 0$ odzwierciedla tempo zmian bilansu handlowego, wywołanych rozbieżnością cen w kraju i za granicą. Wartość tego parametru jest tym wyższa, im sprawniej funkcjonuje konkurencja, im większa jest swoboda przepływu towarów i usług na obszarze UGW, im niższe są koszty transportu itp.

Wprowadźmy funkcję zagregowanej podaży $S(P)$, która opisuje optymalną (maksymalizującą zysk) wielkość produkcji w zależności od poziomu cen P , przy egzogenicznie danym zasobie kapitału i stawkach płac. Jest to standardowa w makroekonomii konstrukcja, której opis znaleźć można na przykład w podręczniku Romer (1996), str. 214–222. Proces dostosowania produkcji do poziomu optymalnego może wymagać czasu – trzeba zatrudnić i przeszkolić ludzi, zwiększyć moce produkcyjne itp. Założymy zatem, że jeśli w pewnym momencie produkcja odbiega od poziomu optymalnego, wówczas firmy korygują wielkość produkcji o określoną część (proporcję) odchylenia od optimum. Reakcję firm wyraża równanie:

$$\dot{Y} = \varepsilon_3 [S(P) - Y], \text{ gdzie } \varepsilon_3 > 0. \quad (6)$$

Gwoli wyjaśnienia, w makroekonomii na ogół przyjmuje się założenie o tzw. neutralności pieniądza, zgodnie z którym inflacja nie wpływa na poziom produkcji. Tymczasem funkcja zagregowanej podaży w równaniu (6) wyraża dodatnią zależność między produkcją w kraju a poziomem cen. Nie chodzi tu jednak o inflację wywołaną przez nieoczekiwany wzrost podaży pieniądza, lecz o zjawisko konwergencji cen w unii monetarnej. Poziom cen P zmienia się w naszym modelu niekoniecznie w bezpośrednim związku z podażą pieniądza. Na przykład, jeśli $P < P^*$, to stopniowy wzrost cen w kraju jest wywołany przez nadwyżkę popytu ze strony innych państw UGW. W odpowiedzi na nierównowagę rynkową na rynku krajowym, przejawiającą się malejącymi zapasami, producenci zwiększają produkcję zgodnie z równaniem (6) oraz podnoszą ceny zgodnie z równaniem (1).

Reasumując, model ma postać układu pięciu równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \dot{H} = \varepsilon_4 [1 - P/P^*], \\ \dot{Z} = Y - [A^P(Y, T_+, T_-, r) + G + H], \\ \dot{P} = \varepsilon_1 \cdot \left(\tilde{z} - \frac{Z}{Y} \right) \cdot P, \\ \dot{M}^S = \varepsilon_2 (R - R^*) \cdot M^S, \\ \dot{Y} = \varepsilon_3 [S(P) - Y], \end{cases} \quad (7)$$

gdzie $r = R - \dot{P}/P$, natomiast $R = R(Y, M^S, P)$. Wszystkie parametry reakcji ε_i ($i = 1, \dots, 4$) są z założenia dodatnie. Ponadto przyjmujemy, że wielkości egzogeniczne T, G, P^*, R^* , a także parametr $\tilde{z}$ są stałe w czasie. Obowiązują standardowe założenia o znakach i wielkościach pochodnych poszczególnych funkcji – por. Konopczyński (2006):

$$A_Y \in (0,1], A_T < 0, A_r < 0, S_P > 0, R_Y > 0, R_M < 0, R_P > 0. \quad (8)$$

3. STAN RÓWNOWAGI I JEGO STABILNOŚĆ

Stan równowagi (stan stacjonarny) stanowi takie rozwiązanie $(\bar{H}, \bar{Z}, \bar{P}, \bar{M}^S, \bar{Y})$ układu (7), które jest stałe w czasie. Gospodarka znajduje się w tym stanie wówczas, gdy prawa strona każdego z pięciu równań modelu jest równa zero, a zatem w stanie równowagi:

- 1) poziom cen w kraju jest taki sam jak w pozostałych krajach unii monetarnej: $\bar{P} = P^*$,
- 2) popyt na towary krajowe jest równy ich produkcji: $A^P(\bar{Y}, T, \bar{r}) + G + \bar{H} = \bar{Y}$,
- 3) zapasy są na poziomie normatywnym (optymalnym dla producentów): $\bar{Z} = \tilde{z}\bar{Y}$,
- 4) nominalna stopa procentowa w kraju jest równa średniej unijnej: $\bar{R} = R^*$,
- 5) producenci maksymalizują zysk: $\bar{Y} = S(\bar{P})$.

Zajmijmy się teraz kwestią stabilności stanu stacjonarnego. Ze względu na nieliniowość układu równań (7), (bez dodatkowych założeń) matematycznie badać możemy jedynie lokalną asymptotyczną stabilność stanu równowagi. Linearyzując układ (7) poprzez rozwinięcie funkcji nieliniowych w szeregi Taylora w otoczeniu stanu stacjonarnego, otrzymujemy liniowy układ równań różniczkowych, opisujący przybliżoną dynamikę gospodarki w pobliżu stanu równowagi. Układ ten ma postać:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathcal{H}} \\ \dot{\mathcal{Z}} \\ \dot{\mathcal{P}} \\ \dot{\mathcal{M}} \\ \dot{\mathcal{Y}} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{Z} \\ \mathcal{P} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{Y} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

gdzie $\mathcal{H} = H - \bar{H}$, $\mathcal{Z} = Z - \bar{Z}$, $\mathcal{P} = P - \bar{P}$, $\mathcal{M} = M^S - \bar{M}^S$, $\mathcal{Y} = Y - \bar{Y}$. Macierz A jest iloczynem macierzy postaci $A = DB$, gdzie:

$$D = \begin{bmatrix} \varepsilon_4/P^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \bar{P}/\bar{Y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \bar{M}^S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -\varepsilon_1 A_{\bar{r}}/\bar{Y} & -A_{\bar{r}}R_{\bar{P}} & -A_{\bar{r}}R_{\bar{M}} & 1 - A_{\bar{Y}} - A_{\bar{r}}(R_{\bar{Y}} - \varepsilon_1 \tilde{z}/\bar{Y}) \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \tilde{z} \\ 0 & 0 & R_{\bar{P}} & R_{\bar{M}} & R_{\bar{Y}} \\ 0 & 0 & S_{\bar{P}} & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Bez dodatkowych założeń, zbadanie stabilności stanu stacjonarnego (ze względu na liczbę równań modelu) jest skomplikowane. Dlatego na początek sprawdzimy, czy spełnione są warunki konieczne stabilności, jakimi są⁴:

- 1) $\text{tr}A < 0$ (jako, że ślad macierzy jest równy sumie pierwiastków charakterystycznych),
- 2) $\det A < 0$ (co wynika z twierdzenia, że jeżeli pierwiastki charakterystyczne macierzy A są ujemne, to wyznacznik tej macierzy ma znak $(-1)^n$, gdzie n to wymiar macierzy A).

Jak łatwo obliczyć,

$$\text{tr}A = -\varepsilon_1 A_{\bar{r}}/\bar{Y} + \varepsilon_2 \bar{M}^S R_{\bar{M}} - \varepsilon_3.$$

Zauważmy, że przy standardowych założeniach (8) pierwszy składnik tej sumy jest dodatni, a dwa kolejne są ujemne. Zatem $\text{tr}A < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy parametr ε_1 jest dostatecznie mały i/lub parametry ε_2 oraz ε_3 są dostatecznie duże. Z tego wynika, że warunkiem koniecznym, aby stan równowagi był stabilny jest:

- dostatecznie słaba reakcja cen na niepożądane zmiany zapasów i/lub,
- odpowiednio wysoka mobilność pieniądza w unii monetarnej i/lub,
- odpowiednio wysoka prędkość reakcji przedsiębiorstw na nieoptymalny poziom produkcji.

⁴ Zob. Gandolfo (1997, str. 254).

Drugi konieczny warunek stabilności ($\det A < 0$) przy przyjętych założeniach jest spełniony. Jak wiadomo, $\det A = \det D \cdot \det B$, a ponieważ przy założeniach (8) $\det D > 0$, zatem $\det A < 0 \Leftrightarrow \det B < 0$. Nietrudno obliczyć, że $\det B = R_{\overline{M}} < 0$, zatem $\det A < 0$.

Powyższa analiza warunków koniecznych stabilności nie daje jeszcze satysfakcjonującego obrazu stabilności stanu równowagi. Pełniejszych wniosków dostarczyć może dopiero pełna analiza warunków koniecznych i dostatecznych stabilności, którą można przeprowadzić korzystając z warunków Routh-Hurwitz oraz (alternatywnych) warunków Liénarda-Chiparta⁵. Jak wiadomo, stan równowagi jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie pierwiastki charakterystyczne wielomianu charakterystycznego macierzy $A_{n \times n}$ mają ujemne części rzeczywiste. Wielomian charakterystyczny macierzy A ma postać: $\det(A - \lambda I)$, gdzie I to macierz jednostkowa n -tego stopnia. Natomiast równanie charakterystyczne powstaje przez przyrównanie wielomianu charakterystycznego do zera. Równanie to można zapisać w postaci:

$$W(\lambda) = w_0 \lambda^n + w_1 \lambda^{n-1} + \dots + w_{n-1} \lambda + w_n = 0, \quad (12)$$

przy czym zakładamy, że $w_0 > 0$.⁶ Zdefiniujmy następujące wyznaczniki:

$$R_1 = w_1, \quad R_2 = \begin{vmatrix} w_1 & w_0 \\ w_3 & w_2 \end{vmatrix}, \quad R_3 = \begin{vmatrix} w_1 & w_0 & 0 \\ w_3 & w_2 & w_1 \\ w_5 & w_4 & w_3 \end{vmatrix}, \quad R_4 = \begin{vmatrix} w_1 & w_0 & 0 & 0 \\ w_3 & w_2 & w_1 & w_0 \\ w_5 & w_4 & w_3 & w_2 \\ w_7 & w_6 & w_5 & w_4 \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

przy czym wszystkie te elementy w_i , dla których $i > n$ są równe zero.

Warunki konieczne i dostateczne stabilności (Routh-Hurwitz): Wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego (12) mają ujemne części rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$R_i > 0, \text{ dla każdego } i = 1, \dots, n. \quad (13)$$

Alternatywne warunki Liénarda-Chiparta: Wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego (12) mają ujemne części rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z warunków⁷:

⁵ Zob. Gandolfo (1980, str. 248–251) lub Brock, Malliaris (1996, str. 75–77).

⁶ Gdyby w_0 nie było dodatnie, to mnożymy równanie obustronnie przez (-1) .

⁷ Zob. Gandolfo (1980, str. 251).

$$(a) w_n > 0, w_{n-2} > 0, \dots; R_1 > 0, R_3 > 0, \dots, \quad (14a)$$

$$(b) w_n > 0, w_{n-2} > 0, \dots; R_2 > 0, R_4 > 0, \dots, \quad (14b)$$

$$(c) w_n > 0, w_{n-1} > 0, w_{n-3} > 0, \dots; R_1 > 0, R_3 > 0, \dots, \quad (14c)$$

$$(d) w_n > 0, w_{n-1} > 0, w_{n-3} > 0, \dots; R_2 > 0, R_4 > 0, \dots. \quad (14d)$$

Jak wynika z (14), w przypadku, gdy $n = 5$, stan stacjonarny jest lokalnie asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z czterech (alternatywnych) układów nierówności:

$$(a) w_5 > 0, w_3 > 0, w_1 > 0; R_1 > 0, R_3 > 0, R_5 > 0, \quad (15a)$$

$$(b) w_5 > 0, w_3 > 0, w_1 > 0; R_2 > 0, R_4 > 0, \quad (15b)$$

$$(c) w_5 > 0, w_4 > 0, w_2 > 0, w_0 > 0; R_1 > 0, R_3 > 0, R_5 > 0, \quad (15c)$$

$$(d) w_5 > 0, w_4 > 0, w_2 > 0, w_0 > 0; R_2 > 0, R_4 > 0. \quad (15d)$$

Wyznaczając współczynniki wielomianu charakterystycznego

$$W(\lambda) = w_0 \lambda^5 + w_1 \lambda^4 + \dots + w_4 \lambda + w_5 = 0, \quad (16)$$

dostajemy m.in.: $w_5 = (-1/\bar{Y}) \bar{M}^S R_{\bar{M}^S} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4$. Wyrażenie to jest dodatnie (przy standardowych założeniach), a więc warunek $w_5 > 0$ jest spełniony. Zauważmy, że $R_5 = w_5 R_4$, co wynika bezpośrednio z postaci tych wyznaczników:

$$R_4 = \begin{vmatrix} w_1 & w_0 & 0 & 0 \\ w_3 & w_2 & w_1 & w_0 \\ w_5 & w_4 & w_3 & w_2 \\ w_7 & w_6 & w_5 & w_4 \end{vmatrix}, \quad \text{zaś} \quad R_5 = \begin{vmatrix} w_1 & w_0 & 0 & 0 & 0 \\ w_3 & w_2 & w_1 & w_0 & 0 \\ w_5 & w_4 & w_3 & w_2 & w_1 \\ 0 & 0 & w_5 & w_4 & w_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_5 \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Z powyższego oraz z faktu, że $w_5 > 0$ wynika, że $R_5 > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $R_4 > 0$. Zatem w układach nierówności (15) wyznacznik R_5 możemy zastąpić (mniej skomplikowanym) wyznacznikiem R_4 . Zauważmy też, że $w_0 = 1$, a więc warunek $w_0 > 0$ również jest spełniony. Ponadto, obliczając w_0 dostajemy następujące wyrażenie:

$$w_4 = \frac{\varepsilon_1}{\bar{Y}} \cdot \left\{ \varepsilon_2 \bar{M}^S R_{\bar{M}^S} \left[-\bar{P}(1 - A_{\bar{Y}}) S_{\bar{P}} \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \right] + \varepsilon_3 \varepsilon_4 \right\}.$$

Łatwo sprawdzić, że przy standardowych założeniach $w_4 > 0$, a więc i ten warunek jest spełniony. Z powyższych uwag wynika, że warunki konieczne i dostateczne stabilności (15) są spełnione, gdy spełniony jest jeden z poniższych układów nierówności:

$$(a) \ w_3 > 0; \ w_1 > 0; \ R_1 > 0; \ R_3 > 0, \ R_4 > 0, \quad (18a)$$

$$(b) \ w_3 > 0; \ w_1 > 0; \ R_2 > 0, \ R_4 > 0, \quad (18b)$$

$$(c) \ w_2 > 0; \ R_1 > 0; \ R_3 > 0, \ R_4 > 0, \quad (18c)$$

$$(d) \ w_2 > 0; \ R_2 > 0, \ R_4 > 0. \quad (18d)$$

Po głębszej analizie okazuje się, że wszystkie powyższe układy nierówności są bardzo złożone. Względnie najprostszy jest układ (18d), który w związku z tym podamy analizie. Rozpatrzmy zatem po kolei trzy nierówności (18d). Po obliczeniach otrzymujemy

$$w_2 = -\bar{M}^S R_{\bar{M}^S} \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \left[-A_{\bar{r}} (\bar{P} R_{\bar{P}} + \bar{M}^S R_{\bar{M}^S} \varepsilon_2) / \bar{Y} + (A_{\bar{r}} - \bar{P} \tilde{z} S_{\bar{P}}) \varepsilon_3 / \bar{Y} \right].$$

Zatem $w_2 > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} \cdot \left[\underbrace{-A_{\bar{r}} (\bar{P} R_{\bar{P}} + \bar{M}^S R_{\bar{M}^S} \varepsilon_2) / \bar{Y}}_{?} + \underbrace{(A_{\bar{r}} - \bar{P} \tilde{z} S_{\bar{P}}) \varepsilon_3 / \bar{Y}}_{-} \right] > \underbrace{\bar{M}^S R_{\bar{M}^S}}_{-}. \quad (19)$$

We wzorze tym zaznaczone zostały znaki poszczególnych wyrażeń (przy standardowych założeniach). Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\varepsilon_3 < \frac{A_{\bar{r}} (\bar{P} R_{\bar{P}} + \bar{M}^S R_{\bar{M}^S} \varepsilon_2)}{A_{\bar{r}} - \bar{P} \tilde{z} S_{\bar{P}}}. \quad (20)$$

Zauważmy, że jeżeli zachodzi (20), to $w_2 > 0$ dla dowolnych wartości parametrów reakcji ε_i . Jeśli jednak (20) nie zachodzi, to wyrażenie w nawiasie kwadratowym w nierówności (19) jest ujemne. Wówczas $w_2 > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy iloraz $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2 \varepsilon_3}$ jest mniejszy od pewnej dodatniej liczby. Jeśli zatem nie zachodzi (20), to warunek $w_2 > 0$ jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy parametr ε_1 jest dostatecznie

mały i/lub parametry ε_2 oraz ε_3 są dostatecznie duże. Warto zauważyć, że podobny wniosek (choć inną nierówność) otrzymaliśmy wyżej, analizując ślad macierzy A .

Przyjrzyjmy się teraz drugiemu z warunków (18d). Wyznacznik R_2 ma złożoną postać, ale można go zapisać w następującej postaci⁸:

$$R_2 = - \underbrace{\varepsilon_2 \varepsilon_3 \bar{M}^S R_{\bar{M}^S} (\varepsilon_3 - \varepsilon_2 \bar{M}^S R_{\bar{M}^S})}_{+} + \varepsilon_1 \cdot [\dots] + \varepsilon_1^2 \cdot [\dots].$$

Zauważmy, że R_2 jest ciągłą funkcją m.in. parametru ε_1 , przy czym $R_2(\varepsilon_1) > 0$ dla $\varepsilon_1 = 0$, skąd wynika, że $R_2 > 0$, jeżeli parametr ε_1 jest dostatecznie mały⁹.

Ostatni z warunków (18d) jest najbardziej złożony, ponieważ

$$R_4 = \varepsilon_1 \cdot x + \varepsilon_1^2 \cdot [\dots] + \varepsilon_1^3 \cdot [\dots] + \varepsilon_1^4 \cdot [\dots], \text{ gdzie } x = \left[\frac{\varepsilon_4}{Y} (\varepsilon_2 \varepsilon_3 \bar{M}^S R_{\bar{M}^S})^3 (\varepsilon_3 - \varepsilon_2 \bar{M}^S R_{\bar{M}^S}) \right].$$

Łatwo sprawdzić, że przy standardowych założeniach $x < 0$. Zauważmy, że podobnie jak R_2 , również R_4 jest ciągłą funkcją m.in. parametru ε_1 , przy czym $R_4(\varepsilon_1) = 0$ dla $\varepsilon_1 = 0$ oraz $\partial R_4 / \partial \varepsilon_1 \rightarrow x < 0$, gdy $\varepsilon_1 \rightarrow 0^+$. Z tego wynika, że jeżeli parametr ε_1 jest dostatecznie mały, to $R_4 < 0$. Jeżeli zatem stan stacjonarny ma być stabilny, to parametr ε_1 nie może być dowolnie małą liczbą. Standardowe założenia nie determinują, niestety, znaków wyrażeń oznaczonych kropkami, a więc nie ma pewności, czy przy każdym zestawie wartości parametrów ε_i ($i = 2, 3, 4$) istnieje taka wartość parametru ε_1 , dla której $R_4 > 0$.

4. WARUNKI STABILNOŚCI

Przeprowadzona analiza prowadzi do następujących wniosków:

- 1) Jest możliwe podanie układu (trzech lub więcej) nierówności stanowiących warunki konieczne i dostateczne stabilności w naszym modelu. (Mogą to być np. warunki (18d), po uwzględnieniu wyników obliczeń.) Są one jednak tak złożone, że nie jest możliwe ich rozwiązanie, przy do tej pory sformułowanych ogólnych założeniach.
- 2) Tylko niektóre z tych warunków posiadają interpretację ekonomiczną. Sprowadza się ona do górnych i/lub dolnych ograniczeń nałożonych na parametry reakcji ε_i .
- 3) Nie można dowieść, że dla dowolnych wartości parametrów modelu spełniających standardowe założenia, istnieje taki zestaw wartości parametrów reakcji ε_i , dla których stan stacjonarny jest stabilny.

⁸ Miejsce kropek zajmują złożone wielomiany o znakach nie poddających się analizie (przy przyjętych założeniach).

⁹ Jest to warunek dostateczny (choć niekonieczny), aby wyznacznik R_2 był dodatni.

- 4) Prawdopodobnie, aby stan stacjonarny był stabilny, niektóre parametry reakcji muszą mieścić się w określonych granicach. Na przykład stwierdziliśmy wyżej, że parametr ε_1 nie powinien być ani zbyt niski, ani zbyt wysoki¹⁰.

5. EKSPERYMENT NUMERYCZNY

W celu numerycznego zbadania stabilności stanu stacjonarnego, przedstawimy wyniki prostych symulacji. W modelu z założenia stałe w czasie są wielkości egzogeniczne: R^* , P^* , T , G , $\tilde{z}$. Przyjmijmy następujące funkcje występujące w równaniach dynamiki:

$$\begin{aligned} A^P(Y, T, r) &= \tilde{A} + a_1(Y - T) - a_2r, & \text{gdzie } \tilde{A}, a_2 > 0, a_1 \in (0, 1], \\ R(Y, M^S, P) &= r_1Y - r_2(M^S/P), & \text{gdzie } r_1, r_2 > 0, \\ S(P) &= s_1P, & \text{gdzie } s_1 > 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Po uwzględnieniu tych założeń, model dynamiczny (7) redukuje się do postaci:

$$\begin{cases} \dot{H} = \varepsilon_4[1 - P/P^*], \\ \dot{Z} = Y - [\tilde{A} + a_1(Y - T) - a_2r + G + H], \\ \dot{P} = \varepsilon_1 \cdot \left(\tilde{z} - \frac{Z}{Y} \right) \cdot P, \\ \dot{M}^S = \varepsilon_2(R - R^*) \cdot M^S, \\ \dot{Y} = \varepsilon_3 \cdot [s_1P - Y], \end{cases} \quad (22)$$

gdzie $r = R - \dot{P}/P$ oraz $R = r_1Y - r_2(M^S/P)$. Stan stacjonarny wyznaczamy przyrównując prawe strony układu (22) do zera. Otrzymujemy wówczas:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= P^*, \quad \bar{R} = R^*, \quad \bar{r} = \bar{R}, \quad \bar{Y} = s_1\bar{P}, \quad \bar{Z} = \tilde{z}\bar{Y}, \\ \bar{H} &= -\tilde{A} - a_1(\bar{Y} - T) + a_2\bar{r} - G, \quad \bar{M}^S = \bar{P} \cdot \frac{r_1\bar{Y} - \bar{R}}{r_2}. \end{aligned} \quad (23)$$

¹⁰ Choć nie jest to warunek konieczny stabilności – przy pewnych specyficznych założeniach istnieć może tylko jedna (dolna lub górna) granica stabilności dla ε_1 ; por. symulacje poniżej.

Otrzymany układ równań różniczkowych (22) nie jest liniowy (ze względu chociażby na zależność R od M^S , Y i P), ale jego dynamikę w otoczeniu stanu równowagi można w przybliżeniu opisać układem liniowych równań różniczkowych. Jak już wiemy, układ równań dynamiki zlinearyzowanego modelu można zapisać w postaci macierzowej (9), przy czym macierze D i B mają obecnie następującą postać (por. (10) i (11)):

$$D = \begin{bmatrix} \varepsilon_4/P^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1\bar{P}/\bar{Y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2\bar{M}^S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \varepsilon_1 a_2 / \bar{Y} & a_2 r_2 \bar{M}^S & -a_2 r_2 & 1 - a_1 + a_2 (r_1 - \varepsilon_1 \tilde{z} / \bar{Y}) \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \tilde{z} \\ 0 & 0 & r_2 \bar{M}^S & -r_2 & r_1 \\ 0 & 0 & s_1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Rozwiązanie zlinearyzowanego układu równań różniczkowych (9) z macierzami D , B postaci (24), (25) można przedstawić w formie:

$$\begin{bmatrix} H(t) - \bar{H} \\ Z(t) - \bar{Z} \\ P(t) - \bar{P} \\ M^S(t) - \bar{M}^S \\ Y(t) - \bar{Y} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^5 s_i e^{\lambda_i t} h^i, \quad (26)$$

gdzie e jest stałą Eulera, λ_i ($i = 1, \dots, 5$) są pierwiastkami charakterystycznymi macierzy $A = DB$, natomiast h^i odpowiadającymi im wektorami własnymi macierzy A .

Jeżeli znamy stan początkowy gospodarki w momencie $t = 0$, czyli wartości $H(0)$, $Z(0)$, $P(0)$, $M^S(0)$ oraz $Y(0)$, to stałe s_i wyliczamy z układu (26) dla $t = 0$.

Przeanalizujmy prosty, czysto hipotetyczny przykład, przyjmując następujący bazowy zestaw parametrów oraz wartości początkowych¹¹:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = 0,05, \varepsilon_2 = 0,3, \varepsilon_3 = 0,5, \varepsilon_4 = 0,5, \tilde{A} = 30, a_1 = 0,95, a_2 = 120, \\ \tilde{z} = 0,25, r_1 = 0,002, r_2 = 0,004, R^* = 5\%, P^* = 1, G = T = 300, \end{aligned} \quad (27)$$

$$H(0) = 0, Z(0) = 250, P(0) = 0,9, M^S(0) = 310, Y(0) = 720.$$

Wyjaśnijmy, że przyjęte wartości nie są oparte na żadnych danych statystycznych. Część z tych parametrów dałoby się być może skalibrować w oparciu o takie dane, jednak większość (a z pewnością wszystkie parametry reakcji ε_i) nie ma żadnego odpowiednika w statystyce. Dlatego prezentowane wyniki obliczeń należy traktować wyłącznie jako ilustrację działania modelu.

Przy założeniach (27), wartości zmiennych w stanie stacjonarnym obliczone ze wzorów (23) wynoszą:

$$\bar{P} = 1, \bar{R} = 5\%, \bar{Y} \cong 800, \bar{Z} = 200, \bar{H} = 1, \bar{M}^S \cong 387,5. \quad (28)$$

Macierz A ma w naszym przykładzie postać:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,5 & 0 & 0 \\ -1 & 0,0075 & 186 & -0,48 & 0,288125 \\ 0 & -0,0000625 & 0 & 0 & 0,000015625 \\ 0 & 0 & 180,188 & -0,465 & 0,2325 \\ 0 & 0 & 400 & 0 & -0,5 \end{bmatrix}.$$

Obliczając pierwiastki charakterystyczne tej macierzy dostajemy parę sprzężonych pierwiastków zespolonych $\lambda_1 \cong \alpha + \beta i$, $\lambda_2 \cong \alpha - \beta i$, gdzie $\alpha \cong -0,00749609$, $\beta \cong 0,0511086$ oraz trzy pierwiastki rzeczywiste $\lambda_3 \cong -0,58482$, $\lambda_4 \cong -0,344159$,

¹¹ Zestaw ten w znacznej części pokrywa się z wartościami przyjmowanymi we wcześniejszych naszych pracach, co ułatwia porównanie wyników symulacji.

$\lambda_5 \cong -0,0135288$.¹² Pierwiastkom zespolonym odpowiada para sprzężonych wektorów własnych $h^1 = v^1 + iv^2$ oraz $h^2 = v^1 - iv^2$, gdzie:

$$v^1 = \begin{bmatrix} -0,00583144 \\ 0,62014161 \\ 0,00024679 \\ 0,27847903 \\ 0,25209558 \end{bmatrix}, \quad v^2 = \begin{bmatrix} 0,00326971 \\ 0 \\ 0,00064509 \\ 0,47592264 \\ 0,49776912 \end{bmatrix},$$

natomiast pierwiastkom rzeczywistym λ_3 , λ_4 i λ_5 odpowiadają rzeczywiste wektory własne:

$$h^3 = \begin{bmatrix} -0,00007037 \\ -0,67316081 \\ -0,00008231 \\ -0,62942665 \\ 0,38817083 \end{bmatrix}, \quad h^4 = \begin{bmatrix} 0,00015691 \\ 0,66403437 \\ 0,00010800 \\ 0,69441304 \\ 0,27721624 \end{bmatrix}, \quad h^5 = \begin{bmatrix} -0,02985783 \\ -0,34094481 \\ -0,00080788 \\ -0,66452791 \\ -0,66427942 \end{bmatrix}.$$

Trajektorie zmiennych endogenicznych modelu w postaci trygonometrycznej można wyrazić wzorem:

$$\begin{bmatrix} H(t) \\ Z(t) \\ P(t) \\ M^S(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H} \\ \bar{Z} \\ \bar{P} \\ \bar{M}^S \\ \bar{Y} \end{bmatrix} + s_1 \left(v^1 \cos \beta t - v^2 \sin \beta t \right) e^{\alpha t} + s_2 \left(v^2 \cos \beta t - v^1 \sin \beta t \right) e^{\alpha t} + \sum_{i=3}^5 s_i e^{\lambda_i t} h^i. \quad (29)$$

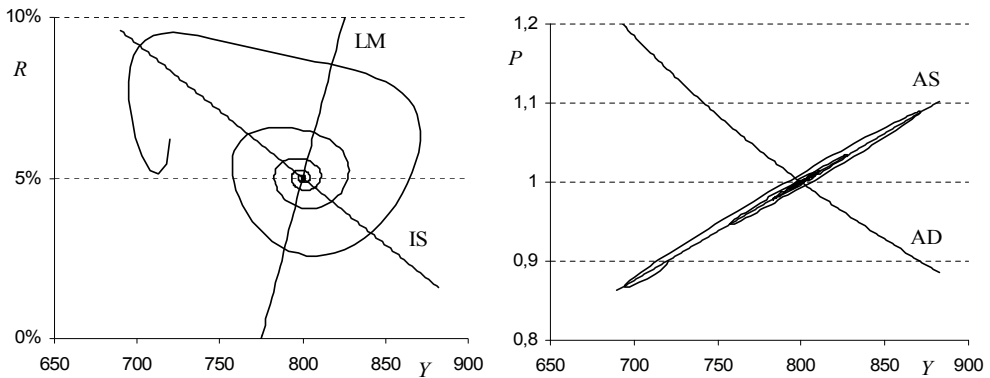
Stałe s_i ($i = 1, \dots, 5$) znajdujemy rozwiązując liniowy układ równań, powstały przez podstawienie do (29) wartości zmiennych w momencie początkowym. Układ ten ma postać:

¹² Wszystkie te pierwiastki mają ujemne części rzeczywiste, co na mocy twierdzenia Lapunowa zapewnia lokalną asymptotyczną stabilność stanu równowagi.

$$\begin{bmatrix} H(0) \\ Z(0) \\ P(0) \\ M^S(0) \\ Y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H} \\ \bar{Z} \\ \bar{P} \\ \bar{M}^S \\ \bar{Y} \end{bmatrix} + s_1 v^1 + s_2 v^2 + \sum_{i=3}^5 s_i h^i. \quad (30)$$

Rozwiązując ten układ otrzymujemy: $s_1 \cong 99,7053$, $s_2 \cong -199,087$, $s_3 \cong -7,81659$, $s_4 \cong -29,8086$, $s_5 \cong -7,92119$. Podstawiając wyliczone wartości do (29) otrzymujemy wzory na trajektorie poszczególnych zmiennych, wychodzące z danego stanu początkowego.

Poniższy rysunek przedstawia ciągle trajektorie $(Y(t), R(t))$ oraz $(Y(t), P(t))$ wyliczone w opisany sposób, gdzie $R(t) = r_1 Y(t) - r_2 (M^S(t)/P(t))$. Startując ze stanu początkowego $(Y(0), R(0), P(0), \dots) = (720, 6.22\%, 0.9, \dots)$, gospodarka zmierza z czasem do stanu stacjonarnego leżącego w punkcie przecięcia krzywej IS i prostej $R = R^* = 5\%$ (na pierwszym rysunku). Odpowiada mu punkt przecięcia prostych AS i AD (na drugim rysunku).

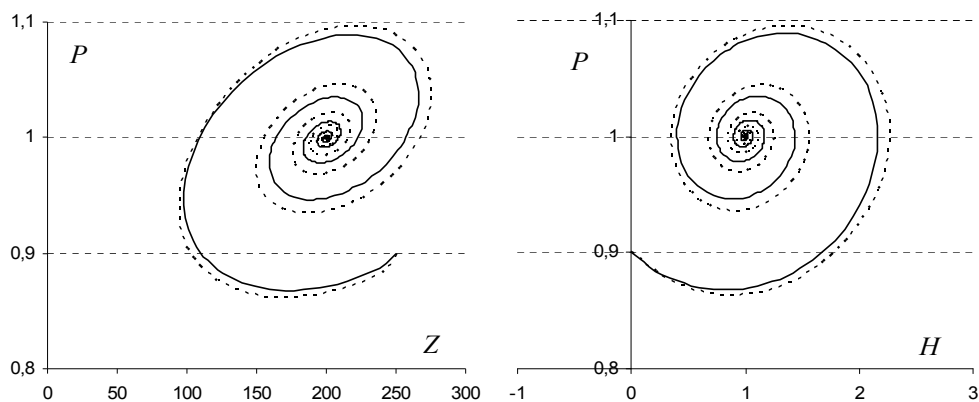


Rysunek 1. Zbieżność do stanu równowagi w przykładowych symulacjach

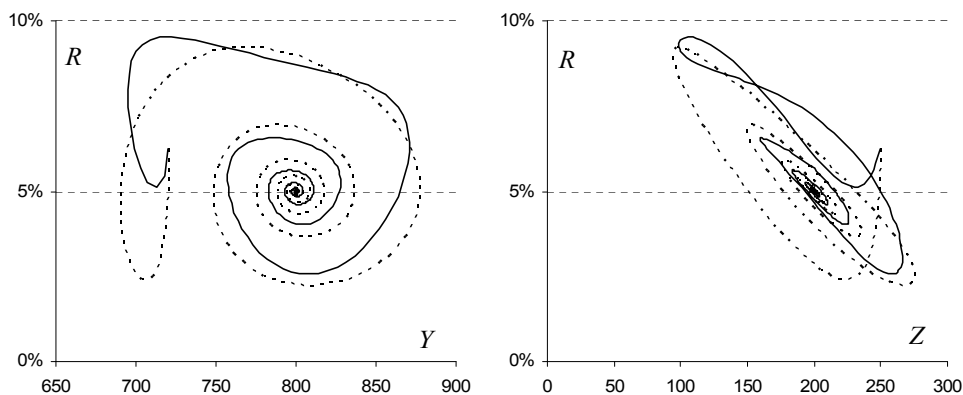
Jak widać, gospodarka znajduje się cały czas blisko krzywej AS, co wynika stąd, że w przedstawionym przykładzie firmy silnie (szybko) reagują na nieodpowiedni poziom produkcji (parametr reakcji ε_3 jest względnie wysoki), a ponadto przypadkiem początkowy poziom produkcji (720) jest równy optymalnemu przy początkowym poziomie cen (0,9). Punkt początkowy leży zatem na krzywej AS¹³.

¹³ Dla zaspokojenia własnej ciekawości zmienialiśmy $Y(0)$ tak, aby punkt początkowy leżał daleko od krzywej AS. Okazało się, że nawet w takich przypadkach trajektoria bardzo szybko dochodzi do krzywej AS i porusza się w przybliżeniu wzdłuż niej.

Trajektorie poszczególnych zmiennych modelu mają postać typowych, sinusoidalnych krzywych o gasnącej amplitudzie. Dlatego nie przedstawiamy tu żadnych wykresów w przestrzeni stanów¹⁴. Zamieszczamy natomiast cztery rysunki ilustrujące trajektorie niektórych par zmiennych w przestrzeni fazowej, uzyskane z rozwiązania modelu ciągłego (linia ciągła) i jego dyskretnego odpowiednika (linia przerywana). Jak widać z wykresów, model dyskretny stanowi dość dobre przybliżenie modelu ciągłego – ogólny kształt trajektorii w obu przypadkach jest podobny. Istotna rozbieżność pojawia się jedynie na początku horyzontu.



Rysunek 2a. Trajektorie w przestrzeni fazowej otrzymane przy bazowym zestawie parametrów dla modelu ciągłego (linia ciągła) i jego dyskretnego odpowiednika (linia przerywana)



Rysunek 2b. Trajektorie w przestrzeni fazowej otrzymane przy bazowym zestawie parametrów dla modelu ciągłego (linia ciągła) i jego dyskretnego odpowiednika (linia przerywana)

¹⁴ Na podstawie podanych wyników można samodzielnie wykreślić trajektorie poszczególnych zmiennych.

6. NUMERYCZNE BADANIE STABILNOŚCI STANU RÓWNOWAGI

Aby zilustrować przedstawioną wcześniej teoretyczną analizę stabilności, przeprowadzimy teraz numeryczną analizę wpływu zmian niektórych parametrów modelu na stabilność stanu stacjonarnego. Biorąc za punkt wyjścia bazowy zestaw parametrów i założeń (27) i (21), modyfikujemy każdorazowo jeden wybrany parametr, poszukując wartości granicznych, których przekroczenie powoduje utratę stabilności. Na przykład stopniowo zmniejszając parametr reakcji ε_1 otrzymujemy dolną granicę stabilności dla tego parametru, która jest w przybliżeniu równa 0,0233. Zmniejszenie parametru ε_1 poniżej tego poziomu (przy innych założeniach z zestawu bazowego) powoduje, że warunki konieczne i dostateczne stabilności (18d) nie są spełnione. (Co najmniej jeden z pierwiastków charakterystycznych posiada dodatnią część rzeczywistą.). Poniższe zestawienie podsumowuje wyniki takiego poszukiwania dolnych i górnych granic stabilności.

Tabela 1.

Granice stabilności dla parametrów reakcji
(przy pozostałych z zestawu bazowego)

	dolna granica stabilności	górna granica stabilności
ε_1	0,0233	0,7289
ε_2	0,0327	0,4100
ε_3	0,1370	–
ε_4	–	1,1280

Źródło: obliczenia własne.

Zgodnie z oczekiwaniami okazało się, że aby stan stacjonarny był stabilny niektóre parametry reakcji nie mogą przekraczać określonych górnych i/lub dolnych wartości granicznych.

Oczywiście otrzymane liczby należy traktować z rezerwą, jako, że dotyczą one jedynie opisanego wcześniej bazowego zestawu parametrów, który wcale nie musi odpowiadać jakiegś konkretnej gospodarce. Niemniej jednak warto chyba pokusić się o interpretację tych wyników, choćby dlatego, że wyniki naszych symulacji są realistyczne, przynajmniej w sensie uzyskanych proporcji między zmiennymi modelu. Szczególnie interesujący wydaje się rezultat otrzymany dla parametru opisującego prędkość przepływu pieniądza między krajami unii monetarnej (ε_2). Okazało się, że zarówno zbyt wysoka, jak i nazbyt niska mobilność pieniądza w unii skutkować może niestabilnością w omawianej małej gospodarce. Na marginesie dodajmy, że otrzymana tu wartość (0,41) jest bardzo wysoka (wydaje się w praktyce nieosiągalna). Taka wartość oznaczałaby bowiem, że różnica w poziomach stóp procentowych

$R - R^* = 1\%$ skutkuje wzrostem podaży pieniądza w kraju (w ciągu jednego roku) o 41%¹⁵.

W pełni osiągalna jest natomiast górna granica stabilności dla parametru ε_4 , wynosząca (w naszym przykładzie) około 1,128. Wartość ta oznaczałaby, że gdyby w danym roku ceny w kraju były o 10% niższe niż za granicą ($P/P^* = 0,9$), to w kolejnym roku bilans handlowy wzrósłby o 1,128, co stanowiłoby (w tym przykładzie) tylko około 0,1–0,2% produkcji¹⁶. Zatem jest możliwe, że niektóre małe kraje o nazbyt wysokiej wrażliwości bilansu handlowego na różnice w poziomach cen mogą w warunkach unii monetarnej doświadczyć problemów ze stabilnością gospodarki.

Oczywiście, nie można też w praktyce wykluczyć sytuacji, kiedy niektóre parametry reakcji w pewnych krajach będą niższe od dolnej granicy stabilności, co również może skutkować gwałtownymi wahaniami w tych gospodarkach. Biorąc pod uwagę liczby otrzymane w przykładzie stwierdzić można, że realna (osiągalna) jest dolna granica stabilności dla ε_1 – wystarczy tylko, aby niepożądane zmiany zapasów towarów prowadziły do dostatecznie powolnych zmian cen. Wartość 0,023 oznaczałaby, że nadmierne zapasy na poziomie $Z/Y - \tilde{z} = 10\%$ wywołałyby obniżkę cen o tylko 0,23% (w ciągu jednego roku). Wydaje się, że w praktyce można spotkać tak słabe reakcje cen¹⁷.

Podobnie realna wydaje się dolna granica stabilności dla parametru ε_3 . Wartość 0,137 oznacza, że w ciągu jednego roku niwelowane jest (przez odpowiednią zmianę poziomu produkcji) jedynie 13,7% różnicy między optymalnym a faktycznym poziomem produkcji.

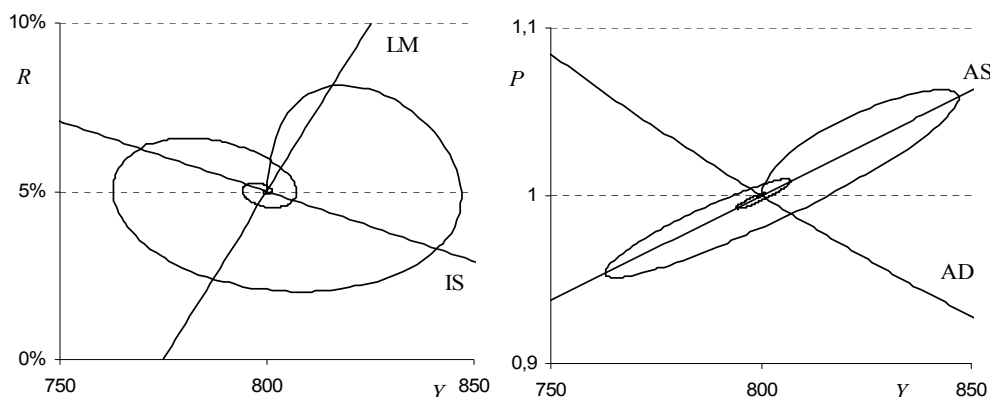
7. NIESKUTECZNOŚĆ POLITYKI FISKALNEJ W ŚREDNIM OKRESIE – UJĘCIE DYNAMICZNE

Stosując metody statycznej analizy porównawczej, w artykule Konopczyńskiego (2006) wykazaliśmy całkowitą nieskuteczność ekspansywnej polityki fiskalnej w warunkach UGW, która wynika z ujawniającego się w średnim okresie mechanizmu wyrównywania się cen w unii. Teraz przyjrzymy się jej raz jeszcze w ujęciu dynamicznym, wykorzystując przeprowadzone symulacje. Przyjmijmy następujące założenia. Gospodarka znajduje się początkowo w stanie równowagi, odpowiadającym bazowemu zestawowi parametrów (32). Stan ten jest określony wzorami (28). Leży on w punkcie przecięcia krzywych IS i LM oraz AD i AS, przedstawionych na poniższych wykresach.

¹⁵ W modelu dyskretnym górna granica stabilności dla ε_2 jest nieco niższa – wynosi około 0,385, co jednak wydaje się równie nieosiągalne w praktyce.

¹⁶ W modelu dyskretnym górna granica stabilności dla tego parametru jest nawet niższa (wynosi około 1).

¹⁷ Być może warto w przyszłości spróbować metodami ekonometrycznymi oszacować przynajmniej niektóre z omawianych parametrów reakcji.



Rysunek 3. Ilustracja efektów ekspansywnej polityki fiskalnej

W początkowym (krótkim okresie) następuje rozluźnienie polityki fiskalnej, polegające na zwiększeniu wydatków budżetowych z 300 do 310, przy niezmiennych podatkach na poziomie 300. Ten podwyższony poziom G utrzymuje się jedynie przez 7 pierwszych okresów, po czym wraca do poziomu 300. Jakie są skutki tej polityki?

Początkowo pojawia się wzrost produkcji, któremu towarzyszy inflacja. Jednocześnie wzrasta też stopa procentowa R , co powoduje stopniowy wzrost podaży pieniądza, dzięki napływowi kapitału z zagranicy. Wkrótce następuje przegrzanie gospodarki: wyższe stopy procentowe ograniczają krajowy popyt inwestycyjny i konsumpcyjny, narastają zapasy niesprzedanych towarów, co zachęca do obniżek cen. To zaś wpływa negatywnie na optymalny poziom produkcji i skutkuje stopniowym ograniczaniem produkcji. Można zauważyć, że (po dwóch szybko wygasających fazach wzrostu i spadku), gospodarka wraca do poprzedniego położenia – tego samego punktu, z którego startowała. W ten sposób ujawnia się działanie mechanizmu wyrównywania się cen w UGW w średnim okresie. Wyższe ceny, które są efektem rozluźnienia polityki fiskalnej, pogarszają pozycję konkurencyjną kraju, co wpływa negatywnie na bilans handlowy, a pośrednio także na produkcję. Równowaga jest osiągnięta dopiero po powrocie gospodarki do pierwotnego stanu stacjonarnego.

Warto podkreślić, że krótkotrwałe rozluźnienie polityki fiskalnej przynosi w zasadzie same negatywne skutki. Następuje silne rozchwianie gospodarki, po czym wraca ona do pierwotnego stanu. Oczywiście, wzrost wydatków budżetowych musi też skutkować wzrostem długu publicznego (czego w tym modelu nie uwzględniamy). Produkcja rośnie jedynie przez krótki, początkowy okres, po czym następuje recesja.

8. PODSUMOWANIE

Przedstawiliśmy model, który – jak sądzimy – może stanowić uproszczony opis procesu konwergencji stóp procentowych w strefie euro powiązanego z konwergencją poziomów cen. Może zatem opisywać proces wychodzenia strefy euro z trwającego kryzysu, który będzie wiązał się zapewne z ponownym zanikiem różnic w stopach procentowych. Jest też inna interpretacja przedstawionego modelu. Może on opisywać proces konwergencji uruchamiany z chwilą wejścia do unii monetarnej nowego kraju, w którym początkowo stopy procentowe odbiegają od średniej dla całej UGW. Badailiśmy własności modelu, koncentrując się na warunkach stabilności. Doszliśmy do wniosku, że mimo bardzo prostej struktury modelu, nierówności stanowiące warunki konieczne i dostateczne stabilności gospodarki są tak złożone, że nie jest możliwe ich rozwiązanie analityczne. Warunki te sprowadzają się w zasadzie do pewnych górnych i/lub dolnych ograniczeń nałożonych na parametry reakcji ε_i . Zatem kluczowe znaczenie dla stabilności gospodarki ma siła (tempo) reakcji podmiotów gospodarczych na nierównowagi pojawiające się na różnych rynkach. W dużym uproszczeniu, reakcje nie mogą być ani zbyt wolne, ani zbyt szybkie.

Warto też podkreślić, że w świetle uzyskanych wniosków badanie stabilności w modelach będących rozwinięciami przedstawionego tu modelu nie rokuje raczej nadziei na uzyskanie przejrzystych wniosków ekonomicznych. W modelach takich warunki konieczne i dostateczne stabilności prowadzą do układu bardzo skomplikowanych nierówności, nie posiadających czytelnej interpretacji ekonomicznej. Wynikać z nich mogą jedynie pewne wnioski dotyczące parametrów reakcji.

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

LITERATURA

- [1] Brock W.A., Malliaris A.G., (1996), *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics*, Elsevier.
- [2] Carlberg M., (2007), *Macroeconomics of Monetary Union*, Springer.
- [3] De Grauwe, P., (2007), *Economics of Monetary Union*, 7th edition, Oxford University Press.
- [4] EBC (2005), *Monetary Policy and Inflation Differentials in a Heterogenous Currency Area*, ECB Monthly Bulletin, nr 5.
- [5] Gandolfo G., (1980), *Economic Dynamics: Methods and Models*, North-Holland.
- [6] Gandolfo G., (1997), *Economic Dynamics: Study Edition*, Springer-Verlag.
- [7] Holt C., Modigliani F., Muth J., Simon H., (1960), *Planning, Production, Inventories and the Work Force*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- [8] Komisja Europejska (1990), *One Market, One Money: An Evaluation of the Potential Benefits and Costs of Forming an Economic and Monetary Union*, European Economy, 44.
- [9] Konopczyński M., (2006), *Skuteczność polityki fiskalnej w unii gospodarczej i walutowej*, *Ekonomista*, 5, 619–646.

- [10] Konopczyński M., (2009), *Krótkookresowy symulacyjny model cyklu koniunkturalnego w Unii Gospodarczej i Walutowej z zapasami w roli głównej*, w: J. Czech-Rogosz, J. Pietrucha, R. Żelazny (red.), *Koniunktura gospodarcza. Od bańki internetowej do kryzysu subprime*, Wydawnictwo C. H. Beck, Warszawa, 59–72.
- [11] Parsley, David & Wei, Shang-Jin (2008), *In Search of a Euro Effect: Big Lessons from a Big Mac Meal?*, *Journal of International Money and Finance*, 27 (2), 260–276.
- [12] Pentecost, E.J., van Poeck A., (2001), red., *European Monetary Integration: Past, Present and Future*, Edward Elgar.
- [13] Rogers J.H., Hufbauer C.G., Wada E., (2001), *Price Level Convergence and Inflation in Europe*, Institute for International Economics, Working Paper No. 01-1.
- [14] Romer D., (1996), *Advanced Macroeconomics*, McGraw-Hill.
- [15] Sachs J.D., Larrain F.B., (1993), *Macroeconomics in the Global Economy*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs.
- [16] Sosvilla-Rivero S., Gil-Pareja S., (2002), *Price Convergence in the European Union*, Documento de Trabajo, Working paper, May 2002.
- [17] Temperton P., (2001), *EURO. Wspólna waluta*, Felberg SJA, Warszawa.
- [18] Wolszczak-Derlacz J., (2010), *Does One Currency Mean One Price?*, *Eastern European Economics*, 48 (2), 87–114.
- [19] Wyplosz Ch., (2006), *European Monetary Union. The Dark Sides of a Major Success*, *Economic Policy*, 21, 207–261.

STABILNOŚĆ MAŁYCH GOSPODAREK WCHODZĄCYCH DO UNII MONETARNEJ W ŚWIETLE PEWNEGO MODELU BEHAVIORALNEGO

Streszczenie

W artykule przedstawiamy prosty, behawioralny model imitujący dynamikę małej gospodarki wchodzącej do unii gospodarczej i walutowej (UGW). Model uwzględnia m.in. proces konwergencji cen nominalnych w unii i jego wpływ na bilans handlowy, kształtowanie się cen w zależności od poziomu zapasów oraz przepływy kapitału finansowego niwelujące różnice w stopach procentowych na obszarze unii. Przy pomocy znanych metod analizy układów równań różniczkowych, badamy warunki stabilności gospodarki. Wykazujemy, że mają one postać ograniczeń na parametry behawioralne modelu, odzwierciedlające siłę reakcji podmiotów gospodarczych na nierównowagę. W celu zilustrowania tych wniosków, przedstawiamy symulacje komputerowe. Na koniec, przedstawiamy dynamiczną analizę procesu przejścia pomiędzy dwoma stanami równowagi, wywołanego przez ekspansję fiskalną.

Słowa kluczowe: unia monetarna, polityka fiskalna, euro, warunki stabilności stanu równowagi

THE STABILITY OF SMALL ECONOMIES IN THE MONETARY UNION IN THE LIGHT
OF A SIMPLE BEHAVIORAL MODEL

A b s t r a c t

The article introduces a simple behavioral model for simulating the dynamics of a small economy, that is a member of the Economic and Monetary Union (EMU). The model takes account, among others, of the process of nominal convergence of prices in the EMU and its impact on the trade balance, the evolution of prices depending on the level of stocks and flows of financial capital. With the help of certain methods of analysis of systems of differential equations, we are examining the conditions for stability of the economy. We show that they have the form of certain restrictions on behavioral parameters, which reflect the strength of the reaction of economic agents to imbalances. To illustrate these proposals, we carry out computer simulations. Finally, we present a dynamic analysis of the process of transition between two states of equilibrium, induced by fiscal expansion.

Keywords: monetary union, fiscal policy, euro, stability conditions

KESRA NERMEND, MAŁGORZATA TARCZYŃSKA-LUNIEWSKA

BADANIE JEDNORODNOŚCI PRZESTRZENNEJ I CZASOWEJ ROZWOJU OBIEKTÓW SPOŁECZNO-GOSPODARCZYCH

1. WPROWADZENIE

Problematyka jednorodności rozwoju regionów nabrała wielkiego znaczenia po wstąpieniu Polski do Unii Europejskiej. Stała się jednym z priorytetów polityki regionalnej do eliminacji dysproporcji rozwojowych między regionami. Dysproporcje wynikają często z trudnych warunków związanych z położeniem geograficznym regionu, brakiem odpowiedniej infrastruktury, dominacji nieefektywnego przemysłu (co dotyczy przede wszystkim regionów państw nowoprzyjętych). W celu eliminacji różnic między regionami powstały różne programy unijne. To wszystko spowodowało konieczność ciągłego monitorowania funkcjonowania i rozwoju regionów. Istotne przy tym jest zwrócenie uwagi na strukturę danego regionu (powiatu czy województwa), dzięki czemu możliwe jest zaobserwowanie dysproporcji w poziomie ich rozwoju społeczno-gospodarczego czy wskazanie, które z elementów składowych regionu są wiodące lub nie i w jakim obszarze widoczna jest dominacja lub regres. W świetle zachodzących procesów gospodarczych zarówno w skali lokalnej, jak i globalnej, określenie tylko poziomu rozwoju regionów staje się niewystarczające. Warto zatem zastosować odpowiednie narzędzia pomiaru umożliwiające szersze i głębsze spojrzenie na strukturę regionów. W tym zakresie zastosowanie mogą mieć m.in. metody badania jednorodności czasowej i przestrzennej. Wyodrębnienie i uwzględnienie takiego podziału w badaniu jednorodności pozwala na zaobserwowanie w jaki sposób następuje rozwój danego regionu: czy jest to rozwój jednorodny w czasie i/lub przestrzeni.

Gminy należące do jednego województwa i mające podobny charakter (miejskie, miejsko-wiejskie, wiejskie) powinny charakteryzować się podobnymi wskaźnikami. Im większe są różnice, tym województwo jest mniej jednorodne. Wykrycie takiego zjawiska może być sygnałem dla władz samorządowych o konieczności podjęcia działań w celu wyrównania poziomu rozwoju gmin w ramach województwa. Przy czym w badaniu jednorodności w przestrzeni na tej podstawie następuje wskazanie gmin (lub gminy), które „zakłóciły” jednorodność województwa. Oczywiście szczegółowe określenie przyczyn wpływających na powstanie niejednorodności i ich wyeliminowanie leży po stronie zarządzających regionem. Ułatwieniem jest natomiast wskazanie obszaru (np. gminy) powstałej nieprawidłowości.

Wskaźniki opisujące gminy mogą również charakteryzować się wahaniami w czasie, co jest wynikiem zmian zachodzących w gminach w przestrzeni czasowej, a wynikających z procesu ich funkcjonowania, egzystencji i rozwoju. Badanie jednorodności czasowej pozwala zatem na zaobserwowanie jak te zmiany następowały, a ich równomierność zachodzenia w czasie umożliwi określenie stopnia jednorodności regionu.

Zmiany w poziomie rozwoju społeczno-gospodarczego gmin (czy szerzej regionów) w czasie i przestrzeni z punktu widzenia jednorodności mogą mieć duży wpływ na ich miejsca w rankingu. Stąd też klasyfikacja regionów pod kątem jednorodności, staje się ważnym zagadnieniem, a jej zakres wykorzystania może być bardzo pomocny w procesie zarządzania danym regionem, na określonym stopniu agregacji.

Klasyfikacja regionów jest możliwa do ustalenia po wcześniejszym określeniu poziomu rozwoju społeczno-gospodarczego analizowanych obiektów. W tym zakresie wykorzystuje się m.in. metody porządkowania liniowego. Jedną z najbardziej popularnych dziś metod porządkowania liniowego zaproponował Hellwig (1968). Zwana jest miarą syntetyczną Hellwiga. Metoda Hellwiga znalazła szereg zastosowań, do których można zaliczyć między innymi: konstrukcję zmiennych syntetycznych w procesie modelowania ekonometrycznego (np. Bartosiewicz, 1984), określanie jakości wyrobów (np. Borys, 1984), badanie rozwoju regionów (np. Młodak, 2006; Nermend, 2007, 2008c), badanie atrakcyjności inwestycji giełdowych (np. Luniewska, Tarczyński, 2006), mierzenie statusu społecznego (np. United Nations Development Programme, 2010), biedy (Social Watch, Social Watch Annual Report, 2010), głodu (np. International Food Policy Research Institute, Global Hunger Index. The challenge of hunger, 2010), łatwości prowadzenia biznesu (np. World Bank, Making a difference for entrepreneurs, 2010), konkurencyjności (np. World Economic Forum, Global Competitiveness Report, 2010–2011), pokoju (np. Institute for Economics & Peace, Global Peace Index Methodology, Results and Findings, 2010).

W zakresie badania poziomu rozwoju obiektów możliwe jest również zastosowanie miary wektorowej (Kolenda, 2006; Nermend, 2006a, 2006b, 2007, 2008a, 2008b). Jej zaletą jest duża elastyczność aplikacji w ekonomii, co szczególnie daje się zauważyć w odmianie miary wektorowej wykorzystującej wyłącznie iloczyn skalarny (Nermend 2008a, 2008c). W takim ujęciu do wyznaczenia miary syntetycznej (wektorowej) można wykorzystać dowolny iloczyn skalarny oraz arytmetykę przyrostów zaproponowaną przez Borawskiego (2012). Ten ostatni element odpowiada za wprowadzenie do obliczeń dodatkowego czynnika, który może nieść istotną informację użyteczną w interpretacji wyniku (zob. np.: Nermend, Borawski, 2006; Nermend, 2006b). Tą dodatkową informacją, może być przyrost odchylenia standardowego lub przyrost wariancji. W zależności od przyjętego sposobu obliczenia przyrostu odchylenia standardowego i/lub przyrostu wariancji, uzyskuje się informację o: jednorodności zbioru obiektów składających się na analizowany obiekt (np. jednorodności gmin w ramach województwa) czy wielkości zmian wartości miary na przestrzeni lat.

Celem artykułu jest przedstawienie propozycji metody klasyfikacji regionów z uwzględnieniem ich jednorodności. Przedstawione zostaną dwa przykłady, jeden ilustrujący badanie jednorodności przestrzennej a drugi czasowej.

2. METODA BADANIA JEDNORODNOŚCI PRZESTRZENNEJ I CZASOWEJ REGIONÓW

Etap I. Wybór zmiennych

W zakresie doboru – wyboru zmiennych możliwe jest zastosowanie statystyczno-formalnych metod doboru-wyboru zmiennych i/lub analityk może wybrać zmienne zgodnie z istniejącą teorią ekonomii lub znajomością danej problematyki badawczej, gdzie dużą rolę odgrywa jego doświadczenie. Niezależnie od zastosowanego podejścia, doboru-wyboru zmiennych dokonuje się w taki sposób, aby jak najwłaściwiej odwzorować, opisać i zmierzyć badane zjawisko.

Etap II. Obliczenie wskaźników

Na podstawie wybranych zmiennych wyliczane są wskaźniki, które pozwalają uniezależnić się od powierzchni i liczby ludności regionów. Tak utworzone wielkości w sposób relatywny wskazują strukturę lub natężenie danego zjawiska. Wskaźniki można analizować w czasie i/lub przestrzeni, co z kolei wiąże się z szerszym poznaniem badanego zjawiska. Ponadto zmiany zachodzące w poziomie wskaźników wpływają na poziom miar rozwoju. Szczegółowe analizy wskaźników umożliwiają również wskazanie, które mierniki lub w jakich obszarach mierników nastąpiły najistotniejsze zmiany, czy w ogóle nastąpiły zmiany, jaki jest ich kierunek a co za tym jaki mają wpływ na kształtowanie się miary rozwoju obiektów (syntetycznej i/lub wektorowej).

Etap III. Wyznaczenie dwójek uporządkowanych

Na tym etapie wyznaczane są dwójki uporządkowane wykorzystywane w dalszych obliczeniach zamiast liczb rzeczywistych. Wyliczenie dwójek uporządkowanych wymaga posiadania różnych wartości tych samych zmiennych dla jednego obiektu. Przykładowo mając daną zmienną będącą liczbą ludności dla konkretnego województwa, można dysponować jej wartością w różnych latach, albo jej wartością dla wszystkich gmin danego województwa. Dla tych wartości wyznaczana jest ich wartość średnia:

$$\eta_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^N x_{i,k}}{N} \quad (1)$$

gdzie: η_{ij} jest wartością średnią i -tej zmiennej j -tego obiektu, a N – liczbą wartości określających wartość tej zmiennej,

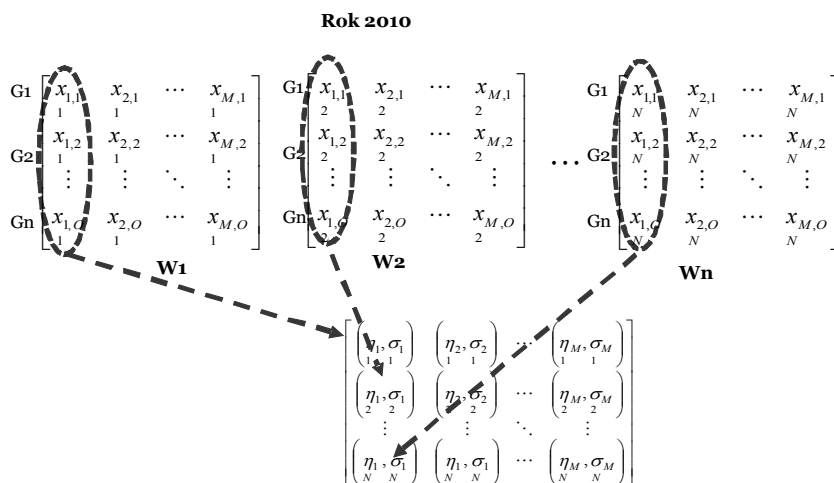
i odchylenie standardowe dla populacji:

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N \left(x_{i,k} - \eta_j \right)^2}{N}}, \quad (2)$$

gdzie: σ_j jest odchyleniem standardowym i -tej zmiennej j -tego obiektu, N – liczba wartości określających wartość tej zmiennej.

Wykorzystuje się w tym przypadku odchylenie standardowe dla populacji, gdyż na ogół znane są wszystkie możliwe wartości zmiennej.

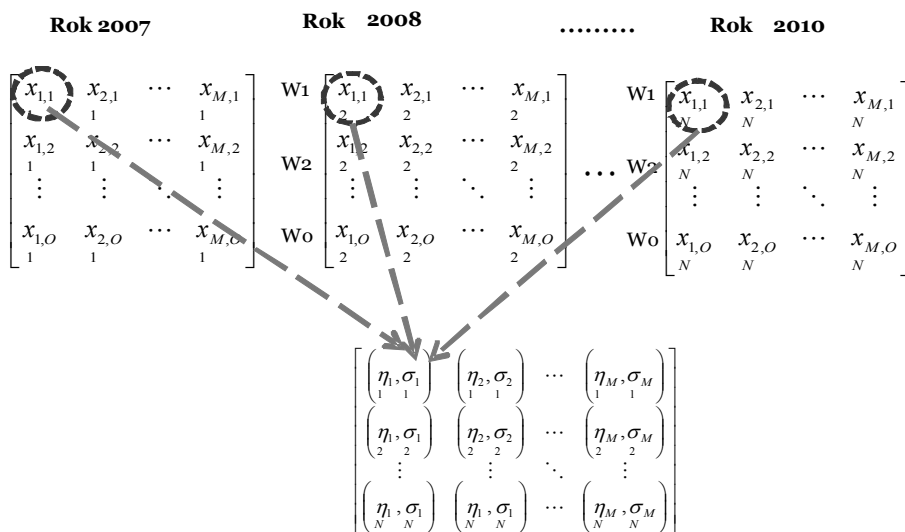
Para liczb: wartość średnia i odchylenie standardowe zostanie dalej użyta w obliczeniach. Zarówno wartość średnia jak i odchylenie standardowe będą dalej brały udział w operacjach arytmetycznych. W przypadku odchylenia standardowego, jego sumowanie, odzwierciedla sumowanie wartości losowych przy założeniu całkowitej zależności zdarzeń. Aby odzwierciedlić sumowanie wartości losowych przy założeniu niezależności zdarzeń należy wykonać sumowanie wariancji. Sumowanie odchyleń standardowych i wariancji definiuje dwa skrajne przypadki. W praktyce występuje częściowa zależność zdarzeń, w związku z tym poprawny wynik będzie się znajdował pomiędzy wartością wyliczoną przez sumowanie odchyleń standardowych i wariancji. Stąd konieczne jest równoległe wykonywanie obliczeń dla par wartości: wartość średnia, odchylenie standardowe i wartość średnia, wariancja.



Rysunek 1. Macierz dwójek uporządkowanych przy badaniu jednorodności przestrzennej

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 1 przedstawiono macierz dwójek uporządkowanych wykorzystywaną przy badaniu jednorodności przestrzennej. Przez W oznaczono kolejne województwa, a przez G – gminy. Rysunek 2 przedstawia podobną macierz wykorzystywaną przy badaniu jednorodności czasowej.



Rysunek 2. Macierz dwójek uporządkowanych przy badaniu jednorodności czasowej

Źródło: opracowanie własne.

Etap IV. Wyznaczenie przyrostów

Obliczenia będą wykonywane w przestrzeni wektorowej, w której wymogiem jest, aby dla każdego elementu istniał element przeciwny. Jeżeli przyjmie się pary uporządkowane: wartość średnia, odchylenie standardowe i wartość średnia, wariancja, jako elementy opisujące wektor, to konsekwencją tego faktu jest konieczność przyjmowania przez nie wartości ujemnych. W związku z tym operacje arytmetyczne nie mogą być wykonywane na odchyleniach arytmetycznych i wariancjach, ale muszą być wykonywane na ich różnicach, zwanych dalej przyrostami, które mogą przyjmować wartości ujemne.

Wartość średnia, odchylenie standardowe i wariancja są zamieniane na ich przyrosty. Wykonuje się to poprzez wyznaczenie różnicy pomiędzy uzyskaną wartością średnią, odchyleniem standardowym i wariancją a ich punktami odniesienia. Powstają w ten sposób dwójki uporządkowane:

$$\left(\Delta \eta_i, \Delta \sigma_i \right) = \left(\eta_i - \eta_o, \sigma_i - \sigma_o \right), \quad (3)$$

gdzie η_o i σ_o są punktami odniesienia, odpowiednio dla przyrostu wartości średniej i przyrostu odchylenia standardowego, oraz:

$$\left(\Delta \eta_i, \Delta \sigma_i^2 \right) = \left(\eta_i - \eta_o, \sigma_i^2 - \sigma_o^2 \right). \quad (4)$$

Punkty odniesienia mogą być obrane dowolnie, powinny być jednak identyczne dla wszystkich przyrostów wartości średnich i podobnie identyczne dla wszystkich przyrostów odchylen standardowych i przyrostów wariancji. Najwygodniej przyjąć je jako równe zero. Można wówczas w łatwy sposób dodając zero, zamienić przyrosty na wartości średnie, odchylenia standardowe i wariancję. W praktyce można je traktować jako wartość średnią, odchylenie standardowe i wariancję. Należy jednak pamiętać o tym, że postępowanie takie będzie możliwe tylko tak długo, póki nie ulegnie zmianie punkt odniesienia, albo nie nastąpi wykonanie operacji arytmetycznej z wartością o innym punkcie odniesienia.

Etap V. Eliminacja zmiennych o zbyt małej zmienności

W literaturze najczęściej eliminację zmiennych przeprowadza się z wykorzystaniem współczynnika istotności cech (np. Kukuła, 2000). W pracach Kukuły (2000) i Sobczyka (1983) określono, że zmienne, których wartości współczynników zmienności mieszczą się w przedziale $\langle 0,1 \rangle$, są zmiennymi quasi-stałymi. Zmienne takie należy eliminować ze zbioru rozpatrywanych zmiennych. Do eliminacji zmiennych posłużono się następującym wzorem (Nermend, 2009):

$$V_i = \frac{\sigma_i}{\bar{x}_i}. \quad (5)$$

Przy czym wartość średnia i odchylenie standardowe są liczone dla przyrostów wartości średnich należących do odpowiednich dwójek uporządkowanych.

Etap VI. Eliminacja zmiennych o zbyt dużej niejednorodności

Oprócz współczynników istotności możliwe jest również zdefiniowanie współczynnika, który można nazwać współczynnikiem zmienności cechy dla obiektu:

$$S_i = \frac{\Delta \sigma_i}{\Delta \eta_i}. \quad (6)$$

Współczynnik ten mówi o poziomie zmienności danej cechy (zmiennej) dla określonego obiektu. Jego wartość nie powinna dla żadnej zmiennej i dla żadnego obiektu przekroczyć jedności. Jeżeli założy się rozkład normalny wartości zmiennej, to przy jej wartości średniej równej a , jedna trzecia wszystkich wartości będzie większa od $2a$ lub mniejsza od zera. Ich różnica od wartości średniej będzie znaczna. Co więcej,

przy innych rozkładach ten odsetek może znacznie wzrosnąć. Będzie to powodować możliwość dużej rozbieżności w wartościach miary dla danego obiektu. W rezultacie może to doprowadzić do sytuacji, że zakwalifikowany zostanie on do pierwszej klasy, ale z możliwością umiejscowienia go również w klasie ostatniej. W istocie duża wartość współczynnika zmienności cechy dla obiektu oznacza, że obiekty wchodzące w skład tego obiektu są tak różnorodne, że praktycznie nie powinny być traktowane jako jeden obiekt. W takiej sytuacji należy albo wyeliminować ten obiekt z badań, albo zmienną dla której ten obiekt uzyskał tak dużą wartość współczynnika.

Etap VII. Normowanie

Pary wartości mogą być unormowane zgodnie ze wzorami:

$$\left(\Delta \eta'_j, \Delta \sigma'_j \right) = \left(\frac{\Delta \eta_j - \Delta \bar{\eta}_j}{\sigma_{\eta_j}}, \frac{\Delta \sigma_j}{\sigma_{\eta_j}} \right), \quad (7)$$

oraz:

$$\left(\Delta \eta'_j, \Delta \sigma'^2_j \right) = \left(\frac{\Delta \eta_j - \Delta \bar{\eta}_j}{\sigma_{\eta_j}}, \frac{\Delta \sigma_j^2}{\sigma_{\eta_j}^2} \right). \quad (8)$$

Podczas standaryzacji od normowanych zmiennych często odejmuje się wartość średnią. Wartość średnia jest często kilkakrotnie wyższa od składowej zmiennej (zmiennych). Powoduje to, że podczas wyznaczania wartości miary, główny wpływ na wynik ma wartość średnia, a nie składowa zmienna. Stąd istnieje konieczność jej wyeliminowania. Przyrosty odchyłeń standardowych dla danej zmiennej mają również swoją wartość średnią i składową zmienną. Jednak nie mają one wpływu na wyznaczenie wartości miary syntetycznej. Mówią one o zmienności wartości współrzędnych obiektów. Usunięcie wartości średniej przyrostów odchyłeń spowodowałoby usunięcie części informacji o ich zmienności. W związku z tym, wartości średniej przyrostów odchyłeń standardowych się nie usuwa.

Operacja odejmowania dla przyrostu wartości średniej powoduje zmianę punktu odniesienia, a dzielenie – zmianę jego skali wartości. Zmiana punktu odniesienia powoduje, że od tego momentu nie można go traktować tak, jakby był wartością średnią. Jest on różnicą pomiędzy prawdziwą wartością średnią, a punktem odniesienia, którego wartość nie weźmie dalej udziału w obliczeniach, a więc dla ostatecznego wyniku dalszych obliczeń nie będzie znana. Nie będzie zatem możliwości wyznaczenia wartości średniej na podstawie przyrostu wartości średniej. Przyrosty wartości średnich pozwalają będą na określenie, czy związane z nimi wartości średnie są od siebie większe czy mniejsze. Pozwala to na uszeregowanie obiektów, które będzie dokładnie takie jakie byłoby dla wartości średnich.

W przypadku przyrostów odchyłeń standardowych nie następuje zmiana punktu odniesienia, a jedynie zmiana skali. Powoduje to, że może ono być nadal traktowane tak, jakby było odchyleniem standardowym.

Etap VIII. Wyznaczanie wzorca i antywzorca

Przed wyznaczeniem wartości miary syntetycznej konieczne jest wyznaczenie wzorca i antywzorca. Mogą one być obrane jako obiekty rzeczywiste. Możliwe jest również automatyczne wyznaczenie wzorca i antywzorca na podstawie pierwszego i trzeciego kwartyla (zob. np. Kolenda, 2006). Przy czym jako współrzędne wzorca przyjmuje się wartości trzeciego kwartyla dla stymulant i pierwszego kwartyla dla destymulant:

$$\Delta \eta'_{i\substack{w}} = \begin{cases} \Delta \eta'_{i\substack{k_{III}}} & \text{dla stymulant,} \\ \Delta \eta'_{i\substack{k_I}} & \text{dla destymulant,} \end{cases} \quad (9)$$

gdzie: $\Delta \eta'_{i\substack{w}}$ jest wartością i -tej unormowanej zmiennej dla wzorca, $\Delta \eta'_{i\substack{k_I}}$ – wartością i -tej unormowanej zmiennej dla pierwszego kwartyla, a $\Delta \eta'_{i\substack{k_{III}}}$ – wartością i -tej unormowanej zmiennej dla trzeciego kwartyla.

W przypadku antywzorca postępuje się odwrotnie, jako współrzędne antywzorca przyjmuje się wartości pierwszego kwartyla dla stymulant i trzeciego kwartyla dla destymulant:

$$\Delta \eta'_{i\substack{aw}} = \begin{cases} \Delta \eta'_{i\substack{k_I}} & \text{dla stymulant,} \\ \Delta \eta'_{i\substack{k_{III}}} & \text{dla destymulant,} \end{cases} \quad (10)$$

gdzie: $\Delta \eta'_{i\substack{aw}}$ jest wartością i -tej unormowanej zmiennej dla antywzorca.

Jeżeli wzorec jest wyznaczany na podstawie kwartyli to reprezentuje on rzeczywisty, wyidealizowany obiekt. Nie istnieje zatem konieczność określania przyrostów odchyłeń dla jego współrzędnych. Można je przyjąć jako zerowe. Jeżeli wzorec jest wyznaczany na podstawie obiektów rzeczywistych, traktowanych jako wzorcowe, to przyrosty odchylenia standardowego i przyrosty wariancji należy wyznaczyć na podstawie zmienności współrzędnych tych obiektów.

Etap IX. Wyznaczanie miary syntetycznej

Wyznaczenie wartości miary syntetycznej dla wartości średnich można dokonać za pomocą wzoru:

$$\Delta m_{s\eta}_j = \frac{\sum_{i=1}^M \left(\Delta \eta'_i - \Delta \eta'_i \right)_j \left(\Delta \eta'_i - \Delta \eta'_i \right)_{aw}}{\sum_{i=1}^M \left(\Delta \eta'_i - \Delta \eta'_i \right)_{aw}^2}. \quad (11)$$

Konsekwencją użycia wzoru (11) do wyliczenia miary syntetycznej jest brak informacji o poziomie wartości przyrostów odchyłeń standardowych dla poszczególnych wartości miary. W obliczeniach samej miary wykorzystuje się tylko wartości średnie. Zakłada się, że odchylenia standardowe i wariancje są wartościami, które poddaje się takim samym transformacjom jak wartości średnie. Nie wszystkie operacje wykonywane na wartościach średnich mogą być przeprowadzone dla odchyłeń standardowych i wariancji. Do wyznaczenia wektorowej miary syntetycznej użyto rzutu. Operacja wyznaczania współczynnika rzutu nie może być jednak przeprowadzona dla odchyłeń standardowych i wariancji. Operację określania wartości odchyłeń standardowych i wariancji dla współczynnika rzutu wykonano zakładając, że odchylenia standardowe wyznaczają wokół punktu określającego położenie obiektu w przestrzeni hiperkulę. Jako promień hiperkuli przyjęto maksymalną wartość odchylenia standardowego wskaźników opisujących dany obiekt. Pozwoliło to na określenie odchylenia standardowego współczynnika rzutu:

$$\Delta m_{s\sigma \max}_j = \frac{\max_i \left(\Delta \sigma'_i \right)_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^M \left(\Delta \eta'_i - \Delta \eta'_i \right)_{aw}^2}}. \quad (12)$$

Podobne obliczenia wykonano dla wariancji zamieniając ją uprzednio na odchylenie standardowe:

$$\Delta m_{s\sigma^2 \max}_j = \frac{\sqrt{\max_i \left(\Delta \sigma'^2_i \right)_j}}{\sqrt{\sum_{i=1}^M \left(\Delta \eta'_i - \Delta \eta'_i \right)_{aw}^2}}. \quad (13)$$

Z obu wyznaczonych wartości wybrano większą w celu określenia maksymalnego możliwego odchylenia miary syntetycznej.

$$\Delta m_{s\sigma}_j = \max \left\{ \Delta m_{s\sigma \max}_j, \Delta m_{s\sigma^2 \max}_j \right\}. \quad (14)$$

Etap X. Przyporządkowanie obiektów do klas

Na podstawie przyrostu wartości średniej miary syntetycznej obiekty mogą zostać podzielone na klasy. Podział na klasy jest standardową procedurą przy wyznaczaniu miar syntetycznych i ma na celu ułatwienie prezentacji wyników (np. na mapkach). Zakres wartości miary syntetycznej dzieli się najczęściej na cztery równe zakresy, których szerokość wyznacza się z reguły na podstawie odchylenia standardowego wartości miary:

$$kl_j = \begin{cases} 1 & \text{dla } \Delta m_{s\eta} \geq \overline{\Delta m_s} + \sigma_{\Delta m_s} \\ 2 & \text{dla } \Delta m_{s\eta} \geq \overline{\Delta m_s} \quad \wedge \quad \Delta m_{s\eta} < \overline{\Delta m_s} + \sigma_{\Delta m_s} \\ 3 & \text{dla } \Delta m_{s\eta} \geq \overline{\Delta m_s} - \sigma_{\Delta m_s} \quad \wedge \quad \Delta m_{s\eta} < \overline{\Delta m_s} \\ 4 & \text{dla } \Delta m_{s\eta} < \overline{\Delta m_s} - \sigma_{\Delta m_s} \end{cases}, \quad (15)$$

gdzie: $\overline{\Delta m_s}$ jest wartością średnią przyrostu wartości średniej, $\sigma_{\Delta m_s}$ – odchyleniem standardowym przyrostu wartości średniej, a kl_j – numerem klasy dla j -tego obiektu.

Do klasy pierwszej należą obiekty najlepsze o najwyższych przyrostach wartości średniej miary syntetycznej, a do klasy czwartej najgorsze o najmniejszych wartościach miary syntetycznej.

Na podstawie wartości przyrostów odchyłeń standardowych i przyrostów wariancji można wyznaczyć maksymalną wartość odchylenia standardowego. Odchylenie standardowe można w tym przypadku interpretować jako miarę jednorodności na przykład gmin w województwach. Im jest ona mniejsza tym województwa są bardziej jednorodne i występują mniejsze różnice pomiędzy gminami w województwie. Niską wartość odchylenia standardowego należy traktować jako wartość pożądaną. Podział na klasy pod względem jednorodności można przeprowadzić na podstawie wzoru:

$$kl_\sigma = \begin{cases} 1 & \text{dla } \Delta m_{s\sigma} < p_1 \sigma_{m_s} \\ 2 & \text{dla } \Delta m_{s\sigma} \geq p_1 \sigma_{m_s} \quad \wedge \quad \Delta m_{s\sigma} < p_2 \sigma_{m_s} \\ 3 & \text{dla } \Delta m_{s\sigma} \geq p_2 \sigma_{m_s} \quad \wedge \quad \Delta m_{s\sigma} < p_3 \sigma_{m_s} \\ 4 & \text{dla } \Delta m_{s\sigma} \geq p_3 \sigma_{m_s} \end{cases}, \quad (16)$$

gdzie: kl_σ jest numerem klasy dla wartości maksymalnej odchylenia standardowego j -tego obiektu, p_1, p_2, p_3 – współczynniki skalujące dobierane według uznania badacza w celu lepszego zwizualizowania wyników np. na mapce.

Do klasy pierwszej należą obiekty o najmniejszych wartościach odchyień standardowych. Są to z punktu widzenia tych odchyień standardowych obiekty najlepsze, gdyż najbardziej jednorodne. Do klasy ostatniej, najgorszej, należą obiekty o najwyższych wartościach odchyień standardowych. Charakteryzują się bardzo dużą niejednorodnością.

3. BADANIE EMPIRYCZNE NA PRZYKŁADZIE ANALIZ REGIONALNYCH

Do badań wybrano zmienne, z których wyznaczono 14 wskaźników należących do grupy wskaźników o charakterze społeczno-ekonomicznym:

X1 – dochody z majątku gminy na 1000 mieszkańców; X2 – wydatki na ochronę zdrowia ogółem na 1000 mieszkańców; X3 – dochody własne na jednego mieszkańca ogółem; X4 – powierzchnia lasów i gruntów leśnych do powierzchni gminy w procentach; X5 – liczba firm w sektorze publicznym do liczby firm ogółem w procentach; X6 – wydatki na oświatę i wychowanie ogółem na 1000 mieszkańców; X7 – bezrobotni zarejestrowani na 100 mieszkańców w wieku produkcyjnym; X8 – dotacje celowe i subwencje na 1000 mieszkańców w PLN; X9 – pracujący ogółem na 100 mieszkańców w wieku produkcyjnym; X10 – liczba firm na 1000 mieszkańców; X11 – wydatki na jednego mieszkańca ogółem; X12 – dochody na jednego mieszkańca ogółem; X13 – liczba pracujących kobiet do pracujących ogółem w procentach; X14 – liczba firm w sektorze prywatnym do liczby firm ogółem w procentach.

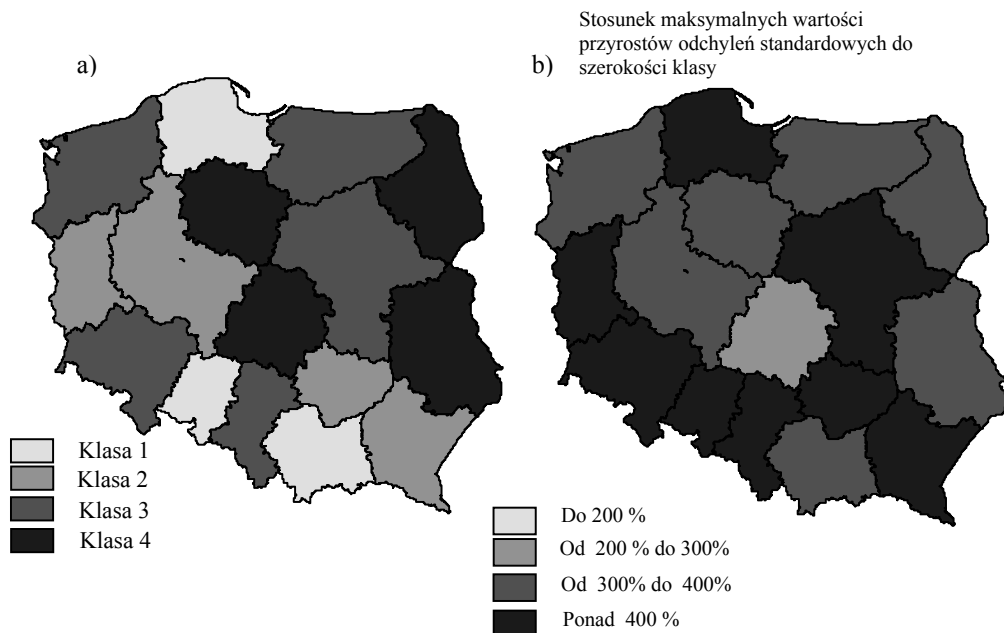
Dane pozyskano z GUS za 2010 rok. Badanie jednorodności regionów (województw) przeprowadzono w dwóch wariantach: w przestrzeni i w czasie. W pierwszym badaniu dla wskaźników wyznaczono wartości średnie, odchylenia standardowe i wariancje z danych dla gmin na obszarze każdego województwa. Aby otrzymać przyrosty odjęto od nich zero. Wartości średnie i przyrosty wartości średnich reprezentują średni poziom wartości zmiennych dla gmin w ramach województw. Natomiast odchylenia standardowe, wariancje oraz ich przyrosty określają zmienność przestrzenną zmiennych, czyli ich zmienność dla poszczególnych gmin danego województwa. Wartości średnie i ich przyrosty określają centrum miejsca w przestrzeni wektorowej, w której znajdują się obiekty (gminy), a odchylenia standardowe i ich przyrosty obszar (hiperelipsoidę), w której ich znalezienie jest najbardziej prawdopodobne. Jedyną różnicą pomiędzy wartościami a ich przyrostami jest to, że przyrosty określają wartości względem poziomu odniesienia zero, który może być ruchomy.

Z 14 wskaźników, 11 miało współczynnik istotności cech na poziomie większym niż 0,1 (X1-X5, X7-X12). Natomiast z tych 11, 7 miało współczynnik zmienności cechy na poziomie mniejszym niż 0,8, co przyjęto za próg odrzucenia. Ostatecznie do dalszych badań, po eliminacji zmiennych, pozostawiono siedem wskaźników:

X5 – liczba firm w sektorze publicznym do liczby firm ogółem w procentach; X7 – bezrobotni zarejestrowani na 100 mieszkańców w wieku produkcyjnym; X9 – pracujący ogółem na 100 mieszkańców w wieku produkcyjnym; X10 – liczba firm na 1000

mieszkańców; X11 – wydatki na jednego mieszkańca ogółem; X12 – dochody na jednego mieszkańca ogółem.

Wskaźniki te zostały poddane standaryzacji, a następnie wyliczone zostały dla nich wartości miary syntetycznej oraz dokonano podziału obiektów na klasy. W celu wizualizacji wyniki przedstawiono na mapkach (rys. 3).



Rysunek 3. Podział województw na klasy z wykorzystaniem wskaźników o charakterze społeczno-ekonomicznym: a) ze względu na poziom rozwoju przeciętnej gminy, b) ze względu na jednorodność

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 3a przedstawiono ranking województw ze względu na poziom rozwoju przeciętnej gminy, a na rysunku 3b klasyfikację ze względu na jednorodność. W przedstawionym rankingu (rys. 3a) najlepsze miejsce zajęły województwa pomorskie, opolskie i małopolskie. Jednak dwa z tych województw: pomorskie i opolskie, charakteryzują się wysoką niejednorodnością, co jest widoczne na rysunku 3b. Dla przedmiotowych województw stosunek odchylenia standardowego do szerokości klas wynosi ponad 400%. Wynika z tego, że gminy wchodzące w skład tych województw mogą znajdować się praktycznie w każdej z czterech klas. Są one bardzo zróżnicowane wewnętrznie pod względem poziomu rozwoju. Jest to zjawisko bardzo niekorzystne.

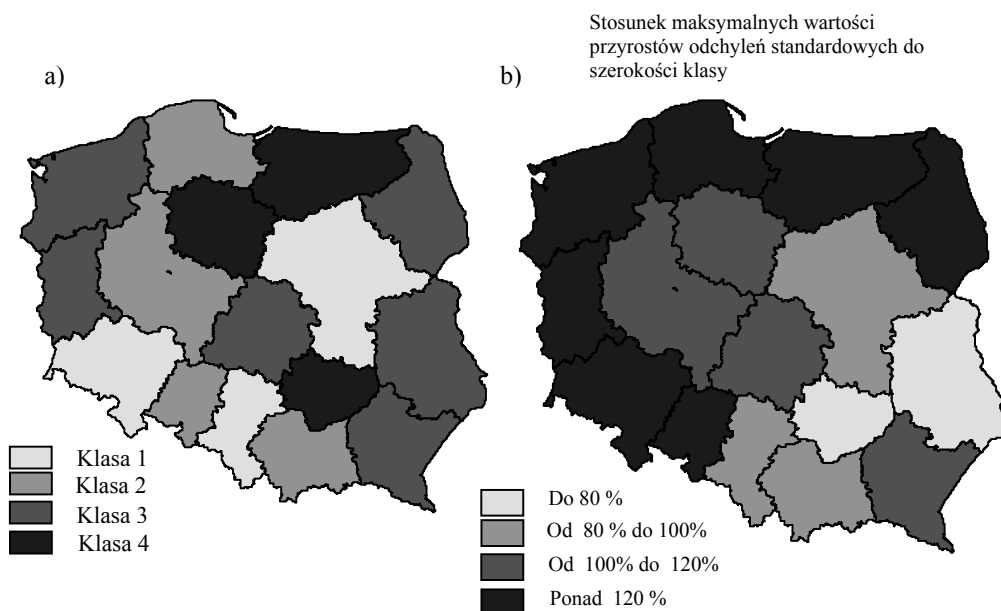
W przedstawionej klasyfikacji jednorodności wszystkie województwa charakteryzują się bardzo wysoką niejednorodnością. Nawet województwo łódzkie, które jest

w przedstawionym rankingu najlepsze, ma bardzo dużą niejednorodność. Świadczy o tym stosunek odchylenia standardowego do szerokości klas, który dla pierwszej klasy wynosi do 200%. Wynika stąd, że rangowanie wartości średnich w takiej sytuacji nie jest zalecane.

W drugim podejściu do badania jednorodności dla przedstawionych wcześniej wskaźników wyznaczono wartości średnie, odchylenia standardowe i wariancje z danych dla województw w kolejnych latach. Wszystkie obliczenia przeprowadzono jak w wariancie dla badania jednorodności w przestrzeni. Po procedurze eliminacji pozostały następujące wskaźniki (jako próg odrzucenia współczynnika zmienności cechy przyjęto wartość 0,2):

X4 – powierzchnia lasów i gruntów leśnych do powierzchni województwa w procentach; X5 – liczba firm w sektorze publicznym do liczby firm ogółem w procentach; X7 – bezrobotni zarejestrowani na 100 mieszkańców w wieku produkcyjnym; X9 – pracujący ogółem na 100 mieszkańców w wieku produkcyjnym; X10 – liczba firm na 1000 mieszkańców.

Wskaźniki te również zostały poddane standaryzacji, a następnie wyliczone zostały dla nich wartości miary syntetycznej, oraz dokonano podziału obiektów na klasy. W celu wizualizacji wyniki przedstawiono na mapkach (rys. 4).



Rysunek 4. Podział województw na klasy z wykorzystaniem wskaźników o charakterze społeczno-ekonomicznym: a) ze względu na średni poziom rozwoju województwa, b) ze względu na jednorodność województw w czasie

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 4a przedstawiono klasyfikację województw ze względu na średni poziom rozwoju województwa, a na rysunku 4b klasyfikację ze względu na jednorodność w czasie. W przedstawionym rankingu najlepsze miejsce zajęły województwa mazowieckie, dolnośląskie i śląskie. Z tych trzech województw największą niejednorodnością charakteryzuje się województwo dolnośląskie. Za interesujący wynik badań można uznać, fakt, że wszystkie województwa leżące w pasie granicznym północnym i zachodnim mają wysoką niejednorodność, natomiast z punktu widzenia poziomu rozwoju można je sklasyfikować jako dobre i bardzo dobre. Z jednej strony oznacza, że w tych województwach zaszły istotne zmiany w poziomie rozwoju w latach 2007–2010, ale rozwój ten był nierównomierny. Szczegółowa analiza wskaźników w czasie i przestrzeni pozwoliłaby na wskazanie powodów i obszarów (gmin) powstałej niejednorodności.

4. WNIOSKI

W artykule przedstawiono metodykę badania jednorodności czasowej i przestrzennej regionów. Badania przeprowadzono na gminach i województwach Polski. Po weryfikacji metody, podczas klasyfikacji województw na podstawie danych pochodzących z gmin, okazało się, że niejednorodność jest tak duża, że przy klasyfikacji województw należy być bardzo ostrożnym w formułowaniu wniosków końcowych. Dopiero spojrzenie na strukturę rozwoju województwa, której pochodną jest jednorodność daje pełny obraz rozwoju społeczno-gospodarczego regionów. W województwach sklasyfikowanych jako najlepsze oczekiwano również pozytywnych wyników przy badaniu jednorodności. Jednak badanie wykazało duże zróżnicowanie i wysoką niejednorodność regionów.

Przy badaniu poziomu rozwoju regionów zasadne jest zwrócenie uwagi w ogóle na problematykę rozwoju i elementów go tworzących. Z ekonomicznego punktu widzenia rozwój regionów jest to proces ciągły, gdzie efekty działań i funkcjonowania gmin, powiatów wpływające w konsekwencji na poziom rozwoju województw zachodzą w przestrzeni, ale przede wszystkim w czasie. Zatem uwzględnienie czynnika czasu pozwala na mocniejsze wyeksponowanie samego pojęcia rozwój regionu a przeprowadzona klasyfikacja silniej odzwierciedla faktyczny poziom rozwoju danego regionu. Uwzględnienie przy tym problematyki jednorodności w czasie pozwala na zwrócenie uwagi na równomierność rozwoju regionów w czasie. Zachowanie jednorodności rozwoju regionów (województw) zarówno w czasie i przestrzeni pozwala na wyeliminowanie różnic zachodzących w rozwoju składowych regionu (gmin, powiatów). Badanie jednorodności czasowej i przestrzennej poziomu rozwoju regionów może mieć ponadto zastosowanie w procesie zarządzania jednostkami samorządu terytorialnego m.in. dla poznania poziomu rozwoju regionów, wdrażania programów pomocowych i rozwojowych dla i w regionach czy wyrównywania zróżnicowanego rozwoju regionów.

LITERATURA

- [1] Bartosiewicz S., (1984), Zmienne syntetyczne w modelowaniu ekonometrycznym, *Prace naukowe AE*, nr 262, Wrocław.
- [2] Borawski M., (2012), Vector Space of Increments, *Control and Cybernetics* No. 1.
- [3] Borys T., (1984), Kategoria jakości w statystycznej analizie porównawczej, *Prace naukowe AE, seria : monografie i opracowania*, nr 23, Wrocław.
- [4] Institute for Economics & Peace, Global Peace Index Methodology, Results and Findings, 2010, <http://www.visionofhumanity.org/wpcontent/uploads/PDF/2010/2010%20GPI%20Re-sults%20Report.pdf>.
- [5] International Food Policy Research Institute, Global Hunger Index. The Challenge of Hunger: Focus on the Crisis of Children Undernutrition, 2010, <http://www.ifpri.org/sites/default/files/publications/ghi10.pdf>.
- [6] Hellwig Z., (1968), Zastosowanie metody taksonomicznej do typologicznego podziału krajów ze względu na poziom ich rozwoju oraz zasoby i strukturę wykwalifikowanych kadr, *Przegląd Statystyczny*, 4.
- [7] Kolenda M., (2006), *Taksonomia numeryczna. Klasyfikacja, porządkowanie i analiza obiektów wielocechowych*. Wrocław, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu.
- [8] Kukuła, K., (2000), *Metoda unitaryzacji zerowanej*. Warszawa, PWN.
- [9] Łuniewska M., Tarczyński W., (2006), *Metody wielowymiarowej analizy porównawczej*. Warszawa, PWN 2006.
- [10] Młodak A., (2006), *Analiza taksonomiczna w statystyce regionalnej*. Warszawa, Difin.
- [11] Nermend K., Borawski M., (2006), Using Average-Variance Number System in Calculation of a Synthetic Development Measure, *Polish Journal of Environmental Studies*, 15 (4C), 127–130.
- [12] Nermend K., (2006a), A Synthetic Measure of Sea Environment Pollution, *Polish Journal of Environmental Studies*, 15 (4b), 127–129.
- [13] Nermend K., (2006b), Using Average-Variance Representation in Economic Analyses, *Polish Journal of Environmental Studies*, 15 (4C), 123–126.
- [14] Nermend K., (2007), Taxonomic Vector Measure of Region Development (TWMRR), *Polish Journal of Environmental Studies*, 16 (4A), 195–198.
- [15] Nermend K., (2008a), Employing Similarity Measures to Examine the Development of Technical Infrastructure in Polish Counties, *Folia Oeconomica Stetinensia*, 15 (7), 87–97.
- [16] Nermend K., (2008b), Zastosowanie rzutu wektora do budowy miernika syntetycznego, *Przegląd Statystyczny*, 55 (3), 10–21.
- [17] Nermend K., (2008c), *Rachunek wektorowy w analizie rozwoju regionalnego*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin.
- [18] Nermend K., (2009), *Vector Calculus in Regional Development Analysis*, Series: Contributions to Economics, Springer.
- [19] Sobczyk M., (1983), Analiza porównawcza produkcji rolniczej w województwie lubelskim, *Wiadomości Statystyczne*, 2.
- [20] Social Watch, Social Watch Annual Report 2010: Time for a new deal after the fall, Montevideo, 2010, <http://www.socialwatch.org/sites/default/files/Social-Watch-Report-2010.pdf>.
- [21] United Nations Development Programme, Human Development Report, New York, Oxford University Press, 2010, <http://hdr.undp.org/en/reports/global/hdr2010/>
- [22] World Bank, Making a difference for entrepreneurs, 2010,
- [23] <http://www.doingbusiness.org/reports/doing-business/doing-business-2011>.
- [24] World Economic Forum, Global Competitiveness Report 2010–2011,
- [25] http://www3.weforum.org/docs/WEF_GlobalCompetitivenessReport_2010-11.pdf.

BADANIE JEDNORODNOŚCI PRZESTRZENNEJ I CZASOWEJ ROZWOJU OBIEKTÓW SPOŁECZNO-GOSPODARCZYCH

Streszczenie

W artykule przedstawiono zastosowanie arytmetyki przyrostów w konstrukcji wektorowej miary syntetycznej do badania jednorodności czasowej i przestrzennej regionów. W konstrukcji miernika zastosowano parę uporządkowaną: przyrost wartości średniej, przyrost odchylenia standardowego. Dzięki temu uzyskano dla każdej wartości miary dodatkową informację mówiącą o jednorodności regionów. W artykule przedstawiono przykład konstrukcji wektorowej miary syntetycznej do stworzenia rankingu polskich województw według przestrzennej jednorodności na bazie danych uzyskanych z powiatów będących częściami województw.

Słowa kluczowe: Wektorowa miara syntetyczna, miara syntetyczna, taksonomia, rachunek wektorowy, arytmetyka przyrostów, badania regionalne, jednorodność regionów, metody porządkowania liniowego

STUDY OF SPATIAL AND TEMPORAL UNIFORMITY OF SOCIOECONOMIC OBJECTS DEVELOPMENT

Abstract

The article presents the method for constructing synthetic vector measure which allows to determine the effect of indicators' variability on the result of ranking. The measure is composed of an ordered pair of mean value increment and standard deviation increment. As a consequence, additional information that allows to determine how the rank of a given object might change may be gathered. An example of constructing synthetic vector measure for creating a ranking of Polish voivodships in terms of spatial uniformity based on data obtained from counties being parts of those voivodships is presented.

Keywords: Vectoral synthetic measure, synthetic measure, taxonomy, vector calculus, arithmetic of increments, image processing, regional analysis, linear ordering methods

POLSCY STATYSTYCY I MATEMATYCY

Prof. dr hab. Władysław Welfe

UCZONY, NAUCZYCIEL, ORGANIZATOR



*Prof. dr hab. Władysław Welfe (1927–2013)
Członek Korespondent Polskiej Akademii Nauk*

Urodzony 27.05.1927 r. w Kolbuszowej w 1934 r. z rodzicami przybył do Łodzi. Tam też w roku 1945 ukończył gimnazjum i rozpoczął w tym samym roku studia na Wydziale Prawno-Ekonomicznym. Studiując najpierw oba kierunki, po drugim roku skoncentrował się na kierunku „Ekonomia”, który skończył w roku 1949. Traumatyczne doświadczenia z późnego dzieciństwa (śmierć ojca w 1940 roku w Katyniu) kształtują w nim silny charakter, wolę działania i przyspieszają dojrzałość jego osobowości. Zarówno w czasie wojny, jak i bezpośrednio po jej zakończeniu zmuszony jest do pracy zarobkowej najpierw w zawodach fizycznych, a następnie administracji w przedsiębiorstwach przemysłu włókienniczego. Życie zmusza Go do uznawania zasady *primum agere*. Wyznawanie jej pomogło Mu w zdobyciu sławy skutecznego szefa, nauczyciela, organizatora administracji (najpierw w przedsiębiorstwach a później na UŁ i SAN – Społeczna Akademia Nauk), nauczyciela akademickiego i uczonego.

Profesor Władysław Welfe – należał do szczególnie zasłużonych pracowników Uniwersytetu Łódzkiego. Dzięki osobistej energii, zdolnościom, imperatywowi działania odcisnął wyraźne ślady działalności naukowej, organizacyjnej, dydaktycznej najpierw w Wyższej Szkole Ekonomicznej w Łodzi, a następnie (po jej przyłączeniu do Uniwersytetu Łódzkiego) – zarówno na Wydziale Ekonomiczno-Socjologicznym UŁ, jak i w całym UŁ. Znając bardzo dobrze język rosyjski, angielski, niemiecki i francuski, przyczynił się w dużym stopniu do nawiązania szerokiej wymiany naukowej z zagranicą. Lubił być widoczny w działalności organizacyjnej i działalności naukowej. Prężność i skuteczność w tych formach działalności zawdzięczał znakomitej pamięci do ludzi, faktów i liczb, opanowaniu podstaw nauk prawnych oraz pełnym studiom ekonomicznym.

W różnych okresach życia struktura form intensywności W. Welfe była różna. Były długie okresy przewagi działalności organizacyjnej nad naukową, nawet wówczas nie przerywające intensywnej działalności badawczej.

We wszystkich formach działalności Prof. W. Welfe był zwolennikiem działalności zespołowej – zarówno w obrębie Instytutu, którym kierował, jak też innych instytucji Polski i zagranicy.

Dzięki organizacyjno-naukowej kooperacji osiągnął znaczące wyniki w zakresie zarówno organizacji szeroko pojętej nauki jak i nauk ekonomicznych w szczególności.

Dorobek naukowy Prof. W. Welfe jest imponujący zarówno co do liczby publikacji, opracowań, referatów, recenzji jak i co do szerokości zainteresowań. Zawdzięcza go własnej inicjatywie, ale szczególnie umiejętnemu tworzeniu i kierowaniu zespołami badawczymi. Szczególnie wydajnym naukowo był i jest Zespół Modeli Gospodarki Narodowej.

Analizę dorobku przeprowadzimy w podziale na kilka okresów.

W dorobku z okresu 1948–1968 widoczna jest przewaga prac z zakresu statystyki ekonomicznej i ekonomii. Podsumowanie badań z tych zakresów stanowią trzy książki. Pierwsza to „Statystyka handlu” (opublikowana przez PWG w roku 1957) zawiera omówienie nie tylko ówczesnych problemów podręcznikowych z gromadze-

nia i analizy danych, ale także umiejętność nawiązywanie do efektów takich analiz dla badań ekonomicznych.

Jeszcze głębszą analizę takich związków można znaleźć w bardzo ważnej monografii „Indeksy produkcji” (wydanej przez PWE w roku 1966), w której autor ściśle wiąże wiedzę ze statystyki ekonomicznej z ekonomią.

W monografii „Popyt i podaż” wydanej przez PWE w 1962 r. autor podsumowuje swoje ówczesne poglądy nt. ekonomii strony popytowej i podażowej oparte na analizie wybranych publikacji z zakresu ekonomii. Lata poświęcone omawianej tematyce zaowocowały w łatwej adaptacji badawczej problemów z dziedziny ekonometrii i ekonomii stosowanej uprawianych przez Prof. W. Welfe do ostatnich dni.

W latach 1969–1980 w badaniach Prof. W. Welfe występują dwa nurty. Rośnie systematycznie zainteresowanie i mobilizacja naukowa w budowie ekonometrycznych modeli gospodarki narodowej i równocześnie sporo czasu i uwagi poświęca On badaniom użyteczności praktycznej ekonometrycznych modeli rynków. W efekcie kierowania badaniami swego zespołu naukowego powstaje 3 tomowa wieloautorska monografia pt.: „Ekonometryczne modele rynku”, której ramy wyznaczył i tekst zaakceptował Prof. W. Welfe.

W monografii tej znajduje się podsumowanie stanu wiedzy z zakresu metod ekonometrii opisowej (T.1), modeli konsumpcji (T. 2) oraz badań równowagi polskich rynków (T. 3) wraz z komentarzami o perspektywach rozwoju metod i modeli ekonometrii stosowanej nie tylko w Polsce.

W tym okresie przełomową pracą Prof. W. Welfe jest referat pt. „A Medium-Term Econometric Model of the Polish Economy” wygłoszony w trakcie ESEM-1973 w Oslo, opublikowany w „Pracach Instytutu Ekonometrii i Statystyki UŁ” nr 8, Łódź 1973 r.

W pracy tej po raz pierwszy zaproponowano pewien średniookresowy model ekonometryczny polskiej gospodarki planowej. Nie był to pierwszy ekonometryczny model gospodarki polskiej, gdyż wcześniej, w latach 60’ XX w., grupa badawcza Prof. Z. Pawłowskiego i Prof. A. Barczaka z Akademii Ekonomicznej w Katowicach zaproponowała empiryczny model akcentujący inne strony funkcjonowania polskiej gospodarki tego okresu.

Zaistnienie w Polsce w latach 70.–80. XX. w. problemów resortowych i centralnych i niezwykle aktywne włączenie się Prof. W. Welfe w organizowanie zespołów badawczych w UŁ i kraju umożliwiło Mu osiągnięcie stosunkowo szybko – liderkiej roli w budowie empirycznych modeli polskiej gospodarki. W 1975 r. powstał pierwszy udoskonalony model W1 z rodziny modeli W. W referatach na kolejnych konferencjach międzynarodowych (najczęściej współautorskich) prezentowane są prognostyczno-symulacyjne własności różnych wersji modeli W1-W3 oraz modeli zintegrowanych typu I-O-S. Do nowych problemów – dla polskiej gospodarki szczególnie ważnych w latach 70. i 80. XX. w., które podejmuje Prof. W. Welfe i jego Zespół Modelowania Gospodarki Narodowej należą problemy nierównowagi. Niestety w układach socjalistycznych gospodarek planowanych, w których pieniądź i ceny nie

pełniły swych normalnych funkcji znanych z gospodarek rynkowych, próby modelowania gospodarki napotykały na szereg barier teoretycznych, metodologicznych i informacyjnych.

Z prób tych Prof. W. Welfe i jego zespół wychodzą często zadowolająco, mimo sporych ograniczeń sprzętowych w stosunku do wymogów rozrastających się co do skali (liczby równań) modeli z serii W.

W okresie 1981–1989 powstają różne wersje modeli W4-W5 polskiej gospodarki uwzględniające ciągle aktualizowane specyfikacje. Zorientowane one są na wykrywanie stopnia nierównowagi rynków i gospodarki, analizowanie ograniczeń wzrostu gospodarki planowej i wymykającej się spod kontroli władz inflacji cen. Również w tym okresie sporym zainteresowaniem badawczym cieszą się w ZMGN problemy modeli zintegrowanych I-O-S.

Zarówno w latach 70', jak i w latach 80' kontakty Prof. W. Welfe (w szczególności) jak i niektórych członków ZMGN (np. J. Sztaudyngera, J. Gajdy) z grupą LINK – prof. L. Kleina są niezwykle intensywne. Owocują one we wspólnych publikacjach i projektach badawczych i rosnących kontaktach naukowych z ekonomistami-ekonometrykami z Francji, Niemiec, Szwecji (szczególnie z Uppsali), krajów RWPG.

W latach 1990–2012 sytuacja badawcza zasadniczo zmieniła się z uwagi na przekształcenia polskiej gospodarki planowej w gospodarkę rynkową. Przywrócone zostały normalne funkcje cen, pieniądza, instytucji gospodarki rynkowej.

W oczywisty sposób Prof. W. Welfe i uczestnicy badań z ZMGN zaczynają korzystać nie tylko z doświadczeń grupy LINK – L. Kleina, ale i całej światowej literatury ekonomicznej. Prócz wielkiej liczby prac badawczych pisanych w ramach projektów KBN, LINK, ACE z inicjatywy Prof. W. Welfe, co roku powstaje wiele referatów i artykułów publikowanych w Polsce i za granicą. Wiodącym tematem są modele transformującej się gospodarki polskiej i ich prognostyczno-symulacyjne wykorzystanie.

Gros prac dotyczy analizy polskich problemów bezrobocia, inflacji, nierównowagi gospodarczej, wzrostu gospodarczego. W pracach tych widać duży wpływ współczesnych modeli wzrostu (m.in. modelu Mankiwa-Romera-Weila) oraz pewne wpływy myśli keynesowskiej.

W wielu pracach (jeśli nie w większości) przebiega pragmatyczne dążenie Prof. W. Welfe do pokazania zastosowań wyników modelowego prognozowania i symulacji przy formułowaniu scenariuszy polityk gospodarczych. Dążenie to w paradygmacie liberalnej gospodarki rynkowej nie ma tylu możliwości pokazania swej okazałości co w gospodarce rynkowo-planowej z przewagą rynkowości. Niezależność ustawowa polityki NBP z celem inflacyjnym i kurczące się sfery oddziaływań polityki polskiego rządu (z uwagi na stopień sprywatyzowania gospodarki i integrację z gospodarką UE) zmniejszają możliwości pokazania użyteczności modeli dla celów polityk. Nie zmniejsza to jednak ostrzegawczo – scenariuszowo – decyzyjnej roli tworzonych modeli z rodziny W, jak i modeli tworzonych przez nie – łódzkie grupy prognostyczne.

Podsumowanie doświadczeń w zakresie modelowania ekonometrycznego stanowią następujące książki:

„Ekonometryczne modele gospodarki narodowej Polski” (PWE – 1992),
„Ekonometria stosowana” PWE – 1996 (współautor A. Welfe),
„Principles of macroeconomic modeling”, North-Holland – 1999) (współautorzy L. Klein, A. Welfe),
„Ekonometryczny model wzrostu gospodarczego” (red. W. Welfe Wyd. UŁ 2001),
„Macroeconometric Models”, Springer, 2013.

W latach 2000–2004 powstaje nowa rodzina modeli W8. W modelach tych uwzględnia się idee endogenicznego postępu technicznego i własne pomiary kapitału ludzkiego oraz szeroko wykorzystuje się idee statystycznej kointegracji badanych procesów.

Podsumowanie życiowego dorobku w zakresie modelowania ekonometrycznego w skali makromodelowania, szczególnie gospodarki polskiej, stanowi ostatnia monografia z 2013 r. wydana przez Wydawnictwo Springer. O modelach makroekonometrycznych z perspektywy ich budowy, zastosowań w skali makro oraz powiązań tych modeli z teorią ekonomii.

Podsumowując niezwykle bogaty dorobek naukowy należy mocno podkreślić jego oryginalność, zespołowość tworzenia i stworzenie jednego z nurtów łódzkiej szkoły badań ekonomicznych. Prof. W. Welfe opublikował 68 autorskich lub współautorskich monografii i napisał ponad 300 artykułów (autorskich lub współautorskich) i jeszcze więcej referatów na krajowe i zagraniczne konferencje.

Do ważnych osiągnięć należą m.in.

- weryfikacje teorii J. Kornaia i M. Kaleckiego barier wzrostu,
- weryfikacja idei podażowego mnożnika konsumpcji Barro-Grossmana,
- pomiar nierównowagi rynków,
- hipotezy o specyfice form zależności gospodarek przejścia systemowego,
- systematyczne prognozy według modelu WK, W8, W10 w horyzontach średnio i krótkookresowych.

W oczywisty sposób rola Prof. W. Welfe została zauważona i dała podstawę do jego wykładów na wielu uniwersytetach w kraju i za granicą, a także uzyskania tytułu doktora honoris-causa w Uppsali, Lyonie, Krakowie i Łodzi oraz tytułu członka korespondenta PAN i UAN (Ukraińska Akademia Nauk).

Profesor Władysław Welfe działalność naukowo-dydaktyczną rozpoczął w roku 1948 jako asystent – wolontariusz Katedry Statystyki Uniwersytetu Łódzkiego.

W latach 1949–1961 pracuje w Katedrze Statystyki Wyższej Szkoły Ekonomicznej w Łodzi, a po połączeniu tej uczelni z Uniwersytetem Łódzkim w latach 1961–1964 jest zatrudniony w Katedrze Demografii i Statystyki UŁ, kierowanej wówczas przez prof. E. Rosseta.

Późniejszy doktor honoris causa UŁ – doktoryzuje się i habilituje w Szkole Głównej Planowania i Statystyki w Warszawie odpowiednio w latach: 1961 (doktorat pod kierunkiem prof. K. Romaniuka) i 1964 (habilitacja). Praca doktorska i habilitacyjna

dotyczy szeroko pojętej tematyki statystyki ekonomicznej, w szczególności analizy własności statystycznych indeksów.

Od 1965 r. do 1996 sprawnie pełni funkcję kierownika – najpierw Zakładu, a później Katedry Ekonometrii. W latach 1970–1997 dynamicznie sprawuje funkcję Dyrektora Instytutu Ekonometrii i Statystyki UŁ.

W latach 1957–1958 skutecznie pełni funkcję Dziekana Wydziału Handlu WSE w Łodzi, w latach 1958–1960 – Dziekana Wydziału Handlowo-Towaroznawczego tejże WSE, natomiast w okresie 1965–1966 Prodziekana Wydziału Ekonomiczno-Socjologicznego UŁ, 1966–1969 Dziekana Wydziału Ekonomiczno-Socjologicznego UŁ, a w latach 1972–1978 funkcję Prrektora ds. Nauki UŁ.

Pełnione funkcje oraz głęboki osobisty ogłód organizacji i kierunków studiów w m.in. Wielkiej Brytanii, Związku Radzieckim, USA nabyty podczas długookresowych stażów naukowych, a także świetna znajomość ilościowych dyscyplin naukowych wspomagających nauki ekonomiczne z drugiej strony – zapewne wpłynęły na stworzenie właściwej początkowo formy kierunku „Ekonometria”, później „Cybernetyki ekonomicznej i informatyki”, a od 1992 r. „Informatyki i ekonometrii”.

Prof. W. Welfe dzielił swe zainteresowania naukowe i dydaktyczne między ekonometrię i statystykę. Początkowo więcej czasu poświęcał statystyce a później ekonometrii i ekonomii stosowanej.

Rzetelnie prowadzone wykłady w Polsce i za granicą dotyczyły ekonometrii, ekonometrii stosowanej, statystyki, ekonometrycznego modelowania gospodarki narodowej, przepływów międzygałęziowych.

Był promotorem ponad 150 prac magisterskich, 37 rozpraw doktorskich, opiekunem 15 rozpraw habilitacyjnych, a także tytułów doktora honoris causa UŁ (akademika A. G. Aganbegjana, noblisty L. Kleina). Pełnił też rolę recenzenta wielu wniosków habilitacyjnych i tytułów profesorskich.

Pełniąc bez wysiłku funkcje administracyjne, podejmował się pełnienia równolegle bardzo wpływowych funkcji reprezentacyjnych i wykonawczych w ramach zmieniających się w czasie struktur finansowania nauki polskiej (przewodniczącego zespołów tematycznych problemów resortowych, problemów centralnych, a w latach 90. – projektów KBN. Za granicą od 1967 roku jest członkiem reprezentantem grupy LINK L. Kleina z USA prognozującej zachowanie ważnych – z punktu widzenia tej grupy – gospodarek.

Od 1974 r. był głównym organizatorem cyklu międzynarodowych konferencji MACROMODELS organizowanej przez Instytut Ekonometrii i Statystyki, które w latach 70. i 80. stanowiły ważne forum dyskusji naukowych między naukowcami Zachodu i RWPG.

Prof. W. Welfe uczestniczył w pracach Econometric Society (reprezentant Towarzystwa na Polskę do roku 1993), Applied Econometric Association, European Economic Association, Association for Modelling and Forecasting Economies in Transition (AMFET; członek założyciel i pierwszy prezydent tego towarzystwa), Komitetu Statystyki i Ekonometrii PAN (członek Prezydium, z-ca przewodniczącego,

przewodniczący), Komitetu Ekonomicznego PAN, Komitetu Nagród Państwowych, KBN (1994–2000 jako przewodniczący Zespołu Nauk Prawnych i Ekonomicznych), Fundacji Nauki Polskiej (od 1995 r.), Rady Naukowej ZBSE GUS i PAN, Naukowej Rady Statystycznej GUS (z-ca przewodniczącego), Rady Głównej Szkolnictwa Wyższego (2 kadencje), CKK ds. Kadr Naukowych (z-ca przewodniczącego Sekcji Ekonomicznej), członek Rady Naukowej przy Prezydencie m. Łodzi (wieloletni przewodniczący), ŁTN (przewodniczący Zarządu Wydziału II Nauk Społecznych), Komitetu Redakcyjnego „Studiów Prawno-Ekonomicznych” (redaktor naczelny), „Wiadomości Statystycznych” (redaktor naczelny), rad redakcyjnych „Przeglądu Statystycznego”, „Argumenta Oeconomica”, oraz „Badań Operacyjnych i Decyzji”.

Profesor W. Welfe wielokrotnie był wyróżniany nagrodami: Zarządu Głównego PTE (1963), im O. Langego (1970), wpisem do Księgi Czynów i Osiągnięć Nauki Polskiej (1973), Nagrodą Miasta Łodzi (1977), ŁTN i Sekretarza Wydziału I PAN (1993), a także nagrodami resortowymi i uczelnianymi.

Efekty działalności organizacyjno-dydaktycznej Prof. W. Welfe zostały uhonorowane wieloma odznaczeniami, tj. m.in. Krzyżem Komandorskim z Gwiazdą Orderu Odrodzenia Polski (2001), Złotym Krzyżem Zasługi (1959), Złotą Odznaką UŁ (1971), Krzyżem Kawalerskim (1972), Krzyżem Oficerskim (1980), Krzyżem Komandorskim OOP (1990), Medalem Komisji Edukacji Narodowej (1973), medalem „Uniwersytet Łódzki w Służbie Społeczeństwa i Nauki” (1975), Zasłużony Nauczyciel PRL (1978).

Przedstawiony zarys osiągnięć Profesora W. Welfe jako, uczonego, nauczyciela, szefa i organizatora ilustruje jak wielką rolę odgrywał na gruncie dyscyplin wiedzy, które uprawiał, a także ile swej energii poświęcał dla ożywienia działalności naukowo-badawczej i edukacyjnej w Polsce. Powtórzenie tych osiągnięć w środowisku statystyków i ekonometryków będzie bardzo trudne.

Władysław Milo – Uniwersytet Łódzki

JAN MIELNICZUK

WKŁAD POLAKÓW W ROZWÓJ STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ I STOSOWANEJ PO DRUGIEJ WOJNIE ŚWIATOWEJ

W artykule¹ omówię wkład Polaków pracujących na uniwersytetach, uczelniach technicznych i instytutach badawczych w rozwój statystyki matematycznej i stosowanej po roku 1945. Obejmuje on działania tych statystyków, którzy studiowali w Polsce i byli związani z nią w początkach swojej kariery naukowej. Czas powojenny został podzielony przeze mnie na trzy okresy: lata 1945–1970, 1970–1990 i okres po roku 1990 do dziś. W tym miejscu nie dyskutujemy wkładu najwybitniejszego polskiego statystyka, Jerzego Neymana, będącego tematem innych opracowań (por. Klonecki i Zonn, 1973; Klonecki, 1995 i Ledwina, 2012). Osiągnięcia polskich statystyków w biometrii przedstawiono w Caliński (2012).

LATA 1945–1970

Przy omawianiu wkładu Polaków do statystyki światowej warto zdać sobie sprawę z kondycji polskiej statystyki bezpośrednio po wojnie. Została ona trafnie opisana przez Jana Oderfelda: „*W statystyce matematycznej sytuacja jest wyjątkowo krytyczna. Tę gałąź nauki uprawiało przed 1939 rokiem bardzo niewiele specjalistów, z których po 1945 r. pozostała w kraju jedynie garstka.*”. Ze znanych stochastyków, którzy przeżyli wojnę, poza Polską pozostawali m.in. Jerzy Neyman, Stanisław Ulam, Marek Kac, Zygmunt Birnbaum (w USA) oraz Zbigniew Łomnicki i Stanisław Krystyn Zaremba (w Wielkiej Brytanii). Szczęśliwie byli matematycy biorący udział w organizacyjnym odtwarzaniu działalności polskiej matematyki po wojnie, tacy jak Edward Marczewski i Hugo Steinhaus, którzy rozumieli konieczność rozwijania zastosowań i statystyki. Działania organizacyjne i naukowe w tym kierunku zostały podjęte przede wszystkim we Wrocławiu i Warszawie, w nowo powstałych instytucjach: Uniwersytecie Wrocławskim i Politechnice Wrocławskiej oraz w Państwowym

¹ Artykuł jest zmodyfikowaną wersją wykładu wygłoszonego na Kongresie Statystyki Polskiej z okazji jubileuszu 100-lecia PTS, Poznań, kwiecień 2012.

Adres autora: Instytut Podstaw Informatyki PAN, Jana Kazimierza 5, 01-248 Warszawa, e-mail: miel@ipipan.waw.pl

Instytucie Matematycznym przekształconym wkrótce w Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk z oddziałami w Warszawie i Wrocławiu. W IM PAN zostaje utworzony Wydział Zastosowań Matematyki, którego Sekcja Aktuarialna przekształca się w Sekcję Statystyki Matematycznej (jej pierwszym kierownikiem był O. Lange). Powstają pisma: *Zastosowania Matematyki* (w 1953 roku) i *Listy Biometryczne* (w roku 1964). Głównymi animatorami rozwoju statystyki w tych instytucjach byli, we Wrocławiu: Hugo Steinhaus, Julian Perkal, Stefan Zubrzycki, Stanisław Trybuła, Józef Łukasiewicz i Bolesław Kopociński, a w Warszawie: Jan Oderfeld, Marek Fiszer, Wiesław Sadowski, Oskar Lange i Mieczysław Warmus (który przeniósł się z Wrocławia do Warszawy w 1958 roku).

Centralną postacią i głównym animatorem rozwoju zastosowań matematyki i statystyki w pierwszym okresie powojennym był Hugo Steinhaus (1887–1972), pracujący na Uniwersytecie Wrocławskim i Instytucie Matematycznym PAN. Ten światowej renomy matematyk, współtwórca lwowskiej szkoły analizy funkcjonalnej, po wojnie, w wieku lat ponad pięćdziesięciu (w roku 1945 miał 57 lat) skupił się głównie na zastosowaniach matematyki i statystyce i robił to z wielkim talentem i zaangażowaniem. Jest on jednym z twórców (wspólnie z K. Florkiem, J. Łukasiewiczem, J. Perkalem i S. Zubrzyckim) tzw. taksonomii wrocławskiej, będącej zbiorem metod analizy danych opartych na konstrukcji najkrótszego dendrytu łączącego wszystkie punkty zbioru skończonego. Dendryt ten okazał się doskonałym narzędziem wizualizacji zbioru obiektów, odległości między którymi nie muszą być konieczne odległościami euklidesowymi i zadane są przez macierz ogólnie zdefiniowanych podobieństw. Metoda najkrótszego dendrytu jest dotąd stosowana przez praktyków wszędzie tam, gdzie istotne są metody grupowania obiektów i cech, m.in. w biologii, antropologii i astronomii. Steinhaus był również autorem nowatorskich prac dotyczących dochodzenia ojcostwa na podstawie pomiarów serologicznych i twórcą (wraz z J. Oderfeldem i K. Wiśniewskim) pierwszych polskich norm statystycznych dotyczących kontroli jakości. Prowadził też badania teoretyczne dotyczące bayesowskich estymatorów prawdopodobieństwa sukcesu i opublikował w 1957 roku na ten temat pracę *The problem of estimation* (Steinhaus, 1957). Był to pierwszy po wojnie artykuł w *Annals of Mathematical Statistics*, którego autorem był statystyk pracujący w Polsce. Ogromne znaczenie miały zainicjowane przez Steinhausza działania organizacyjne: założenie, przy współpracy Jana Oderfelda, pisma *Zastosowania Matematyki*, którego był pierwszym redaktorem naczelnym oraz zainicjowanie działalności i prowadzenie wtorkowego seminarium zastosowań matematyki w IM PAN we Wrocławiu. Może warto w tym miejscu przytoczyć zdania z artykułu wstępnego otwierającego pierwszy tom *Zastosowań Matematyki*, aby zdać sobie sprawę, jak bardzo poglądy i zamierzenia redaktorów pisma nie straciły dzisiaj na aktualności: *„Będziemy unikali artykułów, w których subtelność matematyczna jest celem samym w sobie, a mózół autora i czytelnika przewyższa korzyść poznawczą i praktyczną. Zastrzegamy sobie jednak ogłaszanie rezultatów, które nie służą bezpośrednio żadnej nauce poza samą matematyką, ale pośrednio służą im wszystkim naraz, przez to, że wyświetlają kwestie*

zasadnicze i przyczyniają się do właściwego rozumienia matematyki i jej roli w kulturze i cywilizacji współczesnej.”.

Przedstawicielem następnego pokolenia polskich statystyków był Julian Perkal (1913–1965) (związany w różnych okresach życia z Uniwersytetem i Politechniką Wrocławską, Instytutem Matematycznym PAN i Wyższą Szkołą Rolniczą we Wrocławiu), wykształcony przed wojną matematyk (stopień magistra filozofii uzyskał w 1937 roku), który podobnie jak Steinhaus miał niezwykle szerokie zainteresowania i talent do zastosowań (por. Łukaszewicz (1967)). Najwięcej prac poświęcił analizie taksonomicznej i dyskryminacyjnej. Do jego najbardziej trwałych osiągnięć, obok udziału w stworzeniu taksonomii wrocławskiej należała koncepcja wskaźników Perkala, pozwalających stwierdzić, która z cech opisujących obiekt najbardziej wyróżnia go na tle innych obiektów. Bardzo ciekawą koncepcją zaproponowaną przez Perkala była konstrukcja nomogramów noszących dziś jego imię, stosowanych w ocenie rozwoju dzieci i będących ważną alternatywą dla powszechnie stosowanych nomogramów wzrostu i wagi dzieci. Julian Perkal był założycielem Polskiego Towarzystwa Biometrycznego (w 1961 roku) i pisma Listy Biometryczne (obecnie Biometrical Letters). Jego przedwczesna śmierć w wieku 53 lat znacznie osłabiła środowisko polskich statystyków, podobnie jak nagły zgon Stefana Zubrzyckiego, najzdolniejszego wrocławskiego ucznia Steinhaus (Stefan Zubrzycki zmarł w 1968 roku w wieku 41 lat).

Stefan Zubrzycki, związany z Uniwersytetem Wrocławskim i IM PAN był prekursorem badań dotyczących statystyki przestrzennej i opublikował na ten temat cykl znakomitych prac. Badania te motywowane potrzebami kopalnictwa w Polsce związane były z modelowaniem zasobności złóż $y(p)$ jako procesu losowego obserwowanego w pewnych punktach badanego obszaru D . Prace Zubrzyckiego dotyczyły między innymi problemu estymacji całkowitych zasobów złóż $V(D) = \iint_D y(p) dp$, w tym efektywności estymatorów liniowych tego parametru dla ustalonych punktów próbkowania $p_1, \dots, p_n$, problemu estymacji funkcji kowariancji dla obserwacji obciążonych błędami losowymi oraz wpływu kształtu regularnych sieci próbkowania na efektywność estymatora średniej $\bar{Y}$ zasobów $V(D)$. Reprezentatywnymi pracami Zubrzyckiego dotyczącymi tych zagadnień są Zubrzycki (1957) i wspólna praca z Daleniusem i Hájkiem, Dalenius *et al.* (1961) (por. również bibliografię prac w Kopociński i Łukaszewicz, 1971). Podobnie jak Steinhaus i Perkal, Zubrzycki był niezwykle wszechstronnym badaczem i zajmował się również m.in. problemami kontroli jakości, oceny liczebności populacji i wykorzystaniem metod statystycznych w genetyce i astronomii. Napisał popularny podręcznik z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej (Zubrzycki, 1966).

Prace Stanisława Trybuły (1932–2008) (IM PAN, PWR) są istotnym wkładem w teorię estymacji minimaksowej i estymacji sekwencyjnej dla procesów stochastycznych oraz w teorię sterowania (por. Trybuła, 1958). Badania w zakresie statystyki kontynuowane są przez jego uczniów (R. Różański, R. Magiera, M. Wilczyński).

Z grupy statystyków warszawskich najtrwalszymi osiągnięciami z tego okresu są osiągnięcia Marka Fisa (1910–1963), pracującego w Polsce na Uniwersytecie

Warszawskim i IM PAN do 1960 roku. Do prekursorskich prac należą jego prace o rozkładach asymptotycznych pewnych nieparametrycznych statystyk testowych przy wykorzystaniu aparatu słabej zbieżności miar określonych na przestrzeniach metrycznych. Ta tematyka była rozwijana przez R. Bartoszyńskiego, promotorem pracy doktorskiej którego był właśnie Fisz. Był on również autorem doskonałego podręcznika z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki, trzykrotnie wydanego w języku angielskim (Fisz, 1954).

Działalność Jana Oderfelda była ściśle związana z zastosowaniami matematyki i statystyki, przede wszystkim ze statystyczną kontrolą jakości. Warto wspomnieć tu o głównym nurcie działalności naukowej Oderfelda: był on znakomitym konstruktorem, przede wszystkim silników lotniczych, ale również pamięci zewnętrznych do maszyn matematycznych (jak kiedyś określano komputery). Z kolei, prace W. Sadowskiego (por. np. Łukaszewicz i Sadowski, 1960) i O. Langego dotyczyły przede wszystkim problemów statystycznych motywowanych lub związanych z problemami ekonomicznymi i ekonometrycznymi.

Mieczysław Warmus (1918–2007), pierwszy dyrektor powstałego w roku 1961 Centrum Obliczeniowego PAN, był jednym z prekursorów rozwoju metod statystyki obliczeniowej w Polsce. Prowadził również intensywną współpracę z lekarzami, dotyczącą m.in. modelowania i analizy statystycznej danych cukrzycowych i kardiologicznych. Jak można zorientować się nawet z tego krótkiego opisu, rozwój statystyki w pierwszym okresie powojennym dotyczył przede wszystkim statystyki stosowanej, a zagadnienia, które badano, były związane z potrzebami odbudowującej się gospodarki. Wyniki teoretyczne były nieliczne, ale za to znakomite (Fisz, Steinhaus, Trybuła, Zubrzycki).

LATA 1970–1990

Początek lat siedemdziesiątych ubiegłego stulecia przyniósł nowe działania organizacyjne mające ogromne znaczenie dla rozwoju statystyki polskiej. W 1972 roku powołano Komisję do spraw rozwoju Statystyki Matematycznej przy Komitecie Nauk Matematycznych PAN (jej pierwszym przewodniczącym był J. Łukaszewicz), rozpoczęto kształcenie statystyków na otwartych studiach doktoranckich przy IM PAN (Wrocław) i Uniwersytecie Wrocławskim (inicjatorami tych działań byli W. Klonecki i J. Łukaszewicz) oraz zaczęto organizować coroczne konferencje ze statystyki matematycznej (większość z nich odbyła się w Wiśle, pierwsza miała miejsce w 1973 roku, w roku 2012 odbyła się trzydziesta ósma jej edycja). W 1980 roku zaczyna wychodzić we Wrocławiu pismo *Probability and Mathematical Statistics* założone przez K. Urbanika, Cz. Rylla-Nardzewskiego i W. Kloneckiego. Większość statystyków, którzy byli uczestnikami wspomnianego studium doktoranckiego, wniosła znaczący wkład w rozwój statystyki światowej (T. Bednarski, S. Gnot, A. Kozek, T. Ledwina, M. Musiela, Cz. Stepniak, R. Zmyślony i S. Zontek). Do intensywnie rozwijanych

kierunków badań teoretycznych w statystyce matematycznej należały m.in.: analiza wielowymiarowa, przede wszystkim teoria modeli liniowych, teoria testowania hipotez statystycznych, metody statystycznej teorii decyzji, nieparametryczna estymacja krzywych, metody sekwencyjne i pomiar siły zależności stochastycznej. W wyborze kierunków badań podążano za najbardziej rozwijanymi w tym czasie kierunkami światowymi.

W. Klonecki zainicjował we Wrocławiu badania teoretyczne dotyczące tematyki modeli liniowych, która była równolegle intensywnie uprawiana w innych ośrodkach naukowych, przede wszystkim w Poznaniu i Lublinie. Rozwijano głównie teorię estymacji i testowania w modelach liniowych o różnorodnych strukturach macierzy kowariancji, w szczególności wnioskowanie o komponentach wariancyjnych, teorię planowania eksperymentu, w tym teorie układów blokowych, badano porządki stochastyczne związane z estymacją w modelach liniowych oraz stosowano wypracowane metody w konkretnych zagadnieniach biometrycznych. Rozwijano również metody statystycznej analizy wielowymiarowej, w tym analizy dyskryminacyjnej i analizy skupień. Główne postaci, dookoła których koncentrowały się powyższe badania, to: Jerzy Baksalary (1944–2005), Tadeusz Caliński, Bronisław Ceranka, Stanisław Gnot (1946–2002), Radosław Kala, Krystyna Katulska, Witold Klonecki (1930–2012), Mirosław Krzyśko, Wiktor Oktaba (1920–2009), Czesław Stępniaś, Roman Zmysłony i Stefan Zontek. Warto wymienić kilka reprezentatywnych prac dla tego kierunku badań (modele liniowe): Zmysłony (1980), Gnot (1983), Gnot *et al.* (1985) (praca z J. Kleffe i R. Zmysłonym), Baksalary i Kala (1981), Stępniaś *et al.* (1984) (praca z S. Wongiem i J. Wu), Farrell *et al.* (1984) (praca z W. Kloneckim i S. Zontkiem), Krzyśko (1983) (analiza dyskryminacyjna) i Caliński i Harabasz (1974) (analiza skupień). „Liniowcy” prowadzili intensywną współpracę międzynarodową, przede wszystkim ze statystykami niemieckimi.

Drugim intensywnie rozwijanym kierunkiem była statystyczna teoria decyzji, a w tym problemy porównania eksperymentów statystycznych i ich zastosowania w statystyce odpornej (Bednarski, 1982), badania nad teoriodecyzyjnym porównaniem estymatorów i szacowaniem ich ryzyka (Kozek, 1982a, 1982b; Brown i Gajek, 1990), nowe podejścia do estymacji odpornej (Zieliński, 1983) oraz redukowalności struktur statystycznych (Bartoszyński i Pleszczyńska, 1980).

Zostają zapoczątkowane w Polsce prace dotyczące tematyki testowania hipotez, bardzo intensywnie rozwijanej do dziś. Badania były prowadzone nad różnymi aspektami tej teorii: m.in. rozwijano pewną powojenną ideę Jerzego Neymana dotyczącą koncepcji tzw. testów $C(\alpha)$ (Klonecki, 1977), prowadzono badania nad efektywnością testów, testami minimaksowymi i niezmienniczymi (Szkutnik, 1988) oraz nad testami używanymi do testowania hipotezy Hardy-Weinberga (Gnot i Ledwina, 1980).

Zajmowano się również nieparametryczną estymacją krzywych, przede wszystkim krzywej regresji i gęstości prawdopodobieństwa; tematyka ta w latach osiemdziesiątych ubiegłego stulecia należała do jednej z najżywiej rozwijanych dziedzin statystyki na świecie. Należy tu wymienić przede wszystkim osiągnięcia grupy W. Greblickiego

z Politechniki Wrocławskiej zajmującej się problemami zgodności estymatorów regresji (Greblicki *et al.*, 1984), jak również badania dotyczące estymacji gęstości metodą najmniejszej odległości i poprawiania estymatorów (Gajek, 1986a, 1986b), estymacji sekwencyjnej (Koronacki i Wertz, 1988) i estymacji gęstości w sytuacji ograniczonej obserwowalności próby (Mielniczuk, 1986).

We Wrocławiu i Warszawie prowadzono badania dotyczące metod sekwencyjnych (w 1981 r. R. Zieliński zorganizował w Warszawie międzynarodowy semestr w Centrum Banacha poświęcony tym zagadnieniom), we Wrocławiu zajmowano się wykorzystaniem tych metod w statystyce procesów stochastycznych (Musiała, 1981 i Magiera, 1987). W grupie E. Pleszczyńskiej w PAN prowadzono nowatorskie badania dotyczące pomiaru siły zależności stochastycznej przy użyciu pewnego zaproponowanego parametru funkcyjnego (Kowalczyk i Pleszczyńska, 1977 i Kowalczyk *et al.*, 1979). Owocem działalności naukowej tej grupy była również monografia *Statistical Inference. Theory and Practice* wydana w 1991 roku (wyd. polskie 1988), w której w bardzo nowoczesny sposób przedstawiano dwa nierozdzielne aspekty statystyki: badania teoretyczne i jej zastosowania.

Osobnego komentarza wymaga działalność Roberta Bartoszyńskiego (1933–1998) związanego w Polsce z warszawskim oddziałem IM PAN, wybitnego probabilisty, którego zainteresowania naukowe obejmowały również modelowanie matematyczne i statystykę. Z jego trwałych osiągnięć statystycznych należy tu wymienić klasyczną już pracę z Brownem, McBride i Thompsonem (Bartoszyński *et al.*, 1981) na temat modelowania rozwoju nowotworu złośliwego i jego wykrycia, zakładającą poissonowski model wykrycia guza z intensywnością zależną od jego wielkości, dyskutującą również występujące tu problemy estymacji oraz prace dotyczące taksonomii opartej na subiektywnych klasyfikacjach (Bartoszyński, 1974) i modelu obiegu banknotów (Bartoszyński, 1972).

O ile pierwszy okres był związany przede wszystkim ze statystyką stosowaną i rozwiązywaniem problemów podsuwanych przez praktykę, o tyle okres następny przyniósł bardzo silny rozwój metod teoretycznych i osiągnięcie poziomu światowego w statystyce matematycznej. Świadczą o tym również, poza pracami w czołowych czasopismach statystycznych, takich jak *Annals of Statistics*, *Multivariate Analysis*, *Journal of Statistical Planning and Inference*, częste wizyty najlepszych statystyków zagranicznych w Polsce, którzy oprócz wizyt roboczych uczestniczyli m.in. w Sympozjum Neymanowskim w 1974 r., w semestrze statystycznym w Centrum Banacha w 1984 roku poświęconym metodom nieparametrycznym i odpornym (zorganizowanym przez T. Bednarskiego). Przyjeżdżali oni również licznie na konferencje w Wiśle, których stałym organizatorem w początkowym okresie był R. Zmyślony. Ważnym wydarzeniem było również Europejskie Spotkanie Statystyków (EMS) (Wrocław, 1980 r.).

LATA 1990 DO 2012

Cezurą ostatniego omawianego okresu jest rok 1990. Ponieważ mówimy o czasach nieodległych, ich omówienie staje się z konieczności coraz bardziej subiektywne i przede wszystkim odzwierciedla poglądy piszącego te słowa. Okres ten można określić jako okres konsolidacji, w którym pewne kierunki rozwijane poprzednio były kontynuowane, prace w innych praktycznie zamarły, natomiast pojawiły się zamiast nich nowe, rozwijane w Polsce obszary badań.

Intensywnie kontynuowano prace nad metodami testowania hipotez i modelami liniowymi. Rozwijano tematykę estymacji odpornej. Do nowych kierunków należą przede wszystkim: wnioskowanie dla łańcuchów Markowa i szeregów czasowych, optymalne oszacowania dla funkcjonalów statystycznych i problemy charakteryzacyjne związane z danymi uporządkowanymi oraz metody analizy trudnych danych, w szczególności danych o skomplikowanej strukturze lub dużej wymiarowości.

Tematyką bardzo konsekwentnie rozwijaną i najbardziej chyba rozpoznawalną na świecie jako tematyka badana w Polsce jest problematyka uprawiana przez grupę skupioną wokół Teresy Ledwiny dotyczącą testów adaptacyjnych. Została ona zapoczątkowana pracą z 1994 roku poświęconą adaptacyjnej wersji gładkiego testu Neymana dla problemu zgodności (Ledwina, 1994). Podejście to bazuje na opartym na danych wyborze jednego z potencjalnych modeli, a następnie konstrukcji w nim statystyki testowej było stosowane do otrzymania nowych rozwiązań w wielu problemach testowania (m.in. problemy testowania jednorodności, hipotez złożonych, niezależności, symetrii, hipotez w modelach regresyjnych i hipotezy o normalności). Równolegle badano koncepcje optymalności procedur testowych, w tym efektywności pośredniej wprowadzonej przez Kallenberg. Reprezentatywne prace grupy to Inglot i Ledwina (1996), Kallenberg i Ledwina (1997), Ducharme i Ledwina (2003) i Ledwina i Wyłupek (2012).

Druga kontynuowana tematyka, konsekwentnie rozwijana przez T. Bednarskiego (IM PAN, UW) i jego współpracowników dotyczy konstrukcji estymatorów odpornych ze względu na zakłócenia modelowe, przede wszystkim dla modeli istotnych z punktu widzenia zastosowań, takich jak mieszane modele liniowe (Bednarski i Zontek, 1996), model Coxa (Bednarski, 1993) czy uogólniony model Poissona (Bednarski, 2004).

Wywodzące się z zastosowań prace Z. Szkutnika (AGH) dotyczą statystycznych problemów odwrotnych (Szkutnik, 2000, 2003). Ważne z punktu widzenia aplikacji są również badania grupy W. Niemiro (UW, UMK) nad teoretycznymi własnościami procedur Monte Carlo dla łańcuchów Markowa (MCMC), które wykorzystywane są m.in. w problemach estymacji stałoprecyzyjnej i w statystyce małych obszarów (Niemiro i Pokarowski, 2009 i Łatuszyński i Niemiro, 2011). T. Rychlik i współpracownicy (IM PAN i UMK) zajmują się własnościami statystyk bazujących na próbach uporządkowanych o ustalonej liczności i przy dopuszczeniu zależności i niejednakowego rozkładu obserwacji oraz zagadnieniami pokrewnymi dotyczącymi

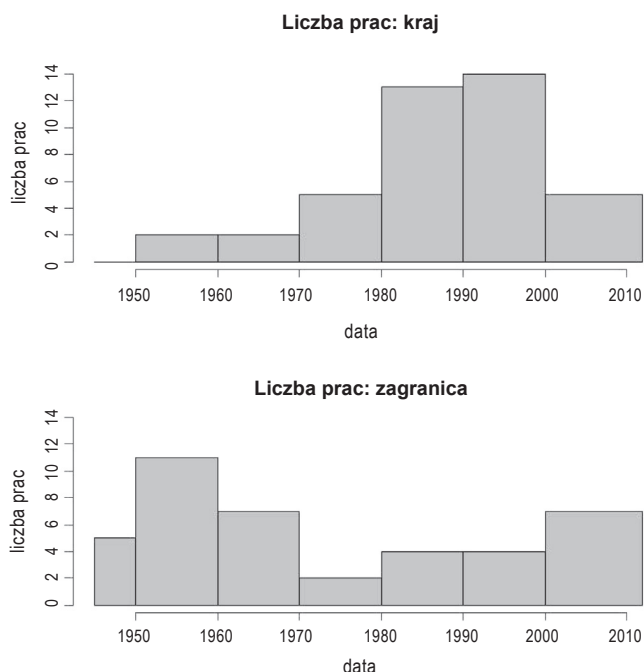
m.in. optymalnych oszacowań funkcjonałów statystycznych i zastosowań w teorii niezawodności (Rychlik, 1994; Gajek i Rychlik, 1998; Rychlik, 2001). Bliskie tym zagadnieniom są badania nad porządkami stochastycznymi prowadzone przez J. Bartoszewicza (UWr) i jego uczniów (por. np. Bartoszewicz, 1998). Zajęto się również tematyką wnioskowania dla szeregów czasowych, czyli danych obserwowanych w czasie, a prace dotyczyły szczególnie trzech obszarów: wnioskowania dla procesów niestacjonarnych o strukturze prawie periodycznej (Lenart *et al.*, 2008; praca z J. Leskowem i R. Synowieckim), dla procesów silnie zależnych (Csörgő i Mielniczuk, 1995a; Csörgő i Mielniczuk, 1995b i Mielniczuk *et al.*, 2010) i procesów z czasem ciągłym (por. np. Różański i Zagdański, 2006).

Liczne prace dotyczą rozwoju nowych metod wnioskowania związanych ze specyfiką badanych zjawisk empirycznych i związanych z nimi analizami „trudnych” danych. Specyfika ta może dotyczyć częściej np. w problemach genetycznych wysokiej wymiarowości danych przy jednoczesnej małej liczbie cech istotnie je opisujących (Bogdan *et al.*, 2004; Damiński *et al.*, 2008 i Bogdan *et al.*, 2012), specyficznej obserwowalności (Koronacki i Niemiro, 2005), prognozy dla obiektów bardziej skomplikowanych niż rozpatrywane w statystyce klasycznej, jak np. struktur białkowych (Pokarowski *et al.*, 2005) lub klasyfikacji wieloklasowej (Krzysko i Wołyński, 2009). Te coraz bardziej intensywne działania, które można zaliczyć do szeroko pojmowanego statystycznego wydobywania wiedzy z danych, są swoistą kontynuacją badań aplikacyjnych statystyków polskich zaraz po wojnie.

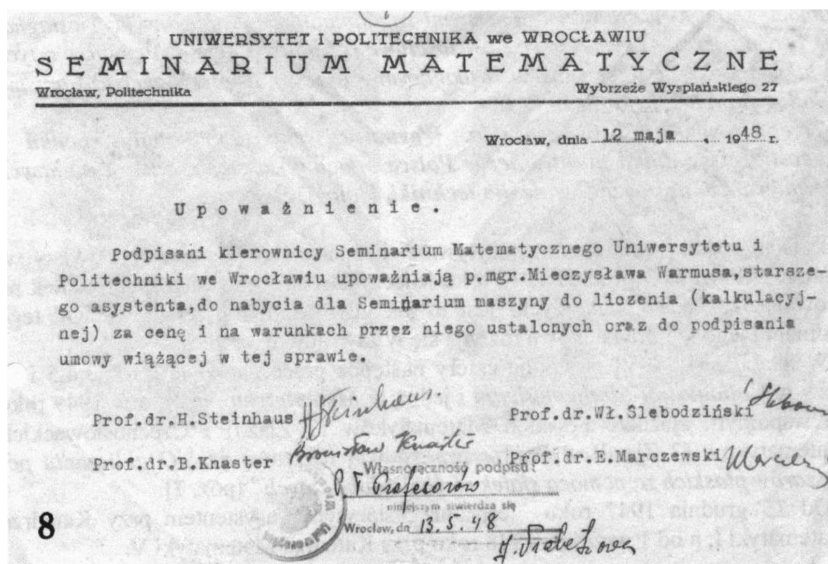
Warto wspomnieć o osiągnięciach Polaków w gałęziach probablistyki stosowanej mających istotne znaczenie dla statystyki: w optymalizacji stochastycznej (R. Zieliński, J. Koronacki), teorii procesów punktowych (T. Rolski, W. Szczotka, R. Szekli) i teorii optymalnego stopowania (E. Ferenstein, K. Szajowski).

Dla zilustrowania wkładu do statystyki światowej posłużę się histogramami liczby prac opublikowanych przez Polaków w piśmie *Annals of Statistics* (i jego poprzedniku *Annals of Mathematical Statistics* oraz *Annals of Applied Statistics*, które się z *Annals of Statistics* wyodrębniło) w okresie powojennym do końca roku 2012 w rozbiciu na statystyków pracujących w kraju i pracujących poza jego granicami.

Łącznie opublikowano 81 prac. Moda w rozkładzie prac Polaków pracujących poza Polską jest głównie skutkiem niezwyklej płodności Zygmunta Birnbauma, który w latach [1945, 1970) opublikował w *Annals of Mathematical Statistics* 16 prac. Okres największej publikowalności statystyków krajowych w *Annals of Statistics* przypada na dwa ostatnie dekady ubiegłego wieku, gdy ukazało się łącznie 27 prac (13 w latach [1980, 1990) i 14 w latach [1990, 2000)). Ten wysyp prac ma niewątpliwie między innymi związek z działaniami organizacyjnymi podjętymi wcześniej i rosnącą świadomością wśród matematyków, że statystyka i matematyka stosowana winny być rozwijane. Poniżej, na zakończenie, przedstawiam wymowny przykład, że taka świadomość istniała już dużo wcześniej.



Rysunek 1. Histogramy liczby prac opublikowanych przez statystyków polskich pracujących w kraju i poza jego granicami w Annals of Statistics



Rysunek 2. Upoważnienie udzielone M. Warmusowi przez B. Knastera, E. Marczewskiego, H. Steinhaus i W. Ślebodzińskiego do zakupu „maszyny do liczenia”

LITERATURA

- [1] Baksalary J., Kala R., (1981), *Linear Transformations Preserving Best Linear Unbiased Estimators in a General Gauss-Markoff Model*, Ann. Statist., 9, 913–916.
- [2] Bartoszewicz J., (1998), *Characterizations of the Dispersive Order of Distributions by the Laplace Transform*, Stat. Probab. Letters, 40, 23–29.
- [3] Bartoszyński R., (1972), *Model of Circulation and Exchange of Banknotes*, Appl. Math., 13, 139–151.
- [4] Bartoszyński R., (1974), *On a Metric Structure Derived from Subjective Judgments: Scaling under Perfect and Imperfect Discrimination*, Econometrica, 42, 55–71.
- [5] Bartoszyński R., McBride C., Brown B., Thompson J., (1981), *Some Nonparametric Techniques for Estimating the Intensity Function of a Cancer Related Nonstationary Poisson Process*, Ann. Statist., 9, 150–160.
- [6] Bartoszyński R., Pleszczyńska E., (1980), *Reducability of Statistical Structures and Decision Problems*, Banach Center Publications, 6, 29–36.
- [7] Bednarski T., (1982), *Binary Experiments, Minimax Tests and 2-Alternating Capacities*, Ann. Statist., 10, 226–232.
- [8] Bednarski T., (1993), *Robust Estimation in the Cox Regression Model*, Scandinavian Journal of Statistics, 20, 213–225.
- [9] Bednarski T., (2004), *Robust Estimation in the Generalized Poisson Model*, Statistics, 38, 149–159.
- [10] Bednarski T., Zontek S., (1996), *Robust Estimation of Parameters in Mixed Unbalanced Models*, Ann. Statist., 24, 1493–1510.
- [11] Bogdan M., Chakraborti A., Frommlet F., Ghosh J., (2012), *Asymptotic Bayes Optimality under Sparsity of Some Multiple Testing Procedures*, Ann. Statist., 39, 1551–1579.
- [12] Bogdan M., Ghosh J., Doerge R., (2004), *Modifying the Schwarz Bayesian Information Criterion to Locate Multiple Interacting Quantitative Trait Loci*, Genetics, 167, 989–999.
- [13] Brown L., Gajek L., (1990), *Information Inequalities for the Bayes Risk*, Ann. Statist., 18, 1578–1594.
- [14] Caliński T., (2012), *Rozwój i osiągnięcia w biometrii polskiej*, Przegląd Statystyczny, Numer specjalny 1, 47–52.
- [15] Caliński T., Harabasz J., (1974), *Dendrite Method for Cluster Analysis*, Comm. Statist. Sim. Comp., 3, 1–27.
- [16] Csörgő S., Mielniczuk J., (1995a), *Density Estimation under Long-Range Dependence*, Ann. Statist., 23, 990–999.
- [17] Csörgő S., Mielniczuk J., (1995b), *Nonparametric Regression under Long-Range Dependence*, Ann. Statist., 23, 1000–1014.
- [18] Dalenius T., Hájek J., Zubrzycki S., (1961), *On Plane Sampling and Related Geometrical Problems*, Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, I, 125–150.
- [19] Damiński M., Rada-Iglesias A., Enroth S., Wadelius C., Komorowski J., Koronacki J., (2008), *Monte-Carlo Feature Selection for Supervised Classification.*, Bioinformatics, 24, 110–117.
- [20] Ducharme G., Ledwina T., (2003), *Efficient and Adaptive Nonparametric Tests for Two-Sample Problem*, Ann. Statist., 31, 2036–2058.
- [21] Farrell R., Klonecki W., Zontek S., (1984), *All Admissible Linear Estimators of the Vector of Gamma Scale Parameters with Application to Random Effects Models*, Ann. Statist., 12, 261–281.
- [22] Fisz M., (1954), *Rachunek Prawdopodobieństwa i Statystyka Matematyczna*, PWN, Warszawa.
- [23] Gajek L., (1986a), *Estimating a Density and its Derivatives via the Minimum Distance Method*, Probability Theory and Related Fields, 80, 601–617.
- [24] Gajek L., (1986b), *On Improving Density Estimators which Are Not Bona Fide Densities*, Ann. Statist., 14, 1612–1618.

- [26] Gajek L., Rychlik T., (1998), *Projection Method for Moment Bounds on Order Statistics from*
- [27] *Restricted Families. II. Independent Case*, J. Mult. Anal., 31, 156–182.
- [28] Gnot S., (1983), *Bayes Estimation in Linear Models: Coordinate Free Approach*, J. Mult. Anal., 13, 40–51.
- [29] Gnot S., Kleffe J., Zmyślony R., (1985), *Nonnegativity of Admissible Invariant Estimates in Linear Models with Two Variance Components*, J. Statist. Plann. Inference, 12, 249–258.
- [30] Gnot S., Ledwina T., (1980), *Testing for Hardy-Weinberg Equilibrium*, Biometrics, 36, 161–175.
- [31] Greblicki W., Krzyżak M., Pawlak M., (1984), *Distribution-Free Pointwise Consistency of Kernel Regression Estimate*, Ann. Statist., 12, 1570–1575.
- [32] Inglot T., Ledwina T., (1996), *Asymptotic Optimality of Data Driven Neyman's Tests for Uniformity*, Ann. Statist., 24, 1982–2019.
- [33] Kallenberg W., Ledwina T., (1997), *Data Driven Smooth Tests when the Hypothesis is Composite*, J. Amer. Statist. Assoc., 92, 1094–1104.
- [34] Klonecki W., (1977), *Optimal $C(\alpha)$ Tests for Homogeneity*, Proceedings of the Symposium to Honour J. Neyman, 161–175.
- [35] Klonecki W., (1995), *Jerzy Neyman (1894–1981)*, Probability and Mathematical Statistics, 15, 7–14.
- [36] Klonecki W., Zonn W., (1973), *Jerzy Sława-Neyman*, Wiadomości Matematyczne, XVI, 53–70.
- [37] Koronacki J., Wertz W., (1988), *A Global Stopping Rule for Recursive Density Estimators*, J. Statist. Plann. Inference, 20, 23–39.
- [38] Koronacki S., Lasota K., Niemiro W., (2005), *Positron Emission Tomography by Markov Chain Monte Carlo with Auxiliary Variables*, Pattern Recognition, 38, 241–250.
- [38] Kowalczyk T., Kowalski A., Matuszewski A., Pleszczyńska E., (1979), *Screening and Monotonic Dependence Functions in the Multivariate Case*, Ann. Statist., 7, 607–614.
- [39] Kowalczyk T., Pleszczyńska E., (1977), *Monotonic Dependence Functions of Bivariate Distributions*, Ann. Statist., 5, 1221–1227.
- [40] Kozek A., (1982a), *Efficiency and Cramér-Rao Bounds for Convex Loss Functions*, J. Mult. Analysis, 12, 89–106.
- [41] Kozek A., (1982b), *Towards Calculus of Admissibility*, Ann. Statist., 10, 825–837.
- [42] Krzyśko M., (1983), *Asymptotic Distribution of the Discriminant Function*, Stat. Prob. Letters, 1, 243–250.
- [43] Krzyśko M., Wołyński W., (2009), *New Variants of Pairwise Classification*, European J. Operational Research, 199, 512–519.
- [44] Łatuszyński K., Niemiro W., (2011), *Rigorous Confidence Bounds for MCMC under a Geometric Drift Condition*, J. Complexity, 27, 23–38.
- [45] Ledwina T., (1994), *Data Driven Version of the Neyman Smooth Test of Fit*, J. Amer. Statist. Assoc., 89, 1000–1005.
- [46] Ledwina T., (2012), *Jerzy Neyman (1894–1981)*, Statistics in Transition – New Series, 13, 169–178.
- [47] Ledwina T., Wyłupek G., (2012), *Two-Sample Test Against One-Sided Alternatives*, Scand. J. Statist., 39, 758–781.
- [48] Lenart Ł., Leśkow J., Synowiecki R., (2008), *Subsampling in Estimation of Autocovariance of PC Time Series*, J. Time Series Analysis, 29, 995–1018.
- [49] Łukaszewicz J., (1967), *Julian Perkal (1913–1965)*, Wiadomości Matematyczne, X, 29–36.
- [50] Łukaszewicz J., Sadowski S., (1960), *On Comparing Several Populations with a Control Population*, Zastosow. Mat., 5, 309–320.
- [51] Magiera R., (1987), *Admissible Sequential Polynomial Estimators for Stochastic Processes*, Sequential Analysis, X, 147–167.
- [52] Mielniczuk J. Zhou Z., Wu W., (2010), *On Nonparametric Prediction of Linear Processes*, J. Time Series Analysis, 30, 652–673.

- [53] Mielniczuk J., (1986), *Some Asymptotic Properties of Kernel Estimators of a Density Function in Case of Censored Data*, Ann. Statist., 14, 1136–1139.
- [54] Musiela M., (1981), *On Sequential Estimation of Parameters of Continuous Gaussian Markov Processes*, Probability and Mathematical Statistics, 2, 37–53.
- [55] Niemiro W., Pokarowski P., (2009), *Fixed Precision MCM Estimation by Median of Products of Averages*, J. Appl. Probab., 46, 309–329.
- [56] Pokarowski P., Kloczkowski A., Jernigan R., Kothari N., Pokarowska M., Koliński A., (2005), *Inferring Ideal Amino Acids Interaction Forms from Statistical Protein Contact Potentials*, PROTEINS: Structure, Function and Bioinformatics, 59, 49–57.
- [57] Rychlik T., (1994), *Distributions and Expectations of Order Statistics from Possibly Dependent Samples*, J. Mult. Anal., 48, 31–42.
- [58] Rychlik T., (2001), *Projecting Statistical Functionals*, Lecture Notes in Statistics 160, Springer, New York.
- [59] Różański R., Zagdański A., (2006), *Estimation of the Drift Function for Ito Processes and Some Class of Semimartingales via Histogram Sieve*, Appl. Math., 33, 21–40.
- [60] Steinhaus H., (1957), *The Problem of Estimation*, Ann. Math. Statist., 28, 633–648.
- [61] Stępniański C., Wong S., Wu J., (1984), *Comparison of Linear Experiments with Known Covariances*, Ann. Statist., 12, 358–365.
- [62] Szkutnik Z., (1988), *Most Powerful Invariant Tests for Binormality*, Ann. Statist., 16, 292–301.
- [63] Szkutnik Z., (2000), *Unfolding Intensity Function of a Poisson Process in Models with Approximately Specified Folding Operator*, Metrika, 52, 11–26.
- [64] Szkutnik Z., (2003), *Doubly Smoothed EM Algorithm for Statistical Inverse Problems*, J. Amer. Statist. Assoc., 98, 178–192.
- [65] Trybuła S., (1958), *Some Problems of Simultaneous Minimax Estimation*, Ann. of Math. Statist., 29, 245–253.
- [66] Zielinski R., (1983), *Robust Statistical Procedures: A General Approach*, Lecture Notes in Statistics, 28, 285–295.
- [67] Zmyślony R., (1980), *A Characterization of Best Linear Unbiased Estimators in the General Linear Model*, Lecture Notes in Statistics, 2, 365–378.
- [68] Zubrzycki S., (1957), *O szacowaniu parametrów złóż geologicznych*, Zastosowania Matematyki, 3, 105–153.
- [69] Zubrzycki S., (1966), *Wykłady z Rachunku Prawdopodobieństwa i Statystyki Matematycznej*, PWN, Warszawa.

SPRAWOZDANIA

KRZYSZTOF JAJUGA, JOANICJUSZ NAZARKO, MAREK WALESIAK

SPRAWOZDANIE Z KONFERENCJI NAUKOWEJ NT. „KLASYFIKACJA I ANALIZA DANYCH – TEORIA I ZASTOSOWANIA”

W dniach 10–12 września 2012 roku w Lipowym Moście k. Supraśla odbyła się XXI Konferencja Naukowa Sekcji Klasyfikacji i Analizy Danych PTS (XXVI Konferencja Taksonomiczna) nt. „Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania” organizowana przez Sekcję Klasyfikacji i Analizy Danych Polskiego Towarzystwa Statystycznego oraz Katedrę Informatyki Gospodarczej i Logistyki Wydziału Zarządzania Politechniki Białostockiej. Przewodniczącą Komitetu Organizacyjnego konferencji była dr hab. inż. Joanna Ejdys, prof. nadzw. PB, zastępcą dr Katarzyna Halicka, sekretarzem naukowym dr Katarzyna Dębkowska, a sekretarzem organizacyjnym mgr Marta Jarocka.

Komitet naukowy konferencji stanowili: prof. dr hab. Marek Walesiak, prof. dr hab. Eugeniusz Gatnar, prof. dr hab. Krzysztof Jajuga, prof. dr hab. inż. Joanicjusz Nazarko, dr hab. Andrzej Sokołowski, prof. nadzw. UEK. Ze strony gospodarzy w sesji otwierającej konferencję zabrał głos prof. dr hab. inż. Lech Dzieńis – JM Rektor Politechniki Białostockiej.

Zakres tematyczny konferencji obejmował zagadnienia:

- a) teoria (taksonomia, analiza dyskryminacyjna, metody porządkowania liniowego, metody statystycznej analizy wielowymiarowej, metody analizy zmiennych ciągłych, metody analizy zmiennych dyskretnych, metody analizy danych symbolicznych, metody graficzne),
- b) zastosowania (analiza danych finansowych, analiza danych marketingowych, analiza danych przestrzennych, inne zastosowania analizy danych – medycyna, psychologia, archeologia, itd., aplikacje komputerowe metod statystycznych).

Zasadniczym celem konferencji SKAD była prezentacja osiągnięć i wymiana doświadczeń z zakresu teoretycznych i aplikacyjnych zagadnień klasyfikacji i analizy danych. Konferencja stanowi coroczne forum służące podsumowaniu obecnego stanu wiedzy, przedstawieniu i promocji dokonań nowatorskich oraz wskazaniu kierunków dalszych prac i badań.

W konferencji wzięły udział 104 osoby z następujących uczelni i instytucji: Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie, Instytut Ekonomiki Rolnictwa i Gospodarki Żywnościowej – Państwowy Instytut Badawczy, Politechnika Białostocka, Politechnika Łódzka, Politechnika Opolska, Politechnika Wrocławska, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie, Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Uniwersytet Gdański, Uniwersytet Adama Mickiewicza w Poznaniu, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Uniwersytet Łódzki, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu, Uniwersytet Szczeciński, Uniwersytet w Białymstoku, Wyższa Szkoła Bankowa w Toruniu, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, a także przedstawiciele Urzędów Statystycznych (m.in. z Poznania, Szczecina) i Narodowego Banku Polskiego.

W trakcie 4 sesji plenarnych oraz 15 sesji równoległych, wygłoszono 69 referatów poświęconych różnym aspektom teoretycznym i aplikacyjnym zagadnienia klasyfikacji i analizy danych. Odbyła się również sesja plakatowa, na której zaprezentowano 17 posterów.

Obradom w poszczególnych sesjach konferencji przewodniczyli: prof. dr hab. Eugeniusz Gatnar; prof. dr hab. Tadeusz Kufel; prof. dr hab. inż. Joanicjusz Nazarko; prof. dr hab. Magdalena Osińska; prof. dr hab. Józef Pocięcha; prof. dr hab. Marek Walesiak; prof. dr hab. Feliks Wysocki; dr hab. Paweł Lula, prof. nadzw. UEK; dr hab. Barbara Pawełek, prof. nadzw. UEK; dr hab. Andrzej Sokołowski, prof. nadzw. UEK; dr hab. Elżbieta Gołata, prof. nadzw. UEP; dr hab. Jan Paradysz, prof. nadzw. UEP; dr hab. Andrzej Bąk, prof. nadzw. UE; dr hab. Elżbieta Sobczak, prof. nadzw. UE; dr hab. Ewa Roszkowska, prof. nadzw. UwB; dr hab. Jacek Batóg; dr hab. Iwona Foryś; dr hab. inż. Joanna Ejdyś, prof. nadzw. PB.

Teksty referatów przygotowane w formie recenzowanych artykułów naukowych stanowią zawartość przygotowywanej do druku publikacji z serii Taksonomia nr 20 i 21 (w ramach Prac Naukowych Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu). Zaprezentowano referaty:

Marek Walesiak, Zagadnienie doboru liczby klas w klasyfikacji spektralnej

W artykule przetestowano przydatność pięciu indeksów oceny jakości klasyfikacji w zagadnieniu doboru liczby klas w klasyfikacji spektralnej uwzględniającej cztery typy odległości. W eksperymentach wykorzystano klasyczne dane metryczne o znanej strukturze klas obiektów oraz nieklasyczne zbiory danych. Dla modeli w każdym eksperymencie wygenerowano 40 zbiorów danych, przeprowadzono klasyfikację spektralną z zastosowaniem odpowiedniego indeksu i otrzymane rezultaty klasyfikacji porównano ze znaną strukturą klas za pomocą skorygowanego indeksu Randa.

Eugeniusz Gatnar, Analiza miar adekwatności rezerw walutowych

W artykule przedstawiono statystyczne własności miar stosowanych przez Międzynarodowy Fundusz Walutowy, które pozwalają określić optymalną wielkość rezerw

dewizowych pozostających do dyspozycji danego kraju. Rezerwy walutowe banków centralnych zwykle służą do ochrony przed skutkami kryzysu, lecz ich utrzymywanie jest kosztowne. Znaleźnienie optymalnego poziomu rezerw jest więc bardzo ważne. W przykładzie empirycznym oszacowano optymalne wielkości rezerw walutowych dla Polski, którymi zarządza NBP.

Joaniciusz Nazarko, Joanna Ejdys, Anna Kononiuk, Anna Olszewska, Analiza strukturalna jako metoda klasyfikacji danych w badaniach foresight

Analiza strukturalna umożliwia porządkowanie i analizowanie zbiorów obejmujących dużą liczbę zmiennych, które wzajemnie na siebie oddziałują. W artykule przedstawiono wyniki zastosowania analizy strukturalnej w projekcie „Foresight technologiczny «NT FOR Podlaskie 2020». Regionalna strategia rozwoju nanotechnologii”.

Józef Pociecha, Wskaźniki finansowe a klasyfikacyjne modele predykcji upadłości firm

W pracy przedstawiono typy modeli predykcji bankructwa oraz zasady konstrukcji i interpretacji podstawowych wskaźników finansowych, jako cech diagnostycznych przyjmowanych w tych modelach. Zaprezentowano rezultaty badań nad prognozowaniem bankructwa, jakie zostały opublikowane w światowej literaturze anglojęzycznej oraz literaturze polskiej.

Sabina Denkowska, Kamil Fijorek, Marcin Salamaga, Andrzej Sokołowski, Sejm VI kadencji – maszynka do głosowania

W pracy analizowano wyniki głosowań przeprowadzonych w Sejmie VI kadencji. Kadencję podzielono na trzy okresy, których punktami granicznymi były wybory do Parlamentu Europejskiego oraz katastrofa smoleńska. Wyeliminowano głosowania w których udział głosów „za” lub „przeciw” nie przekraczał 10%. Na podstawie tych głosowań nieoczywistych wyodrębniano grupy posłów głosujących jednorodnie w analizowanych okresach. Stwierdzono dużą stabilność głosowań co było spowodowane dominacją trzech sił politycznych: koalicji, PiSu i lewicy. Z uwagi na narzucaną dyscyplinę partyjną wydaje się, że w Sejmie tym wystarczyłoby 7 posłów (z nierówną liczbą „głosów”), bo tyle grup wskazała analiza skupień.

Andrzej Bąk, Metody porządkowania liniowego w polskiej taksonomii – pakiet `pllord`

W artykule zaprezentowano dorobek polskiej taksonomii w zakresie metod porządkowania liniowego. W szczególności w artykule przedstawiono następujące zagadnienia: charakterystyka wybranych metod porządkowania liniowego, implementacja wybranych metod porządkowania liniowego w pakiecie `pllord` programu R, przykłady zastosowań metod porządkowania liniowego z wykorzystaniem pakietu `pllord`.

Paweł Lula, Modelowania i analiza programów studiów w systemie Krajowych Ram Kwalifikacji

W pracy przedstawiono model programu studiów opracowany zgodnie z wymogami Krajowych Ram Kwalifikacji. Proponowany model przyjmuje postać sieci semantycznej. W artykule zaproponowano również algorytmy analizy wybranych aspektów stworzonego programu studiów.

Ewa Roszkowska, Zastosowanie rozmytej metody TOPSIS do oceny ofert negocjacyjnych

W pracy pokazano możliwości zastosowania rozmytej metody TOPSIS do wspomagania procesu negocjacji. Rozmyta metoda TOPSIS pozwala na ocenę ofert negocjacyjnych, ich uporządkowanie od najlepszej do najgorszej, szacowanie wartości ustępstw z uwzględnieniem w analizie niepewności, częściowej informacji czy wyrażeń werbalnych.

Jan Paradysz, Nowe możliwości badania koniunktury na lokalnych rynkach pracy

W artykule przedstawiono problem translacji demograficznej, czyli wzajemne relacje między analizą kohortową i transwersalną na przykładzie wybranych krajów Ameryki i Europy oraz wskazano na nowe możliwości interpretacji wskaźników reprodukcji ludności i możliwości ich aplikacji w analizie koniunktury ekonomicznej.

Iwona Markowicz, Beata Bieszk-Stolorz, Wykorzystanie modelu nieproporcjonalnego hazardu Coxa do badania szansy podjęcia pracy w zależności od rodzaju bezrobocia

W artykule analizowano szanse szybkiego znalezienia zatrudnienia przy wykorzystaniu modelu nieproporcjonalnego hazardu Coxa. Wyniki pozwoliły na określenie wpływu płci, wieku i wykształcenia na szansę szybkiego podjęcia zatrudnienia przez osoby z grup o określonym rodzaju bezrobocia: krótkookresowym (do 3 miesięcy), średniookresowym (od 3 do 6 miesięcy), długookresowym (od 6 do 12 miesięcy) i długotrwałym (12 miesięcy i więcej).

Justyna Wilk, Michał Pietrzak, Stanisław Matusik, Sytuacja społeczno-gospodarcza jako determinanta migracji wewnętrznych w Polsce

Celem artykułu było określenie relacji między sytuacją społeczno-gospodarczą a zjawiskiem migracji wewnętrznych w Polsce. Badaniem objęto okres po akcesji Polski w struktury UE i dwa podokresy, odnoszące się do stanu koniunktury gospodarczej. Przepływy migracyjne między- i wewnątrzwojewódzkie zobrazowano za pomocą zestawu wskaźników. Ich wielkości odniesiono do wartości mierników syntetycznych, obrazujących sytuację społeczno-gospodarczą województw i jej poszczególne aspekty.

Dominik Rozkrut, Wykorzystanie metod klasyfikacji i analizy danych w analizie stymulowania innowacyjności polskich przedsiębiorstw

Prezentowane badanie jest przykładem podejścia, w którym wykorzystano metody klasyfikacji oraz analizy czynnikowej do poszukiwania i wyodrębnienia prawidłowości w zakresie obserwowanych zachowań innowacyjnych w polskich przedsiębiorstwach, umożliwiając pełniejszy opis istniejących zjawisk niż w analizie z wykorzystaniem jedynie prostych mierników innowacyjności opartych na odsetkach.

Elżbieta Sobczak, Inteligentne struktury pracujących a efekty strukturalne zmian zatrudnienia w państwach Unii Europejskiej

W artykule dokonano identyfikacji i oceny zależności występujących między udziałem liczby pracujących w sektorach wysokiej techniki a efektami strukturalnymi zmian zatrudnienia w państwach Unii Europejskiej w latach 2008–2010. Cel został zrealizowany poprzez klasyfikację państw członkowskich UE ze względu na udział pracujących w sektorach ekonomicznych wyodrębnionych wg intensywności działalności B+R oraz odniesienie otrzymanych wyników klasyfikacji do efektów strukturalnych zmian liczby pracujących ustalonych z wykorzystaniem *shift – share analysis*.

Małgorzata Markowska, Danuta Strahl, Wykorzystanie referencyjnego systemu granicznego do klasyfikacji europejskiej przestrzeni regionalnej ze względu na filar inteligentnego rozwoju – kreatywne regiony

W pracy przedstawiono propozycję wykorzystania referencyjnego systemu granicznego do klasyfikacji europejskiej przestrzeni regionalnej ze względu na filar inteligentnego rozwoju.

Marcin Salamaga, Weryfikacja teorii poziomu rozwoju gospodarczego J.H. Dunninga w ujęciu sektorowym w wybranych krajach Unii Europejskiej

W artykule przedstawiono propozycję weryfikacji teorii poziomu rozwoju gospodarczego J.H. Dunninga. Zaproponowano zmodyfikowane sektorowe podejście do badania powiązań pomiędzy konkurencyjnością inwestycyjną kraju i poziomem wartości dodanej wytworzonej w sektorach jego gospodarki. W badaniach wykorzystano złożoną macierz znaczników i analizę korespondencji.

Iwona Staniec, Adam Depta, Wpływ czynników ekonomiczno-społecznych na różnice w oficjalnym i efektywnym wieku emerytalnym w wybranych krajach

Celem pracy była identyfikacja czynników ekonomiczno-społecznych wpływających na różnice w oficjalnym i efektywnym wieku emerytalnym w wybranych krajach. W procesie identyfikacji wykorzystano analizę opisową opierającą się na korelacjach ekologicznych.

Tadeusz Kufel, Marcin Błazejowski, Paweł Kufel, Obszary modelowania niefinansowych danych transakcyjnych (tickowych)

W artykule zostały przedstawione obszary modelowania niefinansowych danych transakcyjnych (tickowych).

Joanna Banaś, Małgorzata Machowska-Szewczyk, Ocena atrakcyjności internetowych rachunków bankowych z uwzględnieniem zmiennych symbolicznych

W artykule pokazano, że klasyfikacja internetowych rachunków bankowych oparta na cechach niemierzalnych stanowi ważne uzupełnienie wyników uzyskanych metodami klasycznymi. Dane wykorzystane do sformułowania ocen subiektywnych uzyskano w wyniku badania ankietowego przeprowadzonego wśród studentów szczecińskich uczelni wyższych. Do reprezentacji cech niemierzalnych wykorzystano zmienne symboliczne z wagami.

Marta Jarocka, Wpływ metody doboru cech diagnostycznych na wynik porządkowania liniowego na przykładzie rankingu polskich uczelni

W artykule dokonano analizy wpływu metod doboru cech diagnostycznych na wynik hierarchizacji liniowej. W tym celu, na podstawie opublikowanych w 2012 roku danych użytych do konstrukcji Rankingu Szkół Wyższych „Perspektyw” i „Rzeczpospolitej”, skonstruowano rankingi, z różną kombinacją cech kryterialnych.

Anna Zamojska, Zastosowanie miar efektywności zarządzania portfelem do porządkowania funduszy inwestycyjnych

W artykule przedstawiono krótki przegląd wybranych miar efektywności zarządzania portfelem oraz wyniki przeprowadzonego badania empirycznego.

Iwona Foryś, Wykorzystanie analizy historii zdarzeń do badania powtórnych sprzedaży na lokalnym rynku mieszkaniowym

W artykule zweryfikowana została hipoteza dotycząca wyższego prawdopodobieństwa ponownego zbycia lokalu w okresie koniunktury w stosunku do dekoniunktury.

Michał Trzęsiok, Wycena rynkowej wartości nieruchomości z wykorzystaniem wybranych metod wielowymiarowej analizy statystycznej

W artykule przedstawiono próbę wykorzystania wybranych nieparametrycznych metod regresji do analizy cen transakcyjnych mieszkań w Warszawie. Zaprezentowano procedurę symulacyjnego doboru najlepszego, w sensie dokładności predykcji, narzędzia analizy danego zjawiska oraz metodę uzyskania dodatkowej wiedzy o kształtowaniu się cen transakcyjnych mieszkań oraz o istotności wpływu poszczególnych zmiennych objaśniających.

Hanna Gruchociak, Delimitacja lokalnych rynków pracy w Polsce na podstawie danych z badania przepływów ludności związanych z zatrudnieniem

W 2011 roku Urząd Statystyczny w Poznaniu opublikował drugą część wyników badania przepływów ludności związanych z zatrudnieniem za rok 2006, opartego na danych pozyskanych z zasobów podatkowych Ministerstwa Finansów. Udostępniona macierz przepływów związanych z zatrudnieniem umożliwia przeprowadzenie kompleksowej delimitacji lokalnych rynków pracy w Polsce. W zależności od przyjętego kryterium łączenia wstępnych lokalnych rynków pracy w trakcie działania

algorytmu otrzymano dwa podziały gmin na lokalne rynki pracy, których wyniki porównano.

Aleksandra Matuszewska-Janica, Dorota Witkowska, Zastosowanie drzew klasyfikacyjnych do badania zróżnicowania płac kobiet i mężczyzn

Celem badania był podział na grupy osób pracujących w Polsce (w roku 2009) ze względu na otrzymywane wynagrodzenia przy uwzględnieniu wybranych cech pracownika. Badania wyraźnie wskazują na występowanie zjawiska segregacji poziomej, tzn. zawodów mocno sfeminizowanych, takich jak edukacja, opieka zdrowotna i socjalna. Wynika z nich również, że kobiety częściej legitymują się wyższym wykształceniem i częściej podejmują pracę na część etatu. Analiza przy wykorzystaniu drzew klasyfikacyjnych dowiodła, że płeć jest ważną cechą różnicującą grupy i mającą wpływ na wynagrodzenie.

Krzysztof Najman, Samouczące się sieci GNG w grupowaniu danych dynamicznych o dużym wymiarze

W artykule przedstawiono wyniki badań symulacyjnych dotyczących zastosowania samoorganizujących się sieci neuronowych typu GNG w grupowaniu dynamicznym danych o dużym wymiarze. Przeprowadzono niezależnie dwa eksperymenty na wygenerowanych danych, dokonując pomiaru szybkości uczenia się sieci w zależności od wymiaru danych.

Kamila Migdał Najman, Zastosowanie jednowymiarowej sieci SOM do wyboru cech zmiennych w grupowaniu dynamicznym

W artykule zaproponowano procedurę wyboru cech w grupowaniu dynamicznym. Jako algorytm grupowania dynamicznego wykorzystano samouczącą się sieć neuronową typu GNG. Aby przyspieszyć i polepszyć wyniki grupowania zredukowano liczbę zmiennych korzystając z sieci SOM. W eksperymencie symulacyjnym wykazano skuteczność takiego rozwiązania.

Magdalena Osińska, Marcin Fałdziński, Tomasz Zdanowicz, Analiza zależności między procesami fundamentalnymi a rynkiem kapitałowym w Chinach

Celem artykułu było zbadanie zależności między rynkiem kapitałowym a procesami reprezentującymi realną sferą gospodarki w Chinach, na tle chińskiej pozycji na rynku międzynarodowym oraz postępującej transformacji gospodarczej. Za pomocą modelu VEqC wykazano, że wzrost oszczędności w Chinach powoduje występowanie reakcji w zmiennych ekonomicznych i finansowych, w tym zmiennych z rynku kapitałowego.

Marcin Pelka, Rozmyta klasyfikacja spektralna c-średnich dla danych symbolicznych interwałowych

W artykule zaproponowano nowe metody klasyfikacji rozmytej na potrzeby analizowania danych symbolicznych interwałowych. Przedstawiono podstawowe pojęcia z zakresu analizy danych symbolicznych, klasyfikacji spektralnej oraz

rozmytej klasyfikacji c -średnich. W części empirycznej przedstawiono wyniki badań symulacyjnych.

Małgorzata Machowska-Szewczyk, Klasyfikacja obiektów reprezentowanych przez różnego rodzaju cechy symboliczne

Celem pracy była prezentacja metod klasyfikacji obiektów symbolicznych o cechach mieszanego typu zaproponowanych przez autorów De Carvalho i De Souza oraz przedstawienie propozycji uogólnienia tych algorytmów do klasyfikacji rozmytej.

Ewa Genge, Segmentacja uczestników Industriady z wykorzystaniem analizy klas ukrytych

W ostatnim czasie na popularności zyskują modele mieszanek rozkładów dla zmiennych jakościowych (mierzonych na skalach słabych), zwane również modelami lub analizą klas ukrytych (*latent class analysis*). Celem artykułu była segmentacja uczestników Industriady, tj. imprez organizowanych przy obiektach leżących na Szlaku Zabytków Techniki Województwa Śląskiego. Obliczenia przeprowadzono za pomocą pakietu `poLCA` programu R.

Dorota Rozmus, Porównanie dokładności taksonomicznej metody propagacji podobieństwa oraz zagregowanych algorytmów taksonomicznych opartych na idei metody *bagging*

Celem artykułu jest porównanie dokładności zagregowanych algorytmów taksonomicznych opartych na idei metody *bagging* oraz taksonomicznej metody propagacji podobieństwa.

Ewa Wędrowska, Wrażliwość miar dywergencji jako mierników zgodności struktur

W artykule wskazano możliwość wykorzystania do oceny stopnia rozbieżności struktur miar dywergencji klasy Csiszára (f -dywergencje), w szczególności: odległość Hellingera, odległość trójkątną, symetryczną χ^2 -kwadrat dywergencję, dywergencję Kullbacka-Leiblera, dywergencję Jensena-Shannona.

Katarzyna Wójcik, Janusz Tuchowski, Wpływ automatycznego tłumaczenia na wyniki automatycznej identyfikacji charakteru opinii konsumenckich

Celem pracy była ocena wpływu tłumaczenia maszynowego na automatyczną analizę opinii konsumenckich. Zaprezentowano wyniki analizy symulacyjnej będącej próbą oceny wpływu tłumaczenia maszynowego na dokładność automatycznej analizy opinii konsumenckich. W badaniach do automatycznego tłumaczenia wykorzystana została aplikacja Google Translate. Obliczenia dokonywane były z wykorzystaniem aplikacji RapidMiner.

Małgorzata Misztal, Symulacyjna ocena wpływu wybranych metod uzupełniania brakujących danych na wyniki klasyfikacji obiektów z wykorzystaniem drzew klasyfikacyjnych CART i CRUISE

W pracy zbadano wpływ wybranych metod imputacji danych na wyniki klasyfikacji obiektów z wykorzystaniem drzew klasyfikacyjnych CART i CRUISE oraz

porównano procedury imputacji zaimplementowane bezpośrednio w obu algorytmach budowy drzewa.

Barbara Pawełek, Adam Sagan, Zmienne ukryte w modelach ekonomicznych – respecyfikacja modelu Kleina I

Celem pracy była respecyfikacja modelu Kleina I uwzględniająca ekonometryczną i psychometryczną perspektywę w budowie modelu strukturalnego ze zmiennymi ukrytymi. Polega ona na wprowadzeniu do modelu Kleina I zmiennych ukrytych i uwzględnienie w procesie budowy modelu błędów pomiaru konstruktów ekonomicznych.

Andrzej Bąk, Tomasz Bartłomowicz, Mikroekonometryczne modele wielomianowe i ich zastosowanie w analizie preferencji z wykorzystaniem programu R

Celem artykułu było przedstawienie wybranych wielomianowych modeli logitowych wyborów dyskretnych i ich zastosowanie w pomiarze preferencji konsumentów. W estymacji modeli wykorzystano program, pakiety R i funkcje oprogramowane w języku R.

Joanna Trzęsiok, Wybrane symulacyjne techniki porównywania nieparametrycznych metod regresji

W artykule przedstawiono symulacyjną procedurę badawczą pozwalającą na porównywanie różnych nieparametrycznych modeli regresji.

Artur Zaborski, Analiza *unfolding* z wykorzystaniem modelu grawitacji

W artykule zaprezentowano modyfikację wielowymiarowej analizy *unfolding* poprzez wykorzystanie w jej konstrukcji funkcji grawitacji. Modyfikacja ta pozwala na uwzględnienie w analizie dodatkowych czynników (takich jak udział w rynku lub lojalność względem marki), które mają wpływ na oceny preferencji respondentów.

Anna Czapkiewicz, Beata Basiura, Badanie wpływu wyboru współczynnika zależności na grupowanie szeregów czasowych

Przeprowadzone badanie symulacyjne miało na celu zbadanie własności współczynnika korelacji Pearsona oraz współczynnika korelacji z modelu Copula-GARCH uzyskanego metodą dwukrokową IFM. Badaniu symulacyjnemu został również poddany fakt, w jaki sposób wybór metody wyznaczenia współczynnika korelacji wpływa na wynik grupowania metodą Warda. Badanie przeprowadzono metodą Monte Carlo.

Aleksandra Łuczak, Feliks Wysocki, Zastosowanie mediany przestrzennej Webera i metody TOPSIS w ujęciu pozycyjnym do konstrukcji syntetycznego miernika poziomu życia

Celem pracy było przedstawienie możliwości wykorzystania do konstrukcji syntetycznego miernika rozwoju mediany przestrzennej Webera i metody TOPSIS w ujęciu pozycyjnym. Proponowane podejście zostało przedstawione na przykładzie dotyczącym budowy syntetycznego miernika poziomu życia ludności w powiatach województwa wielkopolskiego.

Hanna Dudek, Joanna Małgorzata Landmesser, Wpływ relatywnej deprywacji na subiektywne postrzeganie dochodów

W artykule przedstawiono analizę kształtowania się subiektywnej oceny własnej sytuacji dochodowej przez gospodarstwa domowe emerytów. W tym celu zastosowano metodę częściowo uogólnionych uporządkowanych modeli logitowych. Analizę przeprowadzono na podstawie danych z badań budżetów gospodarstw domowych zrealizowanych przez GUS.

Justyna Wilk, Identyfikacja obszarów problemowych i wzrostowych w województwie dolnośląskim w zakresie kapitału ludzkiego

Celem artykułu była identyfikacja obszarów strategicznej interwencji w województwie dolnośląskim w zakresie kapitału ludzkiego, decydujących o potencjałach i barierach rozwoju regionalnego. Zastosowano podejście wykorzystujące metody porządkowania liniowego.

Isabella Kurzawa, Wielomianowy model logitowy jako narzędzie identyfikacji czynników wpływających na sytuację mieszkaniową polskich gospodarstw domowych

Celem pracy było zastosowanie wielomianowego modelu logitowego do identyfikacji czynników wpływających na stan posiadania mieszkania (tytułu prawnego do zamieszkiwanego lokalu) przez gospodarstwa domowe.

Tomasz Szubert, Czynniki różnicujące poziom zadowolenia z życia oraz wartości życiowe osób sprawnych i niepełnosprawnych w świetle badań „Diagnozy Społecznej”

W opracowaniu podjęto się próby sprawdzenia czy wyznawane wartości życiowe oraz poziom zadowolenia z życia Polaków zależą od jednej z podstawowych zmiennych opisujących stan zdrowia ludności, a mianowicie od występowania (bądź nie) niepełnosprawności. W tym celu wykorzystano dane dotyczące ponad 26 tys. respondentów. Do ich opracowania wykorzystano zaś analizę wariancji, regresji oraz korespondencji.

Elżbieta Gołata, Grażyna Dehnel, Spis ludności – rejestry administracyjne

Celem artykułu była próba określenia przyczyn rozbieżności dotyczących szacunków prezentowanych na podstawie wyników NSP 2011 i Badania Aktywności Ekonomicznej Ludności w odniesieniu do rynku pracy. Omówiona została również kwestia wpływu i znaczenia zaobserwowanych rozbieżności pomiędzy wynikami badań. Zaprezentowano analizę porównawczą bieżącej oceny sytuacji na rynku pracy wykorzystując do tego celu dane pochodzące ze spisu ludności 2011 oraz wyniki BAEL.

Krzysztof Kompa, Ocena rozwoju ekonomicznego krajów Wspólnoty Niepodległych Państw (WNP) z wykorzystaniem wybranych mierników taksonomicznych

W artykule podjęto próbę porównania rozwoju gospodarczego 10-ciu państw członków WNP. Do porównań wykorzystano miary taksonomiczne skonstruowane

na 12 zmiennych obserwowanych dla każdego kraju za lata 1995–2009. Na tej podstawie przeprowadzono klasyfikację badanych krajów do czterech grup o zbliżonym poziomie rozwoju ekonomicznego.

Aleksandra Łuczak, Zastosowanie rozmytej hierarchicznej analizy do oceny ważności czynników strategicznych w jednostkach administracyjnych

Rozmyta hierarchiczna analiza (FHP) jest metodą służącą do rozwiązywania wielokryterialnych problemów decyzyjnych, gdzie problem decyzyjny przedstawiany jest w postaci hierarchicznego schematu decyzyjnego składającego się z celu głównego, celów podrzędnych i zadań. Proponowane podejście zostało zilustrowane przykładem dotyczącym oceny ważności celów i zadań strategicznych gminy Rokietnica w województwie wielkopolskim.

Sabina Denkowska, Procedury testowań wielokrotnych

W artykule przedstawiono procedury testowań wielokrotnych, a szczególnie procedury łączne, które uwzględniają łączne rozkłady statystyk testowych, dzięki czemu są mniej konserwatywne od procedur brzegowych.

Jacek Batóg, Analiza wrażliwości wyników porządkowania obiektów uzyskanych za pomocą metod ELECTRE III oraz TMR na obserwacje nietypowe i zmianę wartości progowych

W artykule przeprowadzono analizę odporności dwóch wybranych metod porządkowania obiektów Taksonomicznej Miary Rozwoju i ELECTRE III na wprowadzenie obserwacji nietypowych.

Jerzy Korzeniewski, Modyfikacja metody HINoV selekcji zmiennych w analizie skupień

W referacie zaproponowano prostą modyfikację metody HINoV polegającą na tym, by dla każdej liczby skupień rozważanej w procedurze replikacji, zbadać stabilność podziału zbioru dla obu porównywanych podzbiorów zmiennych (rozłącznych) z których jeden trzeba wybrać. Modyfikację oceniono na eksperymencie symulacyjnym zawierającym 8100 zbiorów danych ze strukturami skupień wygenerowanymi w postaci mieszanin rozkładów normalnych.

Artur Mikulec, Kryterium Mojeny i Wisharta w analizie skupień – przypadek skupień o różnych macierzach kowariancji

Celem referatu była prezentacja wyników empirycznej analizy efektywności kryteriów Mojeny i Wisharta wyboru liczby skupień – na tle analizowanych dotychczas kryteriów Bakera i Huberta, Calińskiego i Harabasza, Daviesa i Bouldina, Huberta i Levine’a – w przypadku skupień o różnych macierzach kowariancji. Analizę empiryczną przeprowadzono z wykorzystaniem programu *ClustanGraphics 8* oraz pakietu *clusterSim* środowiska R.

Marcin Szymkowiak, Konstrukcja estymatorów kalibracyjnych wartości globalnej dla różnych funkcji odległości

W artykule przedstawiono różne funkcje odległości, które można wykorzystać na etapie konstrukcji wag kalibracyjnych. W części empirycznej, z wykorzystaniem programu R i funkcji `calib` dostępnej w pakiecie `sampling`, pokazano w jaki sposób wyznaczać wagi kalibracyjne w badaniach z brakami odpowiedzi dla różnych funkcji odległości.

Anna Witaszczyk, Łukasz Pryt, Zastosowanie metod wielowymiarowej analizy statystycznej w badaniach pacjentów leczonych operacyjnie z powodu raka przełyku

Celem pracy jest próba stworzenia „portretu pacjenta” w zależności od typu histologicznego zmiany oraz jej lokalizacji oraz wyodrębnienie grup pacjentów podobnych z punktu widzenia skuteczności i efektów zastosowanej metody leczenia. Do przeprowadzenia analizy wyników badań zastosowano analizę korespondencji i analizę skupień.

Marek Lubicz, Maciej Zięba, Konrad Pawełczyk, Adam Rzechonek, Jerzy Kołodziej, Modele eksploracji danych niezbalansowanych – procedury klasyfikacji dla zadania analizy ryzyka operacyjnego

Celem pracy była analiza porównawcza wybranych podejść do klasyfikacji danych niezbalansowanych. W badaniach zastosowano implementacje technik klasyfikacji w środowiskach uczenia maszynowego KEEL i WEKA. Jako dane do klasyfikacji wykorzystano zaktualizowaną bazę danych o pacjentach leczonych operacyjnie z powodu raka płuca we Wrocławskim Ośrodku Torakochirurgii w latach 2000–2011.

Wojciech Roszka, Szacowanie łącznych charakterystyk cech nieobserwowanych łącznie

Wykorzystanie metod statystycznej integracji danych umożliwia łączenie dostępnych repozytoriów danych w sposób umożliwiający szacowanie łącznych charakterystyk cech nieobserwowanych łącznie w pojedynczych źródłach. Metody te mogą stanowić dodatkowe źródło informacyjne dla badań społeczno-ekonomicznych.

Andrzej Dudek, Bartosz Kwaśniewski, Przetwarzanie równoległe algorytmów analizy skupień w technologii CUDA

W artykule scharakteryzowano podstawy metodologiczne i technologiczne przetwarzania równoległego danych w technologii CUDA (Compute Unified Device Architecture) oraz dokonano przeglądu możliwości aplikacyjnych przetwarzania równoległego w technologii CUDA dla najbardziej znanych algorytmów analizy skupień, w tym klasyfikacji spektralnej, wraz ze wskazaniem miejsc, w których zastosowanie przetwarzania równoległego znacznie przyspieszy czas ich wykonywania.

Justyna Brzezińska, Metody wizualizacji danych jakościowych w programie R

W artykule zaprezentowano graficzne metody analizy danych jakościowych. Techniki wizualizacji danych dostępne są w pakiecie `vcd` oraz `vcdExtra` w programie R.

Agata Sielska, Konkurencyjność polskich gospodarstw rolnych po akcesji do Unii Europejskiej i jej dynamika

W pracy dokonano oceny konkurencyjności polskich gospodarstw rolnych w oparciu o wskaźniki wydajności procesów produkcyjnych oraz wskaźniki finansowe. W celu zbadania podobieństwa profili konkurencyjnych w poszczególnych województwach wykorzystano metodę analizy skupień Warda.

Mariusz Kubus, Liniowy model prawdopodobieństwa z regularyzacją jako metoda doboru zmiennych

W artykule zaproponowano zastosowanie liniowego modelu prawdopodobieństwa z regularyzacją jako narzędzia doboru zmiennych przed regresją logistyczną. W etapie selekcji zmiennych dodatkowo stosowano sprawdzanie krzyżowe.

Beata Basiura, Metoda Warda w zastosowaniu klasyfikacji województw polski z różnymi miarami odległości

W pracy proponuje się porównanie wyników klasyfikacji województw Polski z zastosowaniem różnych funkcji celu. Badanie starano się przeprowadzić na podstawie danych empirycznych z uzasadnieniem wyboru miary podobieństwa. Porównano wyniki otrzymane przy zastosowaniu klasycznej metody Warda oraz algorytmu proponowanego przez formułę Lance-Williamsa.

Katarzyna Wardzińska, Wykorzystanie metody obwiedni danych w procesie klasyfikacji przedsiębiorstw

Celem artykułu było pokazanie możliwości wykorzystania metody DEA (Data Envelopment Analysis) w procesie klasyfikacji. Metodę obwiedni danych wykorzystano do wyznaczenia obszaru akceptacji (zbiór możliwości produkcyjnych) dla przedsiębiorstw charakteryzujących się niskim poziomem ryzyka kredytowego. Następnie na podstawie funkcji przynależności dokonano klasyfikacji badanych przedsiębiorstw. Jednocześnie dane poddane zostały klasycznej analizie dyskryminacyjnej. Otrzymane wyniki porównano.

Katarzyna Dębkowska, Modelowanie upadłości przedsiębiorstw oparte na próbach niezbilansowanych

Celem artykułu była ocena dokładności wybranych metod w prognozowaniu upadłości przedsiębiorstw. Jako metody wielowymiarowej analizy statystycznej wykorzystane zostały: drzewa klasyfikacyjne oraz analiza dyskryminacyjna. W badaniu wykorzystano dane o przedsiębiorstwach zamieszczone w bazie Emerging Markets Information Service (EMIS).

Danuta Tarka, Wpływ metody doboru cech diagnostycznych na wyniki klasyfikacji obiektów na przykładzie danych dotyczących ochrony środowiska

Celem pracy była analiza wpływu sposobu doboru cech diagnostycznych na wyniki klasyfikacji obiektów w badaniach regionalnych (ekonomiczno-geograficznych) na przykładzie danych dotyczących stanu środowiska w poszczególnych województwach.

Ewa Chodakowska, Indeks Malmquista w klasyfikacji podmiotów gospodarczych według zmian ich względnej produktywności działania

W artykule dokonano analizy zmian produktywności wybranych przedsiębiorstw z listy 500 „Rzeczpospolitej” w czasie za pomocą indeksu Malmquista i metody DEA. Wyniki zestawiono z klasycznymi miernikami efektywności.

Anna Olszewska, Joanna Jończyk, Zastosowanie metod klasyfikacji danych w analizie związków pomiędzy kulturą organizacyjną a innowacjami – wyniki badań empirycznych

Zasadniczym celem opracowania było wskazanie wewnętrznych determinant kultury innowacji na przykładzie wybranych szpitali. W badaniach wykorzystano modele ścieżkowe Wrighta, analizę skupień i analizę czynnikową.

Artur Czech, Zastosowanie wybranych metod doboru zmiennych diagnostycznych w badaniach konsumpcji w ujęciu pośrednim

W artykule podjęto próbę poszukiwania najefektywniejszego narzędzia doboru i analizy zestawu zmiennych diagnostycznych wykorzystywanych do badań konsumpcji w ujęciu pośrednim z użyciem ocen syntetycznych.

Katarzyna Dębowska, Metody regresyjne i dyskryminacyjne w modelowaniu upadłości przedsiębiorstw opartym na próbach niezbilansowanych

Celem artykułu była ocena dokładności wybranych metod regresyjnych i dyskryminacyjnych w prognozowaniu upadłości przedsiębiorstw. Jako metody wykorzystane zostały: analiza dyskryminacyjna, drzewa klasyfikacyjne oraz regresja logistyczna. W badaniu wykorzystano dane o przedsiębiorstwach reprezentujących różne sektory zamieszczone w bazie Emerging Markets Information Service (EMIS).

Joanicjusz Nazarko, Leonas Ustinovičius Metoda DEA w tworzeniu rankingów szkół wyższych

W artykule opisano ogólną koncepcję metody DEA oraz omówiono przykłady jej zastosowania do oceny efektywności działania jednostek szkolnictwa wyższego. Następnie wskazano na możliwość zastosowania metody DEA do konstrukcji rankingów szkół wyższych.

Joanna Ejdys, Zastosowanie analizy skupień w procesie segmentacji klientów

W artykule przedstawiono możliwość wykorzystania analizy skupień do segmentacji klientów. Celem przeprowadzonej analizy była identyfikacja grup podobnych do siebie klientów firmy zajmującej się sprzedażą specjalistycznych urządzeń do przykładowego sektora oraz określenie cech analizowanych klientów należących do poszczególnych grup.

Katarzyna Halicka, Wykorzystanie metod wielowymiarowej analizy porównawczej do budowy rankingów przedsiębiorstw elektroenergetycznych

Głównym celem artykułu było zbudowanie, a następnie przeanalizowanie utworzonych rankingów przedsiębiorstw elektroenergetycznych. Listy rankingowe

utworzono dla wybranych przedsiębiorstw elektroenergetycznych działających na krajowym rynku energii. Dane do analizy pochodzą ze sprawozdań finansowych za 2011 rok.

Beata Bal-Domańska, Ocena relacji zachodzących między inteligentnym rozwojem a spójnością ekonomiczną w wymiarze regionalnym z wykorzystaniem modeli panelowych

Celem artykułu była ocena relacji łączących inteligentny rozwój oraz spójność ekonomiczną. Do badań wykorzystano syntetyczne miary rozwoju oraz modele ekonometryczne dla danych panelowych wraz z właściwymi metodami estymacji. Badanie prowadzono dla regionów UE szczebla NUTS-2.

Karolina Bartos, Analiza ryzyka odejścia studenta z uczelni po uzyskaniu dyplomu licencjata – zastosowanie sieci MLP

Celem badania było ustalenie jakie czynniki mają największy wpływ na podjęcie decyzji przez studentów pierwszego stopnia studiów stacjonarnych Wydziału EZiT dotyczącej pozostania na tym wydziale i kontynuacji nauki na studiach drugiego stopnia. Ponadto w artykule przedstawiono prognozę, którzy dyplomowani absolwenci 2011/2012 studiów stacjonarnych pierwszego stopnia Wydziału EZiT podejmą studia drugiego stopnia na tym wydziale. Do uzyskania prognozy wykorzystano sieć MLP.

Mariola Chrzanowska, Ordinary kriging i inverse distance weighting jako metody szacowania cen nieruchomości na przykładzie warszawskiego rynku

W pracy przedstawiono propozycje przestrzennego modelowania cen nieruchomości warszawskich. Interpolacja danych zawartych w próbie pozwoliła zaprezentować na mapie rozkład cen nieruchomości w Warszawie. W badaniu wykorzystano dwie metody geostatystyczne: ordinary kriging i inverse distance weighting.

Adam Depta, Zastosowanie analizy wariancji w badaniu jakości życia

W pracy podjęto próbę aplikacji analizy wariancji do oceny jakości życia osób poddanych badaniom za pomocą kwestionariusza jakości życia SF-36v2™ Health Survey (Quality Metric Incorporated).

Iwona Foryś, Ewa Putek-Szeląg, Badanie przestrzennej zależności typowej struktury użytków nieruchomości zbywanych przez ANR

Przedmiotem przeprowadzonego badania była przestrzenna klasyfikacja gmin z uwagi na jakość (klasę) i rodzaj zbywanych gruntów rolnych w województwie zachodniopomorskim przez ANR w latach 1995–2011. Weryfikowano hipotezę dotyczącą przestrzennego związku pomiędzy strukturą zbywanych nieruchomości a ceną transakcyjną nieruchomości.

Anna Gryko-Nikitin, Dobór parametrów w równoległych algorytmach ewolucyjnych dla problemu plecakowego

Celem artykułu była prezentacja metodyki doboru parametrów równoległego algorytmu ewolucyjnego. Dobór parametrów zaprezentowany zostanie na przykładzie

problemu plecakowego, którym może być przybliżony np. problem doboru akcji do koszyka inwestycyjnego. Dyskretny problem plecakowy należy do zadań optymalizacyjnych NP -trudnych o złożoności obliczeniowej określanej jako $O(n^2)$.

Tomasz Ząbkowski, Piotr Jałowiecki, Zastosowanie reguł asocjacyjnych do analizy danych ankietowych w wybranych obszarach logistyki przedsiębiorstw przetwórstwa rolno-spożywczego

Artykuł prezentuje wybrany fragment badań dotyczący wykorzystania reguł asocjacyjnych do analizy danych ankietowych na temat organizacji logistyki w przedsiębiorstwach przetwórstwa rolno-spożywczego.

Maciej Beręsewicz, Tomasz Klimanek, Wykorzystanie estymacji pośredniej uwzględniającej korelację przestrzenną w badaniach rynku nieruchomości

Artykuł przedstawia propozycję wykorzystania metod estymacji pośredniej (w tym także metody, która uwzględnia korelację przestrzenną) do oszacowania pewnych charakterystyk rynku nieruchomości w województwie wielkopolskim. W konstrukcji odpowiednich estymatorów statystyki małych obszarów autorzy postanowili wykorzystać, oprócz modeli przekrojowych, także najnowsze podejścia w estymacji pośredniej wykorzystujące zależności przestrzenne.

Agnieszka Przedborska, Małgorzata Misztal, Przykład zastosowania metod statystyki wielowymiarowej w badaniach nad wydolnością stawów kolanowych u pacjentów z chorobą zwyrodnieniową leczonych operacyjnie

W pracy poddano analizie informacje dotyczące pacjentów z chorobą zwyrodnieniową stawów kolanowych leczonych operacyjnie osteotomią nadwiązadłową kości piszczelowej. Celem przeprowadzonych badań było wyodrębnienie grup pacjentów podobnych z punktu widzenia skuteczności i efektów klinicznych zastosowanej metody leczenia.

Magdalena Okupniak, Zastosowanie analizy blokowej w badaniu struktury polskich przedsiębiorstw

Głównym celem artykułu było przedstawienie wyników analizy układu bloków w badaniu struktury i zależności zachodzących pomiędzy podstawowymi wielkościami dotyczącymi przedsiębiorstw w Polsce. Analizie poddano takie zmienne, jak: liczbę przedsiębiorstw, liczbę zatrudnionych czy przychody, o których informacje zaczerpnięto z publikacji GUS pt. „Działalność przedsiębiorstw niefinansowych w Polsce w 2010 roku”.

Anna Olszewska, Wykorzystanie łańcuchów Markowa do konstrukcji kart kontrolnych nowej generacji

W artykule przedstawiono możliwości zastosowania łańcuchów Markowa do konstrukcji kart kontrolnych nowej generacji, skupiając prowadzone rozważania na ich adaptacyjnej wersji.

Daniel Papla, Modelowanie zarażania rynków finansowych

W pierwszej części artykułu omówiono obszerną literaturę dotyczącą kryzysów finansowych. Druga część zawiera prezentacje kilku wybranych modeli zarażania rynków finansowych wraz z ich porównaniem i odniesieniem do danych empirycznych pochodzących zwłaszcza z ostatnich lat. W ostatniej części zawarto wnioski z przeprowadzonej analizy.

Karolina Paradysz, Benchmarkowa analiza estymacji dla małych obszarów na lokalnych rynkach pracy

Statystyka małych obszarów (SMO) znajduje zastosowanie w warunkach niedostatecznej liczebności próby. Przedmiotem opracowania była analiza krytycznej oceny wyników dokonanych przez zespół metodologiczny w GUS. W referacie podjęto próbę dalszej weryfikacji metodologii SMO z punktu widzenia kryteriów zaproponowanych przez J. Paradysza.

Dorota Perło, Rozwój zrównoważony w wymiarze gospodarczym, społecznym i środowiskowym – analiza przestrzenna

Celem pracy była prezentacja modelu miękkiego zrównoważonego rozwoju pokazującego zależności między gospodarką, społeczeństwem a środowiskiem oraz ich wpływ na zrównoważony rozwój.

Radosław Pietrzyk, Efektywność inwestycji polskich funduszy inwestycyjnych z tytułu doboru papierów wartościowych i umiejętności wykorzystania trendów rynkowych

Celem artykułu była analiza efektywności 8 polskich funduszy akcyjnych w latach 2000–2011. Model Bhattacharya-Pfleiderera jest wykorzystywany do oceny umiejętności zarządzających doboru papierów wartościowych do portfela oraz wycucia trendów rynkowych. Badania wykazują, że zarządzający funduszami nie posiadają umiejętności osiągania wyższych stóp zwrotu z tytułu selekcji papierów wartościowych oraz wykorzystania trendów rynkowych. Można zaobserwować raczej negatywne zdolności zarządzających z tytułu prognozowania i wykorzystywania trendów rynkowych.

Ewa Putek-Szeląg, Urszula Gierałtowska, Analiza i diagnoza wielkości produkcji energii odnawialnej w Polsce na tle krajów Unii Europejskiej

Autorki przedstawiły analizę i diagnozę wielkości energii odnawialnej wytwarzanej w Polsce na tle krajów Unii Europejskiej. Dodatkowo zostały przedstawione podstawowe zależności pomiędzy wybranymi zmiennymi ogólnoeconomicznymi a wielkością energii odnawialnej.

Grażyna Łaska, Syntaksonomia numeryczna w klasyfikacji, identyfikacji i analizie przemian zbiorowisk roślinnych

Celem pracy była identyfikacja i klasyfikacja zbiorowisk zastępczych kształtujących się pod wpływem oddziaływania gospodarki leśnej. W syntaksonomii

numerycznej wykorzystano 628 zdjęć fitosocjologicznych ze zbiorowisk zastępczych w Puszczy Knyszyńskiej. Do klasyfikacji zastosowano pakiety statystyczne programu MVSP Plus. W badaniach stwierdzono, że skład gatunkowy i struktura zbiorowisk zastępczych, w poszczególnych etapach ich kształtowania się wykazuje istotną powtarzalność kombinacji florystycznych, gdyż zależy ona od sposobów gospodarowania, które regulują zasady hodowli lasu.

W ostatnim dniu konferencji miało miejsce posiedzenie członków Sekcji Klasyfikacji i Analizy Danych Polskiego Towarzystwa Statystycznego, któremu przewodniczył prof. dr hab. Tadeusz Kufel. Ustalono plan przebiegu zebrania obejmujący następujące punkty:

1. Sprawozdanie z działalności Sekcji Klasyfikacji i Analizy Danych PTS.
2. Informacje dotyczące planowanych konferencji zagranicznych.
3. Zapowiedzi kolejnych konferencji SKAD PTS.
4. Wybór Rady Sekcji SKAD PTS na kadencję 2013–2014.
5. Sprawy różne.

Prof. dr hab. Marek Walesiak otworzył posiedzenie sekcji SKAD PTS. Poinformował, że Sekcja liczy 212 członków (stan w dniu 10.09.2012 r.). Przypomniął, że na stronie internetowej Sekcji www.skad.org.pl znajduje się aktualny regulamin SKAD PTS, zatwierdzony na posiedzeniu Rady Głównej Polskiego Towarzystwa Statystycznego, które odbyło się w dniu 8 marca 2010 r. w Krakowie, a także wzór deklaracji członkowskiej. Poinformował także, że osoby przystępujące do Sekcji zobowiązane są do złożenia deklaracji członkostwa w PTS. W przypadku osób, które zostały członkami Sekcji przed dniem 8 marca 2010 r. i do tej pory takiej deklaracji nie złożyły, nie będzie ona wymagana.

Prof. Marek Walesiak przekazał, że opublikowany został zeszyt Prac Naukowych UE we Wrocławiu z serii *Taksonomia* nr 19 pt. „*Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania*” z konferencji SKAD, która odbyła się w Wągrowcu w dniach 21–23 września 2011 roku. Wszyscy obecni na konferencji w Lipowym Moście oraz nieobecni autorzy artykułów otrzymali egzemplarz publikacji. Dodał również, że w *Przeglądzie Statystycznym* nr 1/2012 (s. 93–118) ukazało się *Sprawozdanie z konferencji naukowej nt. „Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania*. Ponadto w *Przeglądzie Statystycznym* nr 1/2012 oraz 2/2012 zamieszczono wspomnienie o prof. dr. hab. Michale Kolupie oraz prof. dr. hab. Kazimierzu Zającu.

Prof. Marek Walesiak poinformował, że w 2013 roku ukażą się dwa zeszyty PN UE we Wrocławiu z serii *Taksonomia* nr 20 i 21. Poprosił o uwzględnienie wymogów edytorskich w przygotowaniu artykułów. Podkreślił również, że termin oddania pełnej treści artykułu upływa 16 października 2012 r.

Prof. Marek Walesiak przekazał informacje nt. działalności międzynarodowej oraz udziału w ważnych konferencjach członków sekcji SKAD. W 36-tej Konferencji Niemieckiego Towarzystwa Klasyfikacyjnego (The 36-th Annual Conference of the German Classification Society – GfKl) nt. *Data Analysis, Machine Learning and Knowledge Discovery*, która odbyła się w Hildesheim w dniach 1–3 sierpnia 2012 r. udział wzięło 19 osób z Polski, w tym 15 członków Sekcji, którzy wygłosili 13 referatów:

Uczelnia	Osoby	Liczba referatów
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Wydział Zarządzania, Informatyki i Finansów	Krzysztof Jajuga, Agnieszka Stanimir, Krzysztof Piontek, Paweł Rokita	3
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Wydział Ekonomii, Zarządzania i Turystyki	Marcin Pełka, Aneta Rybicka, Tomasz Bartłomowicz	5
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Wydział Zarządzania	Andrzej Sokołowski, Józef Pociecha, Paweł Lula	2
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Wydział Zarządzania	Justyna Brzezińska	1
Uniwersytet Gdański, Wydział Zarządzania	Krzysztof Najman, Kamila Migdał-Najman	1
Uniwersytet Szczeciński, Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania	Dominik Rozkrut	1
Narodowy Bank Polski	Eugeniusz Gatnar	–

Ponadto prof. dr hab. Krzysztof Jajuga był na konferencji GfKl członkiem Komitetu Naukowego oraz odpowiadał za przygotowanie i poprowadzenie Sesji nt. *Data Analysis in Finance*, a prof. dr hab. Józef Pociecha został poproszony przez organizatorów o przygotowanie i poprowadzenie Sesji nt. *Dynamic Cluster Analysis – Theory and Practice*.

W dniach 18–20 kwietnia 2012 r. w Poznaniu odbył się Kongres Statystyki Polskiej, z okazji jubileuszu 100-lecia Polskiego Towarzystwa Statystycznego. W konferencji uczestniczyło 45 członków Sekcji, którzy zaprezentowali łącznie 44 referaty i plakaty:

Uczelnia	Osoby	Liczba referatów / plakatów
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Wydział Zarządzania, Informatyki i Finansów	Krzysztof Jajuga, Walenty Ostasiewicz, Grzegorz Kowalewski, Alicja Grześkowiak, Agnieszka Stanimir	5
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Wydział Inżynieryjno-Ekonomiczny	Dorota Kwiatkowska-Ciotucha, Urszula Załuska	2
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Wydział Ekonomii, Zarządzania i Turystyki	Tadeusz Borys, Marek Walesiak, Elżbieta Sobczak, Małgorzata Markowska, Justyna Wilk, Marcin Pełka, Bartłomiej Jefmański	7
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Wydział Zarządzania	Andrzej Sokołowski, Józef Pociecha, Barbara Pawelek, Daniel Kosiorowski	4
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Wydział Informatyki i Komunikacji	Grażyna Trzpiot, Alicja Ganczarek-Gamrot	2
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Wydział Zarządzania	Grzegorz Kończak, Dorota Rozmus, Justyna Brzezińska	3
Uniwersytet Gdański, Wydział Zarządzania	Krzysztof Najman, Kamila Migdał-Najman	2
Uniwersytet Szczeciński, Wydział Zarządzania	Józef Hozer, Jacek Batóg, Dominik Rozkrut	3
Narodowy Bank Polski	Eugeniusz Gatnar	1
Instytut Badań Systemowych PAN w Warszawie	Jan W. Owsiniński	1
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej	Elżbieta Gołata, Tomasz Klimanek, Marcin Szymkowiak, Grażyna Dehnel, Jan Paradysz	5
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Wydział Zarządzania	Krzysztof Szwarz	1
Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu, Wydział Ekonomiczno-Społeczny	Aleksandra Łuczak, Feliks Wysocki	1
Uniwersytet Łódzki, Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny	Jadwiga Suchecka, Artur Mikulec	2
Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, Wydział Ekonomiczny	Katarzyna Wawrzyniak, Iwona Bąk	2
Wyższa Szkoła Bankowa we Wrocławiu, Wydział Finansów i Zarządzania	Anna Błackowska	1
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie, Wydział Zastosowań Informatyki i Matematyki	Hanna Dudek	1
Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Skierniewicach, Wydział Ekonomii i Administracji	Danuta Rozpędowska-Matraszek	1

Kolejny punkt posiedzenia Sekcji obejmował konferencje zagraniczne, które odbędą się w 2013 r. Prof. Marek Walesiak poinformował o dwóch konferencjach obejmujących tematykę zgodną z profilem Sekcji. W Luksemburgu w dniach 10–12 lipca 2013 r. odbędzie się Konferencja *European Conference on Data Analysis*, organizowana przez Niemieckie Towarzystwo Klasyfikacyjne (German Classification Society – GfKl) oraz Francuskie Towarzystwo Klasyfikacyjne (French Classification Society – SFC). Z kolei w Tilburgu w dniach 14–17 lipca 2013 r. będzie miała miejsce konferencja Międzynarodowej Federacji Towarzystw Klasyfikacyjnych (International Federation of Classification Societies – IFCS).

W następnym punkcie posiedzenia podjęto kwestię organizacji kolejnych konferencji SKAD. Organizacji konferencji SKAD w 2013 r. podejmie się Katedra Ekonometrii i Informatyki Wydziału Ekonomii, Zarządzania i Turystyki Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu. W związku z brakiem deklaracji na 2014 rok, sprawa organizacji konferencji jest nadal otwarta.

W kolejnej części zebrania dokonano wyboru członków Rady SKAD na kadencję 2013–2014. Prof. Tadeusz Kufel przypomniał skład obecnej Rady: prof. M. Walesiak, prof. K. Jajuga, prof. A. Sokołowski, prof. E. Gatnar i dr K. Najman. Kadencja Rady trwa do 31 grudnia 2012 r. Powołano Komisję Skrutacyjną, której przewodniczącym został prof. Tadeusz Kufel, a członkami dr Mariola Chrzanowska i dr Małgorzata Markowska.

Profesor Tadeusz Kufel poprosił zebranych o zaproponowanie kandydatur do Rady Sekcji SKAD.

Prof. Marek Walesiak zaproponował kandydatury obecnego składu Rady Sekcji. Ponadto zgłosił dwie dodatkowe kandydatury do składu Rady Sekcji: prof. Józefa Pocięchę (Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie) oraz prof. Barbarę Pawełek (Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie). Zgłoszone osoby potwierdziły zgodę na kandydowanie. Następnie zgłoszony został wniosek o zamknięcie listy kandydatów, który został jednogłośnie poparty. Komisja Skrutacyjna przeprowadziła głosowanie tajne.

W głosowaniu uczestniczyło 36 członków Sekcji. Uzyskano następujące wyniki: Prof. M. Walesiak 36 głosów na „tak”; Prof. K. Jajuga 36 głosów na „tak”; Prof. A. Sokołowski 36 głosów na „tak”; Prof. E. Gatnar 35 głosów na „tak”; Dr K. Najman 36 głosów na „tak”; Prof. J. Pocięcha 36 głosów na „tak”; Prof. B. Pawełek 36 głosów na „tak”.

W wyniku głosowania, do nowej Rady SKAD, przyjęto wszystkie zaproponowane kandydatury. Następnie nowo wybrana Rada udała się na posiedzenie tajne, podczas którego dokonano wyboru reprezentantów Rady Sekcji, w następujących osobach:

1. Józef Pocięcha – przewodniczący Rady Sekcji.
2. Marek Walesiak – zastępca przewodniczącego Rady Sekcji.
3. Barbara Pawełek – sekretarz Rady Sekcji.
4. Krzysztof Jajuga, Andrzej Sokołowski, Eugeniusz Gatnar, Krzysztof Najman – członkowie Rady Sekcji

Prof. Józef Pociecha jako nowy Przewodniczący Sekcji wspomniał o pierwszej konferencji SKAD, która odbyła się w 1979 r. w Szklarskiej Porębie. Podkreślił, że statutowym obowiązkiem Sekcji jest organizowanie konferencji SKAD. Prof. Józef Pociecha zachęcał do udziału w konferencjach GfKl i IFCS. Następnie przypomniał, że w ramach GfKl odbywają się również konferencje bilateralne: Niemcy-Japonia, Niemcy-Włochy, Niemcy-Polska. Niemiecko-polskie sympozjum GPSDAA organizuje prof. Hermann Locarek-Junge z Uniwersytetu Technicznego w Dreźnie, które odbędzie się w Dreźnie w dniach 19–20 września 2013 r. W sympozjum będą mogli wziąć udział zaproszeni członkowie Sekcji.

Prof. Józef Pociecha podziękował wszystkim za udział w konferencji SKAD i wyraził nadzieję, że wszyscy referenci twórczo wzmocnią działalność Sekcji. W związku z brakiem innych spraw zamknięto posiedzenie Sekcji.

Krzysztof Jajuga, Marek Walesiak – Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Joanicjusz Nazarko – Politechnika Białostocka

JADWIGA SUCHECKA, EMILIA MODRANKA

SPRAWOZDANIE Z II MIĘDZYNARODOWEJ KONFERENCJI NAUKOWEJ NT. „EKONOMETRIA PRZESTRZENNA I REGIONALNE ANALIZY EKONOMICZNE”

W dniach 4–5 czerwca 2012 roku odbyła się II Międzynarodowa Konferencja Naukowa pt. „Ekonometria Przestrzenna i Regionalne Analizy Ekonomiczne”. Konferencja zorganizowana przez Katedrę Ekonometrii Przestrzennej Uniwersytetu Łódzkiego we współpracy z Komitetem Statystyki i Ekonometrii Polskiej Akademii Nauk stanowiła drugą edycję seminarium z cyklu poświęconego zagadnieniom ekonometrii przestrzennej i analizom regionalnym (I Konferencja odbyła się w dniach 22–23.06.2010 r.). Obrady odbyły się w Centrum Szkoleniowo-Konferencyjnym Uniwersytetu Łódzkiego.

Honorowego Patronatu udzielili: prof. Jean H. P. Paelinck (School of Public Policy, George Mason University), Prezes Głównego Urzędu Statystycznego prof. Janusz Witkowski oraz Dziekan Wydziału Ekonomiczno-Socjologicznego Uniwersytetu Łódzkiego prof. Jan B. Gajda. W pracach Komisji Naukowej, pod przewodnictwem prof. Jeana H. P. Paelincka oraz prof. Bogdana Sucheckiego (Uniwersytet Łódzki) uczestniczyli prof. Andrzej S. Barczak (Akademia Ekonomiczna w Katowicach), prof. Anil K. Bera (University of Illinois, Urbana), prof. Danuta Strahl (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), prof. Jadwiga Suchecka (Uniwersytet Łódzki) oraz prof. Elżbieta Szulc (Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu).

Celem tegorocznej Konferencji była prezentacja najnowszych osiągnięć w zakresie metod, narzędzi i rezultatów badań empirycznych oraz wymiana doświadczeń związanych z teoretycznymi i praktycznymi aspektami ekonometrii i statystyki przestrzennej, oraz analizami regionalnymi, jak i kreowanie nowych kierunków badań. Seminarium umożliwiło integrację środowiska ekonomistów wykorzystujących metody ekonometrii i statystyki przestrzennej oraz prowadzących analizy ekonomiczne w ujęciu regionalnym.

Udział wybitnych specjalistów z dziedziny ekonometrii i statystyki przestrzennej: prof. Jeana H. P. Paelincka – założyciela Towarzystwa Ekonometrii Przestrzennej, prof. Anila K. Bery (University of Illinois), prof. Rogera Bivanda (NHH Norwegian School of Economics), prof. Daniela A. Griffitha (University of Texas at Dallas), prof. Christiana Le Bas (Université Lumière Lyon 2), prof. Jesús Mura (University of Zaragoza), prof. Anatoly I. Pilyavskiego (Lviv Academy of Commerce) spowodował,

że Konferencja cieszyła się dużą frekwencją kadry naukowej z wielu polskich uczelni, przedstawicieli Głównego Urzędu Statystycznego, Wydawnictwa C.H. Beck, Mazowieckiego Biura Planowania Regionalnego w Warszawie oraz studentów i słuchaczy studiów doktoranckich Uniwersytetu Łódzkiego. W konferencji uczestniczyło łącznie 135 osób (w tym 8 gości zagranicznych oraz 36 studentów specjalności Regionalistyka z kierunku Gospodarka Przestrzenna).

Problematyka poruszana w trakcie obrad Konferencji obejmowała zagadnienia związane z modelami i metodami ekonometrii przestrzennej, przestrzenno-czasowym modelowaniem zjawisk gospodarczych, eksploracyjną analizą danych przestrzennych, modelami i metodami ilościowymi nowej ekonomii geograficznej, wzrostem regionalnym i problemami konwergencji, analizami przestrzennymi w ekonomice zdrowia, przestrzennymi analizami rynków finansowych, zależnościami przestrzennymi na rynku pracy, przestrzennymi badaniami rynków nieruchomości, międzynarodową wymianą handlową, przestrzennym zróżnicowaniem wynagrodzeń oraz problemami migracji, oraz przestrzennym modelowaniem ekosystemów. Wyróżnione obszary tematyczne są ściśle związane z zakresem kilkunastoletniej działalności naukowo-badawczej i edukacyjnej Katedry Ekonometrii Przestrzennej, Głównego Organizatora Konferencji oraz założeń przyjętych przez Komitet Ekonometrii i Statystyki PAN.

O potrzebie organizowania konferencji naukowych dotyczących analiz przestrzennych z wykorzystaniem zaawansowanych metod ilościowych może świadczyć fakt, że w ciągu dwóch dni trwania Konferencji oraz w trakcie 8 sesji panelowych, zaprezentowano 64 referaty, w tym 35 w języku angielskim. Dużym zainteresowaniem wśród uczestników Konferencji oraz studentów Uniwersytetu Łódzkiego, cieszyły się obrady sesji doktorantów oraz prezentacje referatów podczas sesji plakatowej prowadzonej przez profesorów: Jean H. P. Paelincka i Rogera Bivanda.

W celu promowania prac badawczych młodych naukowców zajmujących się teoretycznymi i praktycznymi aspektami ekonometrii i statystyki przestrzennej oraz analizami regionalnymi, zorganizowano konkurs na najlepsze referaty i poster. Nagrody dla laureatów w postaci bezterminowych licencji oprogramowania OxMetrics oraz zestawów książkowych ufundowała firma Timberlake Consultants Ltd. Komisja konkursu pod przewodnictwem prof. Jadwigi Suheckiej, w składzie: prof. Jean H. P. Paelinck, prof. R. Bivand, prof. UMK dr hab. Elżbieta Szulc, prof. UEK dr hab. Andrzej Sokołowski, oceniająca poprawność zastosowania wybranych metod badawczych, wartość naukową, poznawczą i praktyczną prac oraz uzyskanych wyników, wyłoniła sześciu laureatów. W kategorii konkursu dla doktorantów na najlepszy plakat: I miejsce zdobyły mgr Joanna Górna i mgr Karolina Górna z Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, za poster pt. *Przestrzenne i przestrzenno-czasowe tendencje i zależności PKB w wybranych krajach Europy w latach 2001–2009*, II miejsce przyznano mgr Danucie Rozpędowskiej-Matraszek z Uniwersytetu Łódzkiego za plakat pt. *Analiza wielowymiarowych danych przestrzenno-czasowych na przykładzie zatrudnienia w opiece zdrowotnej w Polsce według województw*, III miejsce zdobył mgr Piotr Strożek z Uniwersytetu Łódzkiego za plakat pt. *Analiza porównawcza*

gospodarek opartych na wiedzy w państwach Unii Europejskiej z wykorzystaniem metodologii KAM.

W kategorii konkursu na najlepszy referat Komisja konkursowa przyznała: I miejsce mgr. Maciejowi Beręsewiczowi z Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, pt. *Regresja PLS z uwzględnieniem wag przestrzennych na przykładzie modelowania poparcia dla partii politycznych w wyborach do Sejmu 2011 roku*. II miejscem nagrodzono wystąpienie mgr Renaty Jaworskiej z Uniwersytetu Łódzkiego pt. *Zastosowanie modelu MIMIC do budowy indeksu oddziaływania na środowisko*. III miejsce zdobył mgr Maciej Jewczak z Uniwersytetu Łódzkiego za referat pt. *Problemy refundacji leków w analizach przestrzennych*.

Referaty wygłoszone oraz zaprezentowane w formie plakatów przez uczestników Konferencji, po otrzymaniu pozytywnej recenzji, zostaną opublikowane w jednym z dwóch czasopism, wskazanym przez Recenzentów: w serii wydawniczej Uniwersytetu Łódzkiego pt. *Folia Oeconomica* pt. „Ekonometria Przestrzenna i Regionalne Analizy Ekonomiczne”, w języku polskim i w czasopiśmie z serii pt. *Comparative Economic Research. Central and Eastern Europe* w języku angielskim.

Uwzględniając duże zainteresowanie problematyką Konferencji, organizatorzy planują jej kolejną edycję w czerwcu 2014 roku.

SESJA PLENARNA I

Prof. Jean Paelinck (School of Public Policy, George Mason University), wygłosił wykład pt.: *Some challenges for spatial econometricians*. Problematykę wkładu skoncentrował na pięciu zagadnieniach związanych z przestrzennym modelowaniem ekonometrycznym: przestrzenną współzależnością, asymetrią przestrzenną, allotopią, nieliniowością oraz topologią danych. Prezentowane kwestie będące wynikiem najnowszych badań, stanowią nowe wyzwania dla ekonometryków zajmujących się modelowaniem przestrzennym.

Prof. Daniel A. Griffith (University of Texas at Dallas), w wykładzie pt.: *Selected challenges from spatial statistics for spatial econometricians* przedstawił wyzwania związane z występowaniem autokorelacji przestrzennej oraz powiązane z nią wybrane zagadnienia statystyki przestrzennej, opisane w monografii *Non-standard Spatial Statistics and Spatial Econometrics*, we współautorstwie z prof. Paelinckiem. Rozważania teoretyczne koncentrują się na wyzwaniach wynikających z autokorelacji przestrzennej, nawiązując do pojęć Gaussowskiej zmiennej losowej, topologicznych cech danych georeferencyjnych, wektorów własnych, filtrów przestrzennych, georeferencyjnych mechanizmów generowania danych oraz interpretacji efektów losowych.

Prof. Anil K. Bera (University of Illinois) w wykładzie pt.: *Testing spatial panel models* wskazał na zasadność stosowania wybranych testów do weryfikacji własności estymatorów modeli. Druga część wystąpienia koncentrowała się na zastosowa-

niu wybranych testów statystycznych do oceny własności estymatorów przestrzennych modeli panelowych oraz dynamicznych przestrzennych modeli panelowych.

SESJA PLENARNA II

Prof. Roger Bivand (NHH Norwegian School of Economics), w wystąpieniu nt. *Comparing estimation methods for spatial econometrics* przedstawił metody estymacji przestrzennych modeli ekonometrycznych, testowania dokładności oszacowań, doboru macierzy wag przestrzennych oraz wyniki testów weryfikujących własności reszt modeli przeprowadzonych w pakietach programu R, programach Matlab, Stata, Pysal oraz Open GeoDa. Autor zwrócił uwagę na przyczyny rozbieżności występujących pomiędzy wynikami obliczeń oraz oszacowań wykonanych w porównywanych pakietach ekonometrycznych.

Prof. zw. dr hab. Władysław Welfe (Uniwersytet Łódzki), *Makroekonometryczne modele gospodarki światowej i modele regionalne*. W referacie Autor przedstawił struktury makroekonometrycznych modeli występujących w modelach gospodarki światowej oraz struktury modeli charakterystyczne dla modeli regionalnych. Przedmiotem rozważań teoretycznych były specyficzne własności modeli regionalnych, a także możliwości ich rozbudowy.

Prof. UKSW dr hab. Włodzimierz Okrasa (Główny Urząd Statystyczny), w wystąpieniu pt. *Przestrzenna integracja badań społecznych i statystyka publiczna – uwagi metodologiczne*, przedstawił współzależności pomiędzy rozwojem nowoczesnych metod analizy przestrzennej a dostępnością odpowiednich danych generowanych w ramach statystyki publicznej. Szczególną uwagę poświęcono możliwości pełniejszego wykorzystania przestrzennie zintegrowanych nauk społecznych oraz narzędzi analitycznych ekonometrii przestrzennej w usprawnieniu procesów decyzyjnych na szczeblu regionalnym i lokalnym.

SESJA I

Prof. Ramiro Gil-Serrate (Centro Universitario de la Defensa (CUD) and Department of Geography and Environment, LSE) oraz prof. Jesús Mur (Economic Analysis Department, University of Zaragoza), w wystąpieniu pt. *Price dynamics in the Spanish housing market: from boom to bust. Evidence from a spatial panel for the period 1995–2010*, przedstawili proces zmian zachodzących na rynku nieruchomości mieszkaniowych. Celem analiz była identyfikacja czynników ekonomicznych decydujących o poziomie cen mieszkań na podstawie modelu dla danych panelowych.

Dr Alicja Olejnik (Uniwersytet Łódzki), *Zastosowanie podejścia wielowymiarowego do oceny struktury przestrzenno-czasowej zjawisk ekonomicznych*. Autorka referatu przedstawiła nowo opracowaną metodologię szacowania wielowymiarowego

autoregresyjnego modelu przestrzennego WAMP z uwzględnieniem wymiaru czasowego. Podjęła próbę oceny procesu przestrzenno-czasowego z zastosowaniem wielowymiarowej macierzy wag przestrzennych.

Dr Tomasz Żądło (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach), *O błędnej specyfikacji macierzy wag w statystyce małych obszarów w badaniach wielookresowych*. W artykule rozważany jest problem predykcji wartości globalnej w podpopulacji opisywanej przez skorelowane przestrzennie dane wielookresowe. Autor przedstawił wyniki badania symulacyjnego najlepszego liniowego nieobciążonego predyktora w przypadkach prawidłowej i nieprawidłowej specyfikacji macierzy wag.

Prof. zw. dr hab. Janusz L. Wywił (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach), *O przestrzennych planach losowania*. Praca dotyczy estymacji wartości średniej w populacji skończonej na podstawie znanej statystyki Horvitz-Thompsona. Autor przedstawił przegląd planów losowania prób użytecznych w losowaniu prób z populacji przestrzennych. W szczególności skupiono się na planach losowania prób proporcjonalnych do funkcji kwantyli tzw. cechy dodatkowej obserwowanej w całej populacji.

Prof. Anatoly I. Pilyavskiy, dr Yuriy I. Matsiv, dr Olga D. Vovchak, (Lviv Academy of Commerce), *Measuring Cost Efficiency in Ukrainian Banks in 2008*. W artykule przedstawiono wyniki stochastycznej analizy granicznej (SFA) efektywności kosztowej banków ukraińskich. W modelowaniu działalności bankowej zastosowano metodę pośrednika, jako jedną z powszechnie stosowanych w literaturze. Biorąc pod uwagę wyniki testów statystycznych, wybrano funkcjonalną formę funkcji kosztów.

Dr Elżbieta Antczak (Uniwersytet Łódzki), *Degradacja powietrza a dobrobyt społeczno-ekonomiczny – przestrzenna analiza panelowa*. Celem badania przeprowadzonego przez Autorkę była weryfikacja hipotezy o istnieniu negatywnego wpływu zanieczyszczenia środowiska (powietrza) na poziom dobrobytu i jakość życia z zastosowaniem przestrzennych modeli panelowych. Analizie poddano siłę i kierunek oddziaływania skutków degradacji powietrza na poziom dobrobytu w wymiarze czasowym oraz przestrzennym.

SESJA II

Dr Tomasz Kossowski, dr Jan Hauke (Uniwersytet Adama Mickiewicza w Poznaniu), *O pewnych własnościach dwuwymiarowej miary związku przestrzennego*. W artykule Autorzy poddali weryfikacji wyniki badań przeprowadzonych przez Sang-II Lee nad nową dwuwymiarową miarą związku przestrzennego, nazwaną statystyką *L*. Statystyka ta integruje współczynnik *r* Pearsona i statystykę *I* Morana oraz jest uzależniona od współczynnika rozmycia przestrzennego.

Prof. Paweł Churski, dr Jan Hauke (Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu), *Metody ekonometryczne w identyfikacji centrów wzrostu oraz obszarów*

stagnacji – przykład analizy dla jednostek NUTS 4 w Polsce. Celem prezentowanej przez Autorów pracy było zaproponowanie metod statystycznych prowadzących do identyfikacji i rozróżniania obszarów wzrostu i stagnacji. Badanie zostało przeprowadzone na podstawie zmiennych charakteryzujących rozwój społeczno-ekonomiczny jednostek NUTS 4 w Polsce w latach 2000–2010.

Dr Elżbieta Litwińska (Politechnika Wrocławska), w artykule pt. *Analiza przestrzenna rynku pracy na przykładzie województwa dolnośląskiego* przedstawiła wyniki badań nad dynamiką charakterystyk opisujących zmiany na rynku pracy w powiatach województwa dolnośląskiego. W końcowej części referatu zostały zaprezentowane wnioski dotyczące wpływu Wrocławia, stolicy Dolnego Śląska, na sytuację na rynku pracy w gminach sąsiednich, tworzących Wrocłowski Obszar Metropolitalny.

Dr Karolina Lewandowska-Gwarda (Uniwersytet Łódzki), zaprezentowała referat nt. *Przestrzenno-czasowa analiza stopy bezrobocia w Polsce.* Celem wystąpienia była prezentacja wyników analizy poziomu stopy bezrobocia w Polsce w ujęciu przestrzenno-czasowym. W badaniu wykorzystano narzędzia GIS i ESDA służące wizualizacji zmiennych oraz identyfikacji interakcji przestrzennych zachodzących pomiędzy badanymi jednostkami terytorialnymi na rynku pracy w kraju. Do opisu wpływu wybranych zmiennych makroekonomicznych na kształtowanie się poziomu stopy bezrobocia w Polsce według powiatów, w latach 2006–2010, został wykorzystany wielorównaniowy model o równaniach pozornie niezależnych z autoregresją przestrzenną i regresją krzyżową.

Dr Barbara Dańska-Borsiak, dr Iwona Laskowska (Uniwersytet Łódzki), wygłosiły referat pt. *Determinanty łącznej produktywności czynników produkcji w Polsce. Analiza regionalna.* Autorki w prezentowanym artykule podjęły próbę klasyfikacji województw ze względu na obserwowany poziom *TFP*, w celu określenia czynników determinujących łączną produktywność czynników produkcji w Polsce w ujęciu regionalnym. Autorki posłużyły się panelowym modelem dynamicznym. Badanie przeprowadzono na danych rocznych dla województw.

Dr Dorota Ciołek oraz dr Tomasz Brodzicki (Uniwersytet Gdański), w referacie: *Identyfikacja efektów zewnętrznych klastrów przemysłowych w Polsce* poprzez modyfikację metody zaproponowanej przez Rodrigueza-Pose'a i Comptoura (2010), podjęli próbę weryfikacji hipotez na temat siły i kierunku zależności występujących pomiędzy wzrostem gospodarczym w polskich województwach, a obecnością formacji klastrowych w danym regionie oraz regionach sąsiednich. Zastosowana metoda analizy ilościowej polegała na estymacji przekrojowej i przekrojowo-czasowej regresji wzrostu w regionach, w której obok ogólnie uznanych potencjalnych determinant wzrostu, uwzględnione zostały również zmienne odzwierciedlające liczbę i jakość klastrów w regionie.

SESJA III

Prof. UE dr hab. Elżbieta Sobczak (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), prezentowała referat pt. *Inteligentna specjalizacja struktury pracujących w krajach Unii Europejskiej – analiza dynamiczna z wykorzystaniem shift-share analysis*. Celem referatu była dynamiczna analiza i ocena struktury pracujących w krajach Unii Europejskiej w oparciu o strukturalno-geograficzną metodę przesunięć udziałów (Shift-Share Analysis). Ocenie zróżnicowania i przemian poddano struktury pracujących w sektorach ekonomicznych wyodrębnionych wg intensywności działalności badawczo-rozwojowej w krajach Unii Europejskiej w latach 2008–2010.

Dr Maria Klonowska-Matynia, dr Grzegorz Przekota (Politechnika Koszalińska), *Asymetryczne reakcje wynagrodzeń na zmiany stopy bezrobocia i inflacji*. Główny cel artykułu stanowiło podjęcie próby oszacowania siły i kierunku reakcji zmian nominalnych i realnych wynagrodzeń w Polsce na zmiany stopy bezrobocia oraz stopy inflacji. Analizy ilościowe zostały przeprowadzone w oparciu o estymację modeli ECM bez asymetrii i z asymetrią, modeli VAR z funkcją reakcji na impuls i dekompozycją wariancji błędu prognozy oraz modeli VECM.

Dr Ewa Kusideł (Uniwersytet Łódzki), *Konwergencja społeczna w Polsce*. W odróżnieniu od licznych badań ilościowych nad gospodarczym aspektem konwergencji, Autorka skoncentrowała się na opisie procesu konwergencji w wymiarze społecznym. Część empiryczną badania stanowiła zarówno analiza pojedynczych miar konwergencji społecznej, jak i konstrukcja wojewódzkich mierników HDI, służących pomiarowi spójności społecznej polskich województw.

Prof. zw. dr hab. Danuta Strahl (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), dr Małgorzata Markowska (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), *Klasyfikacja europejskiej przestrzeni regionalnej ze względu na poziom inteligentnego rozwoju*. W referacie przedstawiono wyniki klasyfikacji europejskiej przestrzeni regionalnej ze względu na stopień zaawansowania i poziom inteligentnego rozwoju w regionach szczebla NUTS 2, w oparciu o wartości statystyk pozycyjnych. Rozwój inteligentny regionów, według założeń badania uwzględniał trzy filary: innowacyjność, kreatywność (Gospodarka Oparta na Wiedzy) i inteligentną specjalizację. Cechy te, opisane za pomocą odpowiednich charakterystyk, stanowiły podstawę do konstrukcji miar agregatowych dla określonych filarów, a także do klasyfikacji regionów.

Dr Artur Gajdos (Uniwersytet Łódzki), *Zróżnicowanie wojewódzkie struktury pracujących według poziomu wykształcenia i grup zawodów w Polsce*. Głównym celem opracowania była prezentacja zmian struktury pracujących według poziomu wykształcenia oraz wielkich grup zawodowych w Polsce na poziomie wojewódzkim. W opracowaniu wykorzystano dane dotyczące struktury pracujących według poziomu wykształcenia w wielkich grupach zawodowych w przekroju wojewódzkim pochodzące z Badania Aktywności Ekonomicznej Ludności (Labour Force Survey).

Dr Iwona Müller-Frączek, dr Michał Bernard Pietrzak (Uniwersytet Mikołaja Kopernika), *Zastosowanie modelu MESS w przestrzenno-czasowej analizie stopy bezrobocia w Polsce*. Autorzy artykułu przedstawili wyniki przestrzenno-czasowej analizy stopy bezrobocia rejestrowanego w latach 2004–2009, w powiatach Polski. W badaniu wykorzystano Matrix Exponential Model, w którym zależności przestrzenne reprezentowane są w postaci wykładniczej, opartej na macierzy sąsiedztwa. Wyniki badania, otrzymane przy zastosowaniu modelu MESS, zostały skonfrontowane z wynikami estymacji modelu SAR.

Dr Joanna Muszyńska, dr Iwona Müller-Frączek, dr Michał Bernard Pietrzak (Uniwersytet Mikołaja Kopernika), *Analiza procesu konwergencji wydatków na żywność gospodarstw domowych w Polsce*. Tematyka artykułu dotyczyła zagadnienia wydatków na żywność gospodarstw domowych w Polsce, których poziom oraz dynamika, według założeń badania, stanowią miarę dobrobytu badanych gospodarstw. Celem artykułu była ekonometryczna analiza procesu konwergencji w zakresie udziału wydatków na żywność gospodarstw domowych w Polsce w latach 1999–2010. Do oceny procesu wykorzystano wyniki estymacji dynamicznego modelu panelowego, w przekroju wojewódzkim.

Dr Małgorzata Markowska (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), *Wykorzystanie miary dynamicznej atrakcyjności grup w przestrzenno-czasowej analizie innowacyjności regionów*. W referacie przeprowadzono dynamiczną (lata 1999–2011) klasyfikację regionów UE szczebla NUTS 2, ze względu na wartości wybranych charakterystyk innowacyjności z wykorzystaniem metody k-średnich. Dalszym etapem badania była ocena atrakcyjności dynamicznej otrzymanych grup. Do oceny otrzymanych wyników klasyfikacji, w aspekcie oddziaływania klas, zaproponowano miarę dynamicznej atrakcyjności grup w przestrzenno-czasowej analizie skupień.

Dr hab. inż. Stanisław Sirko, dr Marzena Piotrowska-Trybull (Akademia Obrony Narodowej w Warszawie), *Powiązania jednostek wojskowych z jednostkami samorządu terytorialnego: ujęcie ilościowe i jakościowe*. W artykule zidentyfikowano istniejące powiązania społeczne, gospodarcze i przestrzenne jednostek wojskowych z gminami i ich mieszkańcami oraz określono siłę tych powiązań. Przedstawiono wyniki badania sondażowego przeprowadzonego na próbie 850 respondentów w wybranych polskich gminach, w których stacjonują jednostki wojskowe. Badanie przeprowadzono także na reprezentatywnej dla sił zbrojnych, próbie żołnierzy, których jednostki znajdują się w różnych rejonach Polski.

SESJA IV (DOKTORANCI)

Mgr Agata Żółtaszek (Uniwersytet Łódzki), *Przestrzenna analiza mikrosymulacyjna udziałów bezpośrednich wydatków na ochronę zdrowia w dochodach gospodarstw domowych w Polsce w latach 2009–2018*. Autorka przedstawiła wyniki

eksperymentu mikrosymulacyjnego umożliwiającego analizę udziałów prywatnych bezpośrednich wydatków na ochronę zdrowia w dochodach gospodarstw domowych w Polsce w latach 2009–2018. Uzyskane wyniki posłużyły do przeprowadzenia przestrzennych analiz średnich udziałów wydatków ambulatoryjnych i farmaceutycznych według województwach.

Mgr Edyta Łaszkiewicz (Uniwersytet Łódzki), *Wybrane aspekty budowy przestrzennych modeli wielopoziomowych*. Celem przedstawionego przez Autorkę artykułu było wskazanie możliwości płynących z zastosowania modeli wielopoziomowych w analizach procesów przestrzennych. W pracy omówiono techniki implementacji już istniejących konstrukcji w analizach struktur przestrzennych. Dodatkowo zaprezentowano możliwości rozszerzenia tradycyjnych modeli wielopoziomowych w kierunku uwzględnienia interakcji przestrzennych.

Mgr Renata Jaworska (Uniwersytet Łódzki), *Zastosowanie modelu MIMIC do budowy indeksu oddziaływania na środowisko*. W artykule skoncentrowano się na możliwości oszacowania indeksu oddziaływania na środowisko w wybranych krajach Unii Europejskiej z wykorzystaniem modelu MIMIC (Multiple Indicators Multiple Causes). Modele MIMIC należące do klasy modeli równań strukturalnych (SEM), pozwalają na estymację modeli ze zmienną ukrytą. Ten typ modeli pozwala na badanie zależności pomiędzy wskaźnikami pełniącymi rolę przyczyn i skutków oraz zmienną nieobserwowalną – indeksem oddziaływania na środowisko. Wyniki badania umożliwiły stworzenie rankingu krajów Unii Europejskiej ze względu na jakość środowiska.

Mgr Maciej Jewczak (Uniwersytet Łódzki), w artykule pt. *Problemy refundacji leków w analizach przestrzennych*, podjął próbę oceny występowania przestrzennych zależności pomiędzy liczebnością aptek a liczbą lekarzy, liczbą zakładów opieki zdrowotnej, jak również determinant wskazujących na proces starzenia się społeczeństwa i stanu zdrowia Polaków. Podsumowanie badań stanowi specyfikacja oraz estymacja modelu przestrzennego opisującego liczbę aptek w zależności od różnych czynników społeczno-gospodarczych.

Mgr Aneta Staszek, mgr Anna Weszczak (Uniwersytet Łódzki), *Wydatki na ochronę zdrowia: analiza porównawcza podregionów w Polsce*. Przedmiot artykułu stanowiła charakterystyka wydatków na ochronę zdrowia w Polsce w oparciu o wyniki estymacji przestrzenno-czasowego modelu ekonometrycznego. W opracowaniu podjęto próbę wyjaśnienia zależności pomiędzy wydatkami na ochronę zdrowia a rozwojem gospodarczym kraju oraz innymi zmiennymi ekonomiczno-demograficznymi: poziomem dochodów, poziomem płodności, śmiertelności, liczbą ludności powyżej 65 roku życia, liczbą ludności wiejskiej.

Mgr Maciej Beręsewicz (Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu), *Regresja PLS z uwzględnieniem wag przestrzennych na przykładzie modelowania poparcia dla partii politycznych w wyborach do Sejmu 2011 roku*. W artykule skoncentrowano się na analizie danych wyborczych na poziomie powiatów, za pomocą modelu Przestrzennej Regresji Metodą Częstkową Najmniejszych Kwadratów

(SPLSR), umożliwiającego uwzględnienie współliniowości zmiennych opisujących kształtowanie się poparcia partii politycznych. Autor dokonał analizy porównawczej SPLSR z modelami klasycznej regresji liniowej uwzględniającej czynnik przestrzenny, co umożliwiło weryfikację przydatności modelu SPLSR w badaniach społeczno-ekonomicznych na przykładzie modelowania poparcia dla partii politycznych.

Mgr Joanna Górniak (Uniwersytet Łódzki), *Dostępność transportowa a rozwój polskich województw w świetle analizy konwergencji regionalnej*. W referacie omówiono problem dostępności transportowej z wyróżnieniem infrastruktury drogowej i kolejowej na tle spójności społeczno-gospodarczej w poszczególnych województwach w Polsce. Poziom rozwoju transportu oszacowano na podstawie syntetycznego miernika rozwoju. Szacowanie stopnia zbieżności pomiędzy regionami przeprowadzono na podstawie testów klasycznej konwergencji regionalnej.

Mgr Edyta Żmurkow (Uniwersytet Łódzki), *Podaż wykwalifikowanej kadry a perspektywy innowacyjnego rozwoju województw*. Przedmiotem opracowania była analiza podaży wykwalifikowanej kadry w kontekście perspektyw przyszłego rozwoju innowacyjnego województw w Polsce. Analiza powyższych zjawisk oraz związku między nimi została przeprowadzona m.in. na podstawie badania profilu edukacyjnego województw oraz analizy potencjalnych kierunków i możliwości kreowania zasobów pracy wysoko wykwalifikowanej, a także badania profilu innowacyjnego oraz poziomu innowacyjności poszczególnych województw.

Mgr Emilia Modranka (Uniwersytet Łódzki), *Analiza koncentracji przestrzennej oraz struktury wykorzystania środków pomocowych pochodzących z funduszy europejskich*. Celem artykułu była analiza koncentracji przestrzennej oraz struktury zrealizowanych projektów pomocowych według obszarów wsparcia. Badanie zostało przeprowadzone na podstawie zestawienia wygenerowanego z Krajowego Systemu Informatycznego SIMIK 07-13, o stanie wdrażania funduszy europejskich w powiatach (NUTS 4) w latach 2007–2012. Autorka przedstawiła główne problemy wynikające z powszechnego stosowania klasycznych miar koncentracji, nieuwzględniających zależności przestrzennych.

Mgr Roman Gavuliak (University of Economics in Bratislava), *Exploring social exclusion in The European Union, a quantitative approach*. Autor referatu skoncentrował się na identyfikacji podstawowych determinant wykluczenia społecznego w Unii Europejskiej w latach 2005–2009, w oparciu o wykorzystanie metody analizy czynnikowej. Czynniki wykluczenia stanowią cechy niemierzalne, które w badaniu zostały sprowadzone do zmiennych mierzalnych. Porównanie wpływu poszczególnych czynników w krajach UE 27 pozwoliło na wyodrębnienie pięciu kategorii wykluczenia społecznego.

SESJA V

Dr inż. Robert Pietrzykowski (Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie), *Modyfikacja macierzy wag i jej skutki w badaniu zależności przestrzennych*. Podstawowym elementem analiz przestrzennych jest określenie interakcji pomiędzy badanymi jednostkami przestrzennymi oraz zapisanie ich w postaci macierzy wag przestrzennych. Ponieważ macierz wag określa się *a priori*, a jakość dalszych analiz zależy od jej specyfikacji, dobór odpowiedniej macierzy wag stanowi poważny problem metodologiczny. W pracy zaproponowano modyfikację macierzy wag „W”, która zawierałaby interakcje związane z położeniem badanej jednostki przestrzennej, ale również uwzględniałaby wagi związane z wieloma wybranymi cechami. Do wytworzenia nowej macierzy wag wykorzystano statystykę opartą na wartościach własnych macierzy HE-1. Takie podejście do problemu pozwala na uwzględnienie zarówno zmienności obserwowanych cech, jak i powiązania zachodzących pomiędzy nimi.

Dr Stanisław Matusik (Akademia Wychowania Fizycznego w Krakowie), dr Michał Pietrzak (Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu), dr Justyna Wilk (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), *Analiza migracji wewnętrznych w Polsce z wykorzystaniem przestrzennego modelu grawitacji*. W artykule została przeprowadzona analiza migracji wewnętrznych dla 66 polskich podregionów z wykorzystaniem przestrzennego modelu grawitacji. Weryfikacji poddano zależność migracji od charakterystyk ekonomicznych, w tym poziomu inwestycji, wartości PKB per capita, poziomu wynagrodzeń oraz stopy bezrobocia. Tradycyjne podejście w interpretacji zjawiska migracji poszerzone zostało o analizę efektów przestrzennych w przepływie ludności, w odniesieniu zarówno do źródła, jak i miejsca docelowego migracji.

Prof. UEK dr hab. Barbara Podolec, dr Paweł Ulman, mgr Agnieszka Wałęga (Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie), *Statystyczna analiza przestrzennego zróżnicowania sytuacji mieszkaniowej w Polsce*. Przedmiotem opracowania była prezentacja wyników analizy sytuacji mieszkaniowej w Polsce w układzie wojewódzkim z punktu widzenia zasobów mieszkaniowych i ich jakości. Analizę przeprowadzono w kontekście sytuacji społeczno-demograficznej województw oraz pod kątem finansowych możliwości zaspokojenia potrzeb gospodarstw domowych w zakresie warunków mieszkaniowych. W tym celu wyodrębniono dwa zbiory zmiennych: 1) charakteryzujące sytuację społeczno-demograficzną województw oraz 2) opisujące zasoby mieszkaniowe oraz ich wyposażenie. W badaniach wykorzystano również syntetyczny miernik zaspokojenia potrzeb mieszkaniowych. Analizę dopełnia próba modelowania ekonometrycznego zjawisk charakteryzujących sytuację mieszkaniową w wybranych regionach oraz prezentacja dynamiki zasobów mieszkaniowych.

Dr Artur Lipieta, prof. UEK dr hab. Barbara Pawełek, dr Jadwiga Kostrzewska (Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie), *Analiza statystyczna wydat-*

ków na obszary wspólnej polityki Unii Europejskiej w wybranych państwach strefy euro. Przedmiotem referatu była prezentacja wyników analizy statystycznej wydatków na obszary wspólnej polityki Unii Europejskiej w 16 państwach UE strefy euro. Do realizacji celu badań wykorzystano współczesne metody statystycznej analizy wielowymiarowej.

SESJA VI

Prof. zw. dr hab. Krystian Heffner, dr Piotr Gibas (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach), *Poziom metropolitalności wybranych ośrodków w Polsce. Znaczenie wag i zmiennych*. Wśród celów empirycznych referatu należy wymienić próbę określenia przez Autorów poziomu metropolitalności miast szczebla regionalnego i subregionalnego oraz zasięgu obszarów metropolitalnych poziomu regionalnego i subregionalnego w porównaniu do regionów (NUTS2) oraz podregionów (NUTS3), jak również dokonanie klasyfikacji na regiony metropolitalne, między metropolitalne oraz peryferyjne. Celem teoretycznym było stwierdzenie, na ile otrzymane wyniki uzależnione są od sposobu doboru zmiennych do badania.

Prof. dr hab. arch. Aleksander Böhm (Politechnika Krakowska), dr inż. Wiesław Wańkowicz (Instytut Rozwoju Miast), *Gospodarowanie przestrzeni o wysokich walorach krajobrazowych*. Przedmiotem artykułu była próba odpowiedzi na pytanie czy jest możliwe zachowanie walorów krajobrazu przy wykorzystaniu ich ekonomicznej wartości oraz jakie instrumenty powinny zostać wdrożone w celu wykorzystania mechanizmów ekonomicznych do jego ochrony. W pierwszej części wystąpienia poświęconej planowaniu krajobrazu zwrócono uwagę na problem rozwoju gospodarczego obszarów objętych ochroną krajobrazu. W drugiej części omówiono cechy krajobrazu, które decydują o jego ekonomicznej wartości oraz możliwe warianty rozwoju obszarów objętych ochroną krajobrazu.

Dr Mariola Chrzanowska, dr Nina Drejerska, dr Iwona Pomianek (Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie), *Próba wyznaczenia obszaru funkcjonalnego Warszawy z wykorzystaniem względnego poziomu rozwoju (BZW) oraz miary Hellwiga*. Przedmiotem badań było wyznaczenie grupy gmin otaczających Warszawę, reprezentujących jednocześnie wysoki poziom rozwoju, zaliczanych do obszaru funkcjonalnego Warszawy. Klasyfikacji gmin dokonano w oparciu o miarę względnego poziomu rozwoju (BZW) oraz miary Hellwiga. Do zbioru wskaźników częściowych zaliczono zmienne z zakresu demografii, infrastruktury i inwestycji, rynku pracy, oraz aktywności ekonomicznej i społecznej.

Dr Barbara Batóg, dr Iwona Foryś (Uniwersytet Szczeciński), *Badanie preferencji lokalizacyjnych nabywców mieszkań w obrocie wtórnym*. Autorki dokonały przestrzennej analizy cen transakcyjnych, uzyskiwanych w obrocie wtórnym mieszkaniami na lokalnym rynku oraz analizy rozkładu cech charakteryzujących sprzedawane mieszkania. Badanie koncentrowało się na przestrzennym zróżnicowaniu cen uzyski-

wanych na rynku wtórnym, w tym określeniu odchyień cen od przeciętnej w każdej z wybranych lokalizacji. W artykule zweryfikowana została hipoteza badawcza dotycząca stabilności w czasie preferencji lokalizacyjnych nabywców mieszkań.

Dr Sebastian Gnat (Uniwersytet Szczeciński), *Analiza związków wybranych pozycji budżetowych gmin aglomeracji szczecińskiej z demograficznymi przejawami zjawiska suburbanizacji Szczecina w latach 1995–2010*. W artykule przedstawiono wyniki badania dotyczącego demograficznego i, po części, finansowego aspektu zjawiska suburbanizacji na obszarach gmin otaczających Szczecin. Analiza ilościowa zjawiska opierała się na badaniu zależności pomiędzy wartościami współczynnika suburbanizacji oraz wybranymi pozycjami w budżetach gmin Kołbaskowo, Dobra (Szczecińska), Police, Goleniów, Kobylanka, Gryfino i Stare Czarnowo. Przeprowadzone badanie umożliwiło weryfikację pozytywnego wpływu suburbanizacji na zwiększenie dochodów gmin oraz wielkości nakładów inwestycyjnych.

SESJA VII

Prof. UEK dr hab. Zofia Mielecka-Kubień (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach), *Badanie przestrzennej autokorelacji wybranych przyczyn zgonów w Polsce*. Przedmiotem analizy zaprezentowanego przez Autorkę referatu, były zależności przestrzenne charakteryzujące standaryzowane, ze względu na wiek, współczynniki zgonów dla wybranych (najczęstszych) przyczyn zgonów w Polsce. Wyniki badania potwierdziły przydatność metod statystyki przestrzennej w badaniach epidemiologicznych.

Dr Elżbieta Chądzyńska (Politechnika Wrocławska), *Analiza przestrzennego zróżnicowania poziomu rozwoju gospodarczego gmin dolnośląskich*. Autorka artykułu przedstawiła wyniki badań nad czynnikami demograficznymi, ekonomicznymi oraz przestrzennymi decydującymi o zróżnicowaniu potencjału rozwojowego gmin województwa dolnośląskiego. W celu klasyfikacji badanych jednostek przestrzennych ze względu na poziom rozwoju, zastosowano taksonomiczne metody klasyfikacji i grupowania.

Prof. dr hab. Magdalena Osińska, mgr Marcin Fałdziński, mgr Tomasz Zdanowicz (Uniwersytet Mikołaja Kopernika), *Ekonometryczna ocena ryzyka na giełdzie papierów wartościowych w Szanghaju*. Rynek kapitałowy w Chinach przez wiele lat nie był włączony do globalnego rynku finansowego. Dlatego też cechowały go wyższe wartości średnie zwrotów i mniejsze ryzyko. Dopiero kryzys finansowy z roku 2007–2009 spowodował większe zainteresowanie chińskim rynkiem kapitałowym a w konsekwencji wzrost ryzyka. Celem prezentowanego artykułu była analiza procesów zachodzących wewnątrz rynku, ze szczególnym uwzględnieniem relacji między indeksami głównymi giełdy w Szanghaju a indeksami reprezentującymi różne segmenty rynku.

Prof. zw. dr hab. Grażyna Trzpiot (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach), *Przestrzenna regresja kwantylowa*. Głównym celem wystąpienia było wskazanie na możliwości powiązania metodologii regresji kwantylowej i ekonometrycznego modelowania przestrzennego. Dodatkowe zasoby informacji o zmienności analizowanych wielkości, wychodzące poza tradycyjny opis klasycznej regresji, uzyskano na podstawie badania kwantyli. Estymacja kwantylowa w modelu przestrzennym uwytłumia zależności przestrzenne dla różnych fragmentów rozważanych rozkładów.

Mgr Edyta Łaszkiewicz (Uniwersytet Łódzki), *Wielopoziomowy model zróżnicowania wzrostu regionalnego*. Modele wielopoziomowe znajdują liczne zastosowania m.in. w analizach edukacyjnych, transportowych, ekologicznych czy epidemiologicznych. Istotą ich budowy jest identyfikacja efektów stałych i losowych dla poszczególnych poziomów agregacji danych. Na gruncie przestrzennych analiz wzrostu regionalnego, modele tej klasy nie są rozpowszechnione, mimo iż szereg badań potwierdza przestrzenne grupowanie procesów wzrostu regionalnego. W prezentowanym referacie, Autorka podjęła próbę zastosowania modeli wielopoziomowych w analizie zróżnicowania wzrostu regionalnego.

SESJA PLAKATOWA

Mgr Witold Olszewski, mgr Dawid Budny (Uniwersytet Łódzki), *Gospodarka odpadami niebezpiecznymi na terenie województwa łódzkiego*

Dr Danuta Guzal-Dec, dr inż. Magdalena Zwolińska-Ligaj (Państwowa Szkoła Wyższa im. Papieża Jana Pawła II w Białej Podlaskiej), *Ocena procesów rozwoju obszarów wiejskich regionu lubelskiego z wykorzystaniem miar podobieństwa*

Mgr Danuta Rozpędowska-Matraszek (Uniwersytet Łódzki), *Analiza wielowymiarowych danych przestrzenno-czasowych na przykładzie zatrudnienia w opiece zdrowotnej w Polsce według województw*

Mgr Anna Ojrzyńska, mgr Sebastian Twaróg (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach), *Dynamika zmian zależności przestrzennej systemu cywilnego krwiodawstwa w Polsce*

Mgr Anna Sulima (Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie), *Analiza taksonomiczna zróżnicowania poziomu rozwoju społeczno-gospodarczego gmin w województwie małopolskim w latach 2002–2010*

Mgr Piotr Strożek (Uniwersytet Łódzki), *Analiza porównawcza gospodarek opartych na wiedzy w państwach Unii Europejskiej z wykorzystaniem metodologii KAM*

Anita Maćkowiak (Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu), *Wybory do Sejmu i Senatu 2011. Analiza danych w ujęciu przestrzennym.*

Mgr Joanna Górna, mgr Karolina Górna (Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu), *Przestrzenne i przestrzenno-czasowe tendencje i zależności PKB w wybranych krajach Unii Europejskiej po 2004 roku*

Dr Ewa K. Dłubakowska-Puzio (Politechnika Koszalińska), dr Michał Karpuk (Politechnika Koszalińska), mgr Kamil Puzio, *Analiza jakości usług turystycznych w regionie kołobrzeskim z wykorzystaniem modeli szeregów czasowych*

Mgr Marta Radoła (Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu), *Przestrzenne zróżnicowanie umieralności osób w wieku produkcyjnym w Polsce według cech demograficzno-społecznych*

Jadwiga Suchecka, Emilia Modranka – Uniwersytet Łódzki

