POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET STATYSTYKI I EKONOMETRII

PRZEGLĄD STATYSTYCZNY

STATISTICAL REVIEW

TOM 61

1

2014

WARSZAWA 2014

WYDAWCA

Komitet Statystyki i Ekonometrii Polskiej Akademii Nauk

RADA REDAKCYJNA

Andrzej S. Barczak, Marek Gruszczyński, Krzysztof Jajuga, Stanisław M. Kot, Tadeusz Kufel, Władysław Milo (Przewodniczący), Jacek Osiewalski, D. Stephen G. Pollock, Aleksander Welfe, Janusz Wywiał, Peter Summers

KOMITET REDAKCYJNY

Magdalena Osińska (Redaktor Naczelny)
Marek Walesiak (Zastępca Redaktora Naczelnego, Redaktor Tematyczny)
Michał Majsterek (Redaktor Tematyczny)
Anna Pajor (Redaktor Statystyczny)
Piotr Fiszeder (Sekretarz Naukowy)

Wydanie publikacji dofinansowane przez Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego

© Copyright by Komitet Statystyki i Ekonometrii PAN

Strona WWW „Przegląd Statystyczny”:
http://www.przegladstatystyczny.pan.pl

Nakład: 200 egz.

PAN Warszawska Drukarnia Naukowa
00-056 Warszawa, ul. Śniadeckich 8
Tel./fax:+48 22 628 76 14

SPIS TREŚCI

Emil P a n e k – Niestacjonarna gospodarka Gale'a z rosnącą efektywnością produkcji na magistrali 5
Zbigniew Ś w i t a l s k i – Struktura zbioru wektorów cen równowagi w modelu rynku typu Gale'a-Shapleya 15
Maria W e s t a – Algebraiczna równoważność pewnych estymatorów MNK oraz predyktorów w przypadku klasycznych modeli regresji liniowej uwzględniających addytywne, stałe efekty sezonowe 27
Agata K l i b e r, Paweł K l i b e r, Piotr P ł u c i e n n i k – Charakterystyka przenikania kryzysu na rynek międzybankowy w Polsce na podstawie analizy 3-miesięcznych spreadów WIBOR-OIS oraz LIBOR-OIS dla dolara amerykańskiego i euro 43
Michał Bernard P i e t r z a k, Justyna Ł a p i ń s k a – Zastosowanie modelu grawitacji do identyfikacji czynników determinujących przepływy handlowe w Unii Europejskiej 65
Agata Ż ó ł t a s z e k – Efektywność i konkurencyjność systemów opieki zdrowotnej krajów Unii Europejskiej 79

SPRAWOZDANIA

Marta M a ł e c k a, Artur M i k u l e c – Sprawozdanie z XXXII międzynarodowej konferencji naukowej Wielowymiarowa Analiza Statystyczna (WAS 2013) 95

CONTENTS

Emil P a n e k – Non-Stationary Gale Economy with the Turnpike's Increasing Production Efficiency 5
Zbigniew Ś w i t a l s k i – The Structure of the Set of Vectors of Equilibrium Prices in the Market Model of Gale-Shapley Type 15
Maria W e s t a – The Algebraic Equivalency of Some OLS Estimators and Predictors in the Classical Linear Regression Model with Additive Constant Seasonal Effects 27
Agata K l i b e r, Paweł K l i b e r, Piotr P ł u c i e n n i k – The Characteristics of Crisis Transmission to Polish Interbank Market on the Basis of 3-month WIBOR-OIS and LIBOR-OIS Spreads for American Dollar and Euro 43
Michał Bernard P i e t r z a k, Justyna Ł a p i ń s k a – The Use of Gravity Models in the Identification of the Factors Determining Trade Flows in the European Union 65
Agata Ż ó ł t a s z e k – Effectiveness and Competiveness of Healthcare Systems in European Union States 79

REPORTS

Marta M a ł e c k a, Artur M i k u l e c – Report of the XXXII International Scientific Conference Multivariate Statistical Analysis (WAS 2013) 95

PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXI – ZESZYT 1 – 2014

EMIL PANEK

NIESTACJONARNA GOSPODARKA GALE'A Z ROSNĄCĄ EFEKTYWNOŚCIĄ PRODUKCJI NA MAGISTRALI

1.WSTĘP

Mimo upływu ponad pół wieku od czasu powstania zrębów teorii magistral (por. bibliografię zamieszczoną w pracy Panek, 2011), jej zasadnicze wyniki w postaci tzw. twierdzeń o magistrali uzyskano dotąd głównie w klasie modeli stacjonarnych gospodarek typu Neumanna-Gale'a-Leontiefa. Do nielicznych należą twierdzenia o magistrali w modelach gospodarek niestacjonarnych (ze zmienną technologią; por. np. Gantz, 1980; Keeler, 1972). W nurt ten wpisują się m. in. artykuły Panek (2013a, 2013b), w których prześledzono tzw. „słaby" oraz „bardzo silny" efekt magistrali w niestacjonarnych gospodarkach von Neumanna oraz Gale'a ze zmienną technologią zbieżną do pewnej technologii granicznej, determinującej kształt magistrali produkcyjnej[1].

Wprawdzie w obu wspomnianych pracach gospodarka na magistrali osiąga maksymalne tempo wzrostu, pozostaje ono jednak stałe (niezmienne w czasie) w całym okresie jej funkcjonowania. Poniżej prezentujemy dowód „słabego" twierdzenia o magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z tempem produkcji rosnącym na magistrali z upływem czasu.

2. POSTAĆ OGÓLNA NIESTACJONARNEGO MODELU GALE'A

Standardowo przez t oznaczamy zmienną czasu przebiegającą pewien skończony zbiór okresów $T = \{0,1, ..., t_1\}$, który nazywamy horyzontem gospodarki. W gospodarce mamy skończoną liczbę n zużywanych lub wytwarzanych towarów. Symbolem $x(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$ oznaczamy wektor towarów zużywanych w okresie t (wektor nakładów), a przez $y(t) = (y_1(t),...,y_n(t))$ wektor towarów wytwarzanych w okresie t (wektor produkcji). Gdy w pewnym okresie $t \in T$ z nakładów $x(t)$ można w gospodarce wytworzyć produkcję $y(t)$, to o parze $x(t)$, $y(t)$ mówimy, że tworzy dopuszczalny proces produkcji (w okresie t). Przez $Z(t) \subset R_+^{2n}$ oznaczamy zbiór

[1] Pewną specyficzną klasą „macierzowych" niestacjonarnych modeli von Neumanna z graniczną technologią zajmuje się J. N. Czeremnych (1982, rozdz. 4).

wszystkich procesów produkcji dopuszczalnych w świetle technologii, jaką gospodarka dysponuje w okresie t. Zapis $(x, y) \in Z(t)$ (równoważnie $x(t), y(t) \in Z(t)$) oznacza, że w okresie t z nakładów x gospodarka jest w stanie wytworzyć produkcję y.

Przestrzenie produkcyjne ze zmienną technologią $Z(t)$ spełniają następujące warunki:

(G1) $\forall(x^1, y^1) \in Z(t)\ \forall(x^2, y^2) \in Z(t)\ \forall\alpha, \beta \geq 0\ \big((\alpha x^1 + \beta x^2, \alpha y^1 + \beta y^2) \in Z(t)\big)$.

(G2) $\forall(x, y) \in Z(t)\ (x = 0 \Longrightarrow y = 0)$.

(G3) $\forall(x, y) \in Z(t)\ \forall x' \geqq x\ \forall\ 0 \leqq y' \leqq y\ \big((x', y') \in Z(t)\big)$.

(G4) Przestrzenie produkcyjne $Z(t)$ są zbiorami domkniętymi w R^{2n}.

(G5) $Z(t) \subseteq Z(t+1)$, $t = 0, 1, \ldots, t_1\text{-}1$.

Z interpretacją ekonomiczną tych warunków można zapoznać się np. w pracy Panek (2013b).

Łatwo zauważyć, że przestrzenie produkcyjne spełniające warunki **(G1)-(G5)** są stożkami domkniętymi zawartymi w R_+^{2n}, z wierzchołkami w 0. Z warunku $(x, y) \in Z(t)$ oraz $(x, y) \neq 0$ wynika, że $x \neq 0$. Dalej interesują nas tylko takie nietrywialne (niezerowe) procesy (x, y).

3. CHWILOWA RÓWNOWAGA VON NEUMANNA

Weźmy proces produkcji $(x, y) \in Z(t)$, $(x, y) \neq 0$. Liczbę

$$\alpha(x, y) = \max\{\alpha |\ \alpha x \leqq y\}$$

nazywamy tradycyjnie wskaźnikiem technologicznej efektywności procesu (x, y). Można udowodnić, że funkcja α jest ciągła i dodatnio jednorodna stopnia 0 na $Z(t)\backslash\{0\}$, zob. np. Panek (2003, rozdz.5, tw. 5.2). Liczbę

$$\alpha_{M,t} = \max_{(x,y)\in Z(t)\backslash\{0\}} \alpha(x, y) \tag{1}$$

nazywamy optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektywności produkcji w niestacjonarnej gospodarce Gale'a w okresie t. Jeżeli spełnione są warunki **(G1)-(G5),** to zadanie (1) ma rozwiązanie, tj.

$$\exists\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) \in Z(t)\big(\alpha\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) = \alpha_{M,t}\big) \tag{2}$$

oraz

$$\alpha_{M,t+1} \geq \alpha_{M,t}, \quad t = 0,1,\ldots,t_1 - 1, \tag{3}$$

zob. Panek (2013b, tw.2). O parze $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in Z(t)$ mówimy, że tworzy optymalny proces produkcji w okresie *t*. Z dodatniej jednorodności stopnia 0 funkcji α wynika, iż

$$\forall\, \lambda > 0 \left(\alpha(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \alpha(\lambda\bar{x}(t), \lambda\bar{y}(t)) = \alpha_{M,t}\right),$$

co prowadzi do wniosku, że optymalne procesy produkcji są $\forall\ t \in T$ określone z dokładnością do mnożenia przez stałą dodatnią.
Dalej zajmujemy się taką niestacjonarną gospodarką Gale'a, spełniającą warunki **(G1)-(G5)**, w której:

(G6) $\forall\, t \in T\ \exists \left(\left(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\right) \in Z(t) |\ \alpha\left(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\right) = \alpha_{M,t} \wedge \bar{y}(t) > 0\right).$

Warunek ten głosi, że w każdym okresie horyzontu *T* można wskazać optymalny proces produkcji, w którym wytwarzane są wszystkie towary. Gospodarkę spełniającą ten warunek przyjęto nazywać regularną (Gale, 1956, Makarow, Rubinow, 1973). Z **(G6)** oraz **(G3)** wynika, że

$$\forall\, t \in T\ \exists\left(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\right) \in Z(t)\left(\alpha_{M,t}\bar{x}(t) = \bar{y}(t) > 0\right). \tag{4}$$

Mówiąc o optymalnym procesie produkcji w okresie *t* mamy dalej na myśli proces $\left(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\right)$ spełniający warunek (4).
Niech $p(t) = (p_1(t),..., p_n(t)) \geq 0$ będzie wektorem cen towarów w gospodarce w okresie *t* oraz $\left(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\right) \in Z(t)$. Liczbę

$$\beta\left(x, y, p(t)\right) = \frac{\langle p(t), y\rangle}{\langle p(t), x\rangle}$$

(tam gdzie jest określona) nazywamy wskaźnikiem ekonomicznej efektywności procesu $(x, y) \in Z(t)$ przy cenach $p(t)$ (tutaj i dalej $\langle a, b\rangle = \sum_i a_i\, b_i$). W regularnej gospodarce Gale'a $\forall\ t \in T$ istnieje taki wektor cen $\bar{p}(t)$, przy których:

$$\forall (x, y) \in Z(t)\left(\langle \bar{p}(t), y\rangle - \alpha_{M,t}\langle \bar{p}(t), x\rangle \leq 0\right) \tag{5}$$

oraz

$$\beta(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{p}(t)) = \max_{(x,y)\in Z(t)\setminus\{0\}} \beta(x, y, \bar{p}(t)) = \alpha_{M,t}\ , \tag{6}$$

zob. Panek (2003, rozdz. 5, tw. 5.3)[2]. Nazywamy go wektorem cen von Neumanna w niestacjonarnej gospodarce Gale'a w okresie *t*. O trójce $\{\alpha_{M,t}, (\bar{x}(t), \bar{y}(t)), \bar{p}(t)\}$ mówimy, że charakteryzuje niestacjonarną gospodarkę Gale'a w chwilowej równowadze von Neumanna (opisuje stan równowagi chwilowej von Neumanna w niestacjonarnej gospodarce Gale'a).

Zgodnie z (5), (6) równowaga chwilowa oznacza taki stan gospodarki w okresie *t*, mierzony wielkością produkcji i cenami, w którym dochodzi do zrównania ekonomicznej efektywności produkcji z jej efektywnością technologiczną na najwyższym, możliwym do osiągnięcia poziomie. Ceny von Neumanna oraz optymalne procesy produkcji w takiej równowadze są określone z dokładnością do struktury (mnożenia przez stałą dodatnią). W szczególności zakładamy, że możliwe jest ustalenie takich cen von Neumanna $\bar{p}(t)$ w poszczególnych okresach $t \in T$, aby (niezależnie od długości horyzontu *T*) były one nierosnące i jednostajnie ograniczone (z dołu i z góry):

(G7) $\bar{p}\,(t+1) \leqq \bar{p}(t)\ \&\ \exists\ 0 < \pi_{min} \leq \pi_{max} < +\infty\ \ (\pi_{min} \leq \|\bar{p}(t)\| \leq \pi_{max})$

(tutaj oraz wszędzie dalej $\|a\| = \sum_i |a_i|$).

4. DYNAMIKA. MAGISTRALA PRODUKCYJNA

Weźmy proces ($x(t)$, $y(t) \in Z\ (t)$). Zakładamy, że gospodarka jest zamknięta w tym sensie, że nakłady w okresie następnym pochodzą w niej z produkcji wytworzonej w okresie poprzednim: $x(t+1) \leqq y(t)$. W świetle warunku **(G3)** prowadzi to do inkluzji:

$$\big(y(t), y(t+1)\big) \in Z(t+1),\ \ t = 0,1,\dots,t_1 - 1. \tag{7}$$

Ustalmy początkowy wektor produkcji:

$$y(0) = y^0 > 0. \tag{8}$$

O ciągu wektorów $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniającym warunki (7)-(8) mówimy, że tworzy (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu w niestacjonarnej gospodarce Gale'a. Rozpatrzmy zadanie maksymalizacji wartości produkcji wytworzonej w ostatnim okresie horyzontu *T*, mierzonej w cenach von Neumanna $\bar{p}(t_1)$:

$$\max \langle \bar{p}(t_1), y(t_1) \rangle, \tag{9}$$

---

[2] W powołanej pracy dowód przeprowadzony jest wprawdzie dla stacjonarnej gospodarki Gale'a (ze stałą w czasie przestrzenią produkcyjną *Z*), ale w pełni stosuje się także do niestacjonarnej gospodarki spełniającej warunki **(G1)-(G6)**. Wystarczy przyjąć $Z(t) = Z$, $\bar{p}(t) = \bar{p}$ oraz $\alpha_{M,t} = \alpha_M$.

p. w. (7), (8). (10)

Aby się przekonać, iż zadanie to ma rozwiązanie wystarczy zauważyć, że jest ono równoważne z zadaniem

$$\max_{y\in R_{y^0,t_1}} \langle \bar{p}(t_1), y\rangle$$

maksymalizacji liniowej (a więc ciągłej) funkcji na zwartym zbiorze $R_{y^0,t_1} = \{y|\, y = y(t_1)$ *dla pewnego* $(y^0,\ t_1)$ – *dopuszczalnego procesu* $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}\}$ wektorów produkcji możliwych do wytworzenia w końcowym okresie t_1 w jakimkolwiek $(y^0,\ t_1)$ – dopuszczalnym procesie wzrostu, zob. np. Panek (2003, rozdz.5, lemat 5.1). Rozwiązanie $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ zadania (9)-(10) nazywamy $\left(y^0, t_1, \bar{p}(t_1)\right)$ – optymalnym procesem wzrostu w niestacjonarnej gospodarce Gale'a.

Weźmy optymalny proces produkcji $\left(\bar{x}(0), \bar{y}(0)\right) \in Z(0)$ (w okresie początkowym $t = 0$), w którym $\bar{y}(0) > 0$ (warunek regularności, zob.(4)). Istnieje wówczas optymalny proces produkcji $\left(\bar{x}(1), \bar{y}(1)\right) \in Z(1)$, w którym $\bar{x}(1) \leqq \bar{y}(0)$. Rozumując analogicznie dalej widzimy, że istnieje ciąg optymalnych procesów produkcji $\{\bar{x}(t), \bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$, w którym $\bar{x}(t+1) \leqq \bar{y}(t),\ t = 0, 1, \dots, t_1 - 1$. Postulujemy nieco więcej, a mianowicie:

(G8) Istnieje ciąg $\{\bar{x}(t), \bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ optymalnych procesów produkcji spełniających warunek (4), w którym nakłady w okresie następnym są równe produkcji wytworzonej w okresie poprzednim:

$$\bar{x}(t+1) = \bar{y}(t),\ t = 0, 1, \dots, t_1 - 1. \tag{11}$$

Wówczas istnieje $(\bar{y}^0, t_1)$ – dopuszczalny proces wzrostu postaci[3]:

$$\bar{y}(t) = \left(\prod_{\tau=1}^{t} \alpha_{M,\tau}\right)\bar{y}(0),\ \ t = 1, \dots, t_1\ . \tag{12}$$

Proces ten jest określony z dokładnością do mnożenia przez stałą dodatnią w tym sensie, że $\forall\, \lambda > 0$ proces $\{\lambda\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ jest $(\lambda\bar{y}(0), t_1)$ – dopuszczalny. Co więcej,

$$\forall\, \lambda > 0 \left(\frac{\lambda\bar{y}(t)}{\|\lambda\bar{y}(t)\|} = \frac{\bar{y}(t)}{\|\bar{y}(t)\|} = \frac{\left(\prod_{\tau=1}^{t} \alpha_{M,\tau}\right)\bar{y}(0)}{\left\|\left(\prod_{\tau=1}^{t} \alpha_{M,\tau}\right)\bar{y}(0)\right\|} = \frac{\bar{y}(0)}{\|\bar{y}(0)\|} = \bar{s} = const. > 0\right), \tag{13}$$

[3] Proces ten początkuje wektor produkcji $\bar{y}^0$ i nie należy go mylić z procesem $(y^0,\ t_1)$ – dopuszczalnym.

tj. proces taki charakteryzuje się stałą w czasie (optymalną) strukturą produkcji. Półprostą

$$N = \{\lambda \bar{s} |\ \lambda > 0\}$$

nazywamy magistralą produkcyjną (promieniem von Neumanna) w niestacjonarnej gospodarce Gale'a. Na magistrali gospodarka rozwija się w maksymalnym, zmieniającym się w czasie tempie[4], zachowując przy tym jednak stałą strukturę produkcji.

5. TWIERDZENIE O MAGISTRALI

Zgodnie z (5), (6) efektywność ekonomiczna dowolnego dopuszczalnego procesu produkcji w okresie t nie przekracza technologicznej efektywności procesu optymalnego. Dalej, w celu zapewnienia jednoznaczności magistrali zakładamy, że w każdym okresie $t \in T$ efektywność ekonomiczna dowolnego procesu dopuszczalnego leżącego poza magistralą jest niższa od maksymalnej technologicznej efektywności osiąganej przez gospodarkę w tym okresie na magistrali:

(G9) $\forall\, t \in T\ \forall\, (x,y) \in Z(t)\ \left((x,y) \neq 0\ \wedge\ x \notin N \Rightarrow \beta\big(x,y,\bar{p}(t)\big) = \frac{\langle \bar{p}(t),y\rangle}{\langle \bar{p}(t),x\rangle} < \alpha_{M,t}\right).$

Jeżeli spełniony jest ten warunek, to

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall t \in T\ \exists \delta_{\varepsilon,t} \in \big(0, \alpha_{M,t}\big)\ \forall (x,y) \in Z(t)$$
$$\left(\left\|\frac{x}{\|x\|} - \bar{s}\right\| \geq \varepsilon \Rightarrow\ \beta\big(x,y,\bar{p}(t)\big) \leq \alpha_{M,t} - \delta_{\varepsilon,t}\right). \qquad (14)$$

Dowód przebiega podobnie jak dowód lematu 5.2 w pracy Panek (2003)[5].

Liczby $\delta_{\varepsilon,t}$, $\alpha_{M,t}$ w (14) spełniają warunek $0 < \frac{\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_{M,t}} < 1$, co nie wyklucza jednak takiej mało realistycznej sytuacji, gdy przy rosnącej nieograniczenie długości horyzontu $T = \{0,1,..., t_1\}$:

$$\lim_t \delta_{\varepsilon,t} = 0 \text{ dla pewnej liczby } \varepsilon > 0$$

(tj. gdy z upływem czasu efektywność ekonomiczna procesu produkcji zbliża się do optymalnej, mimo że struktura tego procesu stale odbiega o ε od struktury optymalnej $\bar{s}$). Dlatego dalej przyjmujemy, że

(G10) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_\varepsilon > 0\ \forall t_1 > 0\ \forall t \in T\left(\frac{\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_{M,t}} \geq \nu_\varepsilon\right).$

---

[4] Generalnie rosnącym ze względu na rozwój technologii, zob. (3).

[5] Należy podstawić $Z(t)$ $\alpha_{M,t}$,$\delta_{\varepsilon,t}$, zamiast Z, α_M,δ_ε

Warunek ten nie wyklucza wzrostu efektywności produkcji $\alpha_{M,t}$ (nawet nieograniczonego), ale pod warunkiem odpowiedniego (tego samego rzędu) wzrostu $\delta_{\varepsilon,t}$. W sensie geometrycznym warunek **(G9)** oznacza specyficzny kształt przestrzeni produkcyjnych $Z(t)$: stożków z upływem czasu „coraz silniej wypukłych" w otoczeniu magistral.

□ **Twierdzenie** („Słabe" twierdzenie o magistrali)
Jeżeli niestacjonarna gospodarka Gale'a spełnia warunki **(G1)-(G10)**, to $\forall \varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε, że liczba okresów czasu, w których $\left(y^0, t_1, \bar{p}(t_1)\right)$ – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek

$$\left\| \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon \tag{15}$$

nie przekracza k_ε. Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu $T = \{0,1,..., t_1\}$.
Dowód. Początkowy wektor produkcji y^0 oraz wektor $\bar{s}$ struktury produkcji na magistrali są dodatnie (zob. (8), (13)), zatem istnieje taka liczba $\sigma > 0$, że $y^0 \geqq \sigma\bar{s}$. Przyjmując w (12) $\bar{y}(0) = \sigma\bar{s}$, zważywszy na **(G3),** otrzymujemy (y^0, t_1) – dopuszczalny proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^0, & dla\ t = 0, \\ \bar{y}(t), dla\ t = 1, \dots, t_1, \end{cases}$$

w którym wektor produkcji $\bar{y}(t)$ ma postać (12). Z definicji procesu $\left(y^0, t_1, \bar{p}(t_1)\right)$ – optymalnego $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ wynika, że

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1) \rangle \geq \langle \bar{p}(t_1), \tilde{y}(t_1) \rangle = \langle \bar{p}(t_1), \left(\prod_{t=1}^{t_1} \alpha_{M,t}\right) \bar{y}(0) \rangle =$$

$$= \sigma \left(\prod_{t=1}^{t_1} \alpha_{M,t}\right) \langle \bar{p}(t_1), \bar{s} \rangle > 0. \tag{16}$$

Zgodnie z (5):

$$\langle \bar{p}(t+1), y^*(t+1) \rangle \leq \alpha_{M,t+1} \langle \bar{p}(t+1), y^*(t) \rangle,\ t = 0, 1, \dots, t_1 - 1.$$

Dla $t = t_1 - 1$ mamy:

$$0 < \langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1) \rangle \leq \alpha_{M,t_1} \langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1 - 1) \rangle.$$

Ponieważ ceny von Neumanna są określone z dokładnością do struktury, więc w myśl **(G7)** istnieje taki wektor cen $\bar{p}(t_1 - 1)$, że

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1 - 1) \rangle \leq \langle \bar{p}(t_1 - 1), y^*(t_1 - 1) \rangle,$$

a stąd

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \le \alpha_{M,t_1}\langle \bar{p}(t_1-1), y^*(t_1-1)\rangle \le \alpha_{M,t_1}\alpha_{M,t_1-1}\langle \bar{p}(t_1-1), y^*(t_1-2)\rangle.$$

Dobierając ceny $\bar{p}(t_1-2)$ tak, aby spełniony był warunek

$$\langle \bar{p}(t_1-1), y^*(t_1-2)\rangle \le \langle \bar{p}(t_1-2), y^*(t_1-2)\rangle$$

otrzymujemy

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \le \alpha_{M,t_1}\alpha_{M,t_1-1}\langle \bar{p}(t_1-2), y^*(t_1-2)\rangle.$$

Postępując tak dalej, ostatecznie dochodzimy do warunku:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \le \prod_{t=1}^{t_1}\alpha_{M,t}\,\langle \bar{p}(0), y^0\rangle. \tag{17}$$

Oznaczmy przez L_ε zbiór okresów $\tau_1,\ldots,\tau_k < t_1$, w których zachodzi warunek (15). Wówczas, zgodnie z (14):

$$\beta\big(y^*(t), y^*(t+1), \bar{p}(t+1)\big) = \frac{\langle \bar{p}(t+1), y^*(t+1)\rangle}{\langle \bar{p}(t+1).y^*(t)\rangle} \le \alpha_{M,t+1} - \delta_{\varepsilon,t+1}\,,\quad t \in L_\varepsilon\,,$$

czyli

$$\langle \bar{p}(t+1), y^*(t+1)\rangle \le \big(\alpha_{M,t+1} - \delta_{\varepsilon,t+1}\big)\langle \bar{p}(t+1), y^*(t)\rangle,\quad t \in L_\varepsilon\,,$$

co łącznie z (17) prowadzi do nierówności:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \le \Big(\prod_{\substack{t=1\\ t\notin L_\varepsilon}}^{t_1}\alpha_{M,t}\Big)\big(\prod_{t\in L_\varepsilon}\big(\alpha_{M,t} - \delta_{\varepsilon,t}\big)\big)\langle \bar{p}(0), y^0\rangle. \tag{18}$$

Łącząc (16) i (18) dochodzimy do warunku:

$$0 < \sigma\big(\prod_{t=1}^{t_1}\alpha_{M,t}\big)\langle \bar{p}(t_1), \bar{s}\rangle \le \Big(\prod_{\substack{t=1\\ t\notin L_\varepsilon}}^{t_1}\alpha_{M,t}\Big)\big(\prod_{t\in L_\varepsilon}\big(\alpha_{M,t} - \delta_{\varepsilon,t}\big)\big)\langle \bar{p}(0), y^0\rangle\,,$$

z którego wynika, że

$$\prod_{t=\tau_1}^{\tau_k}\Big(1 - \frac{\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_{M,t}}\Big) \ge \frac{\sigma\langle \bar{p}(t_1), \bar{s}\rangle}{\langle \bar{p}(0), y^0\rangle} > 0.$$

Jednocześnie, zgodnie z **(G7)**

$$\frac{\sigma\langle \bar{p}(t_1), \bar{s}\rangle}{\langle \bar{p}(0), y^0\rangle} \ge \frac{\sigma\|\bar{p}(t_1)\|\bar{s}_{min}}{\|\bar{p}(0)\|y^0_{max}} \ge \frac{\sigma\pi_{min}\bar{s}_{min}}{\pi_{max}y^0_{max}} = C = const. > 0,$$

gdzie $\bar{s}_{min} = \min_i \bar{s}_i > 0$, $y^0_{max} = \max_i y^0_i > 0$, a stąd:

$$\prod_{t=\tau_1}^{\tau_k} \left(1 - \frac{\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_{M,t}}\right) \geq C > 0.$$

Wobec **(G10)** ostatecznie dochodzimy do nierówności:

$$(1 - \nu_\varepsilon)^k \geq C,$$

z której otrzymujemy oszacowanie liczby k:

$$k \leq \frac{\ln C}{\ln(1-\nu_\varepsilon)} = A.$$

W charakterze liczby k_ε, o której mowa w tezie twierdzenia, wystarczy wziąć najmniejszą liczbę naturalną większą od min $\{0, A\}$. Liczba ta nie zależy od długości horyzontu $T = \{0,1,..., t_1\}$. ■

Twierdzenie pokazuje, że tzw. efekt magistrali – zbliżania się w długich okresach czasu optymalnych procesów wzrostu do magistrali (w sensie odległości kątowej) – ujawnia się także w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z efektywnością produkcji rosnącą nieograniczenie (np. pod wpływem postępu technologicznego). Nie jest wykluczone, że warunki **(G7)**, **(G10)** można osłabić. Wymaga to dalszych badań.

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

LITERATURA

Czeremnych J. N., (1982), *Analiz powiedienija trajektorii dynamiki narodnochoziajstwien- nych modeliej*, Nauka, Moskwa.

Gantz D. T., (1980), A Strong Turnpike Theorem for a Nonstationary von Neumann-Gale Production Model, *Econometrica*, 48 (7), 1777–90.

Gale D., (1956), The Closed Linear Model of Production, w: Kuhn H. W., Tucker A. W., (red.), *Linear Inequalities and Related Systems*, Princeton Univ, Press, Princeton, 285–303.

Keeler E. B. (1972), A Twisted Turnpike, *International Economic Review*, 13 (1), 160–166.

Makarow W. L., Rubinow A. M., (1973), *Matiematiczeskaja tieoria ekonomiczeskoj dynamiki i rawnowiesija*, Nauka, Moskwa.

Panek E., (2003), *Ekonomia Matematyczna*, Wyd. AEP, Poznań.

Panek E., (2013a), Niestacjonarny model von Neumanna z graniczną technologią, *Studia Oeconomica Posnaniensia,* 1 (1), 49–68.

Panek E., (2013b), „Słaby" i „bardzo silny" efekt magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią, *Przegląd Statystyczny*, 60 (3), 291–303.

NIESTACJONARNA GOSPODARKA GALE'A Z ROSNĄCĄ EFEKTYWNOŚCIĄ PRODUKCJI NA MAGISTRALI

Streszczenie

W pracach Panek (2013a, 2013b) udowodniono „słabe" oraz „bardzo silne" twierdzenie o magistrali w modelach dynamiki ekonomicznej von Neumanna-Gale'a ze zmienną technologią zbieżną do pewnej technologii granicznej. Na magistrali produkcyjnej wyznaczonej przez technologię graniczną gospodarka osiąga najwyższe tempo wzrostu, ale jest ono stałe (niezmienne w czasie). W artykule zaprezentowano dowód magistralnych własności optymalnych procesów w takiej niestacjonarnej gospodarce Gale'a, w której – w odróżnieniu od wspomnianych wyżej prac – tempo wzrostu produkcji na magistrali rośnie pod wpływem postępu technologicznego.

Słowa kluczowe: niestacjonarny model Gale'a, równowaga chwilowa von Neumanna, magistrala produkcyjna, „słabe" i „bardzo silne" twierdzenie o magistrali

NON-STATIONARY GALE ECONOMY WITH THE TURNPIKE'S INCREASING PRODUCTION EFFICIENCY

Abstract

Papers Panek (2013a, 2013b) prove „weak" and „very strong" turnpike theorem in the Neumann-Gale model of the economic dynamics with changeable technology convergent to some limit technology. The economy achieves the highest growth rate on the production turnpike determined by the limit technology, nevertheless the growth rate is constant (time-invariant). This article presents proofs of the turnpike properties of the optimal processes in such a non-stationary Gale economy, in which – in contrast to the above-mentioned papers production growth rate on the turnpike is increasing due to technological progress.

Keywords: non-stationary Gale model, von Neumann temporary equilibrium, production turnpike, „weak" and „very strong" turnpike theorem

PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXI – ZESZYT 1 – 2014

ZBIGNIEW ŚWITALSKI

STRUKTURA ZBIORU WEKTORÓW CEN RÓWNOWAGI W MODELU RYNKU TYPU GALE'A-SHAPLEYA[1]

1. WSTĘP

Rynki, na których występuje skończona liczba niepodzielnych dóbr**,** od dawna cieszyły się zainteresowaniem ekonomistów (zob. np. Shapley, Shubik, 1971/72, str. 124), chociaż bardziej intensywne badania w tym zakresie wykorzystujące metody matematyczne rozwinęły się dopiero wraz z rozwojem teorii gier.[2]

W tradycyjnej, neoklasycznej teorii rynków dóbr podzielnych wykorzystuje się silne narzędzia analityczne (np. twierdzenia o punkcie stałym), których nie da się wykorzystać do matematycznej analizy rynków dóbr niepodzielnych. Z tego punktu widzenia teoria rynków dóbr niepodzielnych może być w jakimś sensie uważana za „trudniejszą", gdyż wymaga stosowania specjalnych, osobnych narzędzi (najczęściej kombinatorycznych) dla każdego rodzaju modelu.

W teorii rynków dóbr niepodzielnych, tak jak i w teorii rynków dóbr podzielnych, typowe pytania dotyczą problemów równowagi konkurencyjnej (warunki istnienia równowagi, metody dochodzenia do równowagi). W podejściach teoriogrowych poszukuje się też rozwiązań stabilnych, tzn. należących do rdzenia odpowiedniej gry (zob. np. Shapley, Shubik, 1971/72; Shapley, Scarf, 1974).

Bardzo prosty model rynku dóbr niepodzielnych przedstawił Gale w swojej znanej książce (1960)[3]**.** W modelu Gale'a dany jest skończony zbiór kupujących K i skończony zbiór dóbr D oraz liczby $v(k, d)$ (określone dla każdego kupującego $k \in K$ i każdego dobra $d \in D$). interpretowane jako (wyrażone w pieniądzu) wartości dóbr dla poszczególnych kupujących. Ceny dóbr $p(d)$ są cenami równowagi, jeśli każdemu kupującemu k przydzielone jest dobro d maksymalizujące liczbę $v(k,d) - p(d)$ (i przydział jest jedno-jednoznaczny, zob. def. 1). Preferencje kupujących są więc

---

[1] Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2011/01/B/HS4/00812.

[2] Klasyczne, często cytowane do dzisiaj prace wykorzystujące podejście teoriogrowe do analizy rynków dóbr niepodzielnych, to prace Shapleya i Shubika (1971/72) oraz Shapleya i Scarfa (1974).

[3] Istnieje przekład polski: *Teoria liniowych modeli ekonomicznych*, PWN, Warszawa 1969 (model, o którym mowa jest opisany w rozdziale V, str. 192-194).

określone za pomocą „zysków" $v(k, d) - p(d)$[4] (im większy „zysk" z zakupu dobra d, tym bardziej kupujący k jest gotowy do zakupu tego dobra).

Model Gale'a został rozbudowany do postaci „teoriogrowej" w pracy Shapleya i Shubika (1971/72), gdzie została przeprowadzona szczegółowa analiza rdzenia odpowiedniej „gry rynkowej" (graczami są kupujący, a także sprzedający będący właścicielami dóbr ze zbioru D). Modele będące rozwinięciem modelu Shapleya-Shubika (S.-S.) są intensywnie badane w ostatnich latach[5]. Bada się m.in. związki między równowagami konkurencyjnymi (walrasowskimi), a różnego rodzaju rozwiązaniami stabilnymi dla tych modeli (zob. np. Camina, 2006; Sotomayor, 2007). Modele te znalazły też zastosowanie przy analizie rynków aukcyjnych (zob. np. Mishra, Garg, 2006; Andersson, Erlanson, 2013). Mishra i Talman (2010) zbadali geometryczną strukturę zbioru wektorów cen równowagi (walrasowskiej) dla modeli typu Shapleya-Shubika (m.in. pokazali, że jest on zbiorem wypukłym).

W artykule zajmuję się innym modelem rynku dóbr niepodzielnych, którego pierwowzorem jest model rekrutacji kandydatów do szkół opisany w pracy Gale'a i Shapleya (1962). W modelu tym (który nazywam modelem rynku typu Gale'a-Shapleya lub w skrócie modelem G.-S.), przedstawionym w pracy Świtalskiego (2014), określone są ceny graniczne $r(k, d)$, gdzie liczba $r(k, d)$ jest interpretowana jako maksymalna cena, którą kupujący k gotowy jest zapłacić za dobro d, a także preferencje kupujących w zbiorze D określone jako liniowe porządki. Preferencje są tutaj dane z góry i nie zależą od liczb $r(k, d) - p(d)$, są więc, podobnie jak w neoklasycznej teorii wyboru konsumenta, niezależne od cen. Kupujący wybiera najlepsze dobro spośród tych, które spełniają warunek $r(k, d) \geq p(d)$. Liczby $r(k, d)$ mogą więc być traktowane jako ograniczenia budżetowe (w przeciwieństwie do neoklasycznej teorii wyboru konsumenta ograniczenia te mogą być tutaj różne dla różnych dóbr).

W modelu tym łatwo można zdefiniować równowagę walrasowską jako taki jedno-jednoznaczny przydział dóbr kupującym, przy którym każdy kupujący k otrzymuje najlepsze dla niego dobro wśród wszystkich dóbr d spełniających warunek $r(k, d) - p(d) \geq 0$. W pracy Świtalskiego (2014) udowodniono, że alokacje tak określonej równowagi są skojarzeniami stabilnymi w sensie Gale'a-Shapleya (i na odwrót).

W przedstawionym artykule porównuję model Gale'a z modelem typu Gale'a-Shapleya oraz badam geometryczną strukturę zbioru wektorów cen równowagi dla modelu typu G.-S. Najważniejsze wyniki dotyczące własności tego zbioru zawarte są w punkcie 5. Tam też przedstawiłem twierdzenie (tw. 3), które charakteryzuje ten zbiór jako rozłączną sumę odpowiednich prostopadłościanów (a więc nie musi on

[4] Shapley i Shubik (1971/72) używają na określenie tej różnicy terminów „profit" lub „gain". W polskim tłumaczeniu książki Gale'a (1960) użyto terminu „dochód". W literaturze dotyczącej modeli Shapleya-Shubika występują często terminy „payoff" lub „surplus".

[5] W bazie czasopism wydawnictwa Elsevier znajduje się 10 artykułów opublikowanych w latach 2011-2013 poświęconych modelom S.-S. i ich uogólnieniom.

być zbiorem wypukłym, co oznacza, że struktura tego zbioru jest istotnie różna od analogicznej struktury dla modeli typu S.-S.).

2. MODEL GALE'A

W modelu Gale'a dany jest skończony zbiór kupujących K i skończony zbiór dóbr D. Oba zbiory są równoliczne. Dobrami mogą być np. domy, konie, dzieła sztuki itp. Każdy kupujący zamierza nabyć dokładnie jedno dobro. Dla każdego kupującego $k \in K$ i każdego dobra $d \in D$ określona jest liczba $v(k, d) \geq 0$, którą interpretujemy jako wartość dobra d dla kupującego k.[6]

Załóżmy, że dla każdego dobra $d \in D$ została określona cena $p(d) \geq 0$. Wektor p ze współrzędnymi $p(d)$ (indeksowanymi przez elementy zbioru D) będziemy nazywali wektorem cen. „Zysk" kupującego k związany z zakupem dobra d po cenie $p(d)$ określamy jako $z(k, d) = v(k, d) - p(d)$. Dla danego wektora cen p i danego kupującego k określamy zbiór dóbr dopuszczalnych dla k jako

$$F(p, k) = \{ d \in D: z(k, d) \geq 0 \}.$$

Jeśli $F(p, k) \neq \emptyset$, to zbiór dóbr optymalnych dla kupującego k określamy jako:

$$Opt\ (p, k) = \{ d \in F(p, k): z(k, d) \geq z(k, c) \text{ dla każdego } c \in F(p, k)\}.$$

Dla danego dobra $d \in D$ określamy też zbiór popytowy jako:

$$D(p, d) = \{ k \in K: d \in Opt\ (p, k) \}.$$

Zbiór popytowy dla d jest zbiorem kupujących, dla których d jest (przy danych cenach) dobrem optymalnym, a więc takim które ci kupujący gotowi byliby nabyć.

Równowagę otrzymujemy jeśli każdemu kupującemu można przydzielić, w sposób jedno-jednoznaczny, jakieś dobro, które jest dla niego optymalne. Formalnie można to przedstawić za pomocą następujących definicji.

Definicja 1. Wektor p nazywamy wektorem cen równowagi w modelu Gale'a, jeśli istnieje taka bijekcja $u: K \to D$, że dla każdego $k \in K$ zachodzi $u(k) \in Opt\ (p, k)$.

Definicja 2. Jeśli p jest wektorem cen równowagi, to taką bijekcję $u: K \to D$, że dla każdego $k \in K$ zachodzi $u(k) \in Opt\ (p, k)$ nazywamy alokacją równowagi (walrasowskiej) związaną z cenami p.

---

[6] Shapley i Shubik (1971/72) traktują $v(k, d)$ jako **(**wyrażoną w pieniądzu**)** subiektywną ocenę użyteczności dobra d, którą odróżniają od oszacowania przez kupującego k rynkowej wartości dobra d.

Gale (1960) udowodnił (zob. też Shoham i Leyton-Brown, 2009), że tak zdefiniowane alokacje równowagi są rozwiązaniami klasycznego zagadnienia przydziału (zob. np. Sikora, 2008, str. 190).

Definicja 3. Wartością bijekcji u: $K \to D$ nazywamy liczbę

$$v(u) = \Sigma_{k \in K} v(k, u(k)).$$

Wartością bijekcji u jest więc suma wartości dóbr nabywanych przez kupujących w wyniku transakcji wyznaczonych przez bijekcję u.

Definicja 4. Bijekcja u: $K \to D$ nazywa się alokacją optymalną, jeśli dla dowolnej bijekcji w: $K \to D$ mamy $v(u) \geq v(w)$.

Twierdzenie 1. (Gale, 1960).

W modelu Gale'a alokacja u: $K \to D$ jest alokacją równowagi (dla pewnych cen równowagi p) wtedy i tylko wtedy, gdy jest alokacją optymalną.

Alokacja równowagi jest więc w modelu Gale'a sposobem przydziału dóbr kupującym, który maksymalizuje sumaryczną wartość przydzielonych dóbr. Innymi słowy, jest to optymalne rozwiązanie zagadnienia przydziału dla macierzy $\{v(k, d)\}$.

3. MODEL TYPU GALE'A-SHAPLEYA

W modelu tym zakładamy, podobnie jak to zrobił Gale w swoim modelu, że dane są skończone, równoliczne zbiory K i D (zbiór kupujących i zbiór dóbr) oraz, że każdy kupujący chciałby nabyć dokładnie jedno dobro. Zakładamy też, że dla każdego kupującego $k \in K$ i każdego dobra $d \in D$ określona jest liczba $r(k, d) \geq 0$ interpretowana jako maksymalna kwota jaką kupujący k gotowy jest przeznaczyć na zakup dobra d. Liczbę $r(k, d)$ będziemy nazywali ceną graniczną (termin ten jest używany w polskiej literaturze ekonomicznej jako odpowiednik angielskiego *reservation price*).

Liczby $r(k, d)$ mogą być różne od liczb $v(k, d)$ występujących w modelu Gale'a, chociażby ze względu na ograniczenia budżetowe, które kupujący k musi brać pod uwagę. Różnicę między liczbami $r(k, d)$ i liczbami $v(k, d)$ występującymi w modelu Gale'a najprościej wyjaśnić na przykładzie. Załóżmy np., że kupujący k rozważa zakup dwóch domów A i B[7]. Jego subiektywna wartość domu A wynosi 1 mln zł ($v(k, A) = 1$), a wartość domu B – 800 tys. zł ($v(k, B) = 0{,}8$). Kupujący k może przeznaczyć na zakup domu maksymalnie 800 tys. zł. Dom A jest gotowy do zamieszkania, natomiast dom B wymaga remontu, którego koszt kupujący k ocenia na 100 tys. zł. Jeśli więc kupujący nie chce ponosić dodatkowych kosztów, to może wydać na dom B faktycznie jedynie 700 tys. zł, wówczas $r(k, A) = 0{,}8$, $r(k, B) = 0{,}7$.

[7] Domy są przykładem dóbr niepodzielnych szczególnie często wykorzystywanym w klasycznych pracach, np. u Gale'a (1960) lub Shapleya i Shubika (1971/72). Oczywiście zakładamy tutaj, że dom może być kupiony tylko w całości.

W praktyce liczby $v(k, d)$ mogą być dla kupujących trudniejsze do określenia niż liczby $r(k, d)$, są bardziej „nieuchwytne" (podobnie jak użyteczności, którymi operuje teoria konsumenta). Wydaje się, że w wielu sytuacjach łatwiej dałoby się uzyskać od kupujących informację o cenach granicznych niż o subiektywnych wartościach dóbr (np. od kupujących przystępujących do aukcji, oczywiście kupujący, z wiadomych względów, starają się zwykle zachować tę informację dla siebie).

Oprócz liczb $r(k, d)$ w modelu G.-S. określone są preferencje kupujących w zbiorze dóbr. Zakładamy, że dla każdego kupującego $k \in K$ określony jest liniowy porządek w zbiorze D oznaczony symbolem $>_k$. Oznacza to, że dla dowolnych dwóch różnych dóbr $c, d \in D$ zachodzi dokładnie jedna z dwóch możliwości: kupujący k woli c od d (tzn. $c >_k d$) lub woli d od c ($d >_k c$). Preferencje są tutaj dane z góry, wyrażają subiektywne upodobania kupujących i nie zależą od cen $p(d)$.

W modelu Gale'a preferencje są wyznaczone za pomocą „zysków" $z(k, d) = v(k, d) - p(d)$. W modelu G.-S. preferencje nie zależą ani od liczb $r(k, d)$ ani od różnic $r(k, d) - p(d)$. Liczby $r(k, d)$ można tutaj traktować podobnie jak ograniczenia budżetowe w neoklasycznej teorii wyboru konsumenta (przy czym ograniczenia mogą być różne dla różnych dóbr). Kupujący, podobnie jak konsument w zadaniu maksymalizacji użyteczności, wybiera, zgodnie ze swoimi preferencjami, najlepsze dobro w zbiorze dóbr dopuszczalnych, tzn. takich które może zakupić w ramach istniejących ograniczeń budżetowych.

Przedstawimy teraz pewne pomocnicze definicje, za pomocą których będzie można zdefiniować równowagę w modelu G.-S. Dla danego wektora cen p i danego kupującego k określamy zbiór dóbr dopuszczalnych jako

$$F(p, k) = \{ d \in D: r(k, d) \geq p(d) \}.$$

Jeśli $F(p, k) \neq \emptyset$, to zbiór dóbr optymalnych dla kupującego k określamy jako:

$$Opt\ (p, k) = \{ d \in F(p, k): d \geq_k c \text{ dla każdego } c \in F(p, k) \}.$$

Zauważmy, że w tym przypadku zbiór $Opt\ (p, k)$ jest zawsze jednoelementowy (gdyż $>_k$ są liniowymi porządkami). Dla danego $d \in D$ określamy zbiór popytowy jako

$$D(p, d) = \{ k \in K: d \in Opt\ (p, k) \}.$$

Zauważmy, że ponieważ zbiory $Opt\ (p, k)$ są jednoelementowe, więc zbiory $D(p, d)$ są rozłączne (dla różnych d).

Definicja 5. Ceny p w modelu G.-S. są cenami równowagi, jeśli istnieje taka bijekcja $u: K \to D$, że dla każdego $k \in K$ zachodzi $u(k) \in Opt\ (p, k)$.

Równoważnie można zdefiniować ceny równowagi jako takie ceny p, że wszystkie zbiory $D(p, d)$ (dla $d \in D$) są jednoelementowe (zob. Świtalski, 2014).

Bijekcję, o której mowa w def. 3.1, podobnie jak w modelu Gale'a, nazywamy alokacją równowagi (walrasowskiej) związaną z cenami p.

Model G.-S. jest wzorowany na klasycznym modelu rekrutacji kandydatów do szkół opisanym przez Gale'a i Shapleya (1962) (zob. też Świtalski, 2014). W modelu rekrutacji liczba $r(k, d)$ może być interpretowana jako liczba punktów, którą posiada kandydat z przedmiotów wymaganych przez szkołę d („budżet" kandydata), a $p(d)$ – jako minimalna liczba punktów wymaganych przez szkolę d przy przyjmowaniu kandydatów („cena" miejsca w szkole d). Różnica między przedstawionym modelem, a modelem rekrutacji polega na tym, że w modelu rekrutacji szkoły przyjmują wielu kandydatów (tzn. jeśli traktować d jako miejsce w pewnej szkole, to mamy tutaj wiele identycznych „kopii" dobra d).

W modelu G.-S. równowagi są związane z pojęciem skojarzenia stabilnego wprowadzonym przez Gale'a i Shapleya (1962).

Definicja 6. Bijekcja $u\colon K \to D$ nazywa się skojarzeniem stabilnym, jeśli nie istnieje taka para $(k, d) \in K \times D$, że $d >_k u(k)$ oraz $r(k, d) > r(l, d)$, gdzie l jest takim kupującym, że $u(l) = d$.

Istnienie pary (k, d) takiej jak w powyższej definicji oznaczałoby, że kupujący k woli nabyć dobro d, a nie dobro $u(k)$, które otrzymuje w alokacji u, a jednocześnie jest gotowy za to dobro zapłacić więcej niż kupujący l, który dobro to nabył. W takiej sytuacji alokacja u nie jest najkorzystniejsza ani z punktu widzenia kupującego k, ani właściciela dobra d. Brak tego rodzaju par (k, d) gwarantuje więc, że zarówno kupujący, jak i właściciele dóbr nie będą skłonni do zmiany istniejącego układu transakcji.

Przy założeniu, że dla każdego ustalonego $d \in D$ wszystkie ceny $r(k, d)$ (dla wszystkich $k \in K$) są różne, można udowodnić następujące twierdzenie będące pewną analogią do twierdzenia 1 (zob. Świtalski, 2014).

Twierdzenie 2. W modelu G.-S. alokacja $u\colon K \to D$ jest alokacją równowagi (dla pewnych cen równowagi p) wtedy i tylko wtedy, gdy u jest skojarzeniem stabilnym.

4. WEKTORY CEN RÓWNOWAGI W MODELU G.-S.

Na ogół w modelach równowagi jednej alokacji równowagi odpowiada wiele różnych wektorów cen równowagi. Na przykład w klasycznym modelu wymiany Arrowa-Hurwicza zbiór wektorów cen równowagi jest stożkiem, to znaczy jeśli p jest wektorem równowagi, to również wszystkie wektory postaci λp ($\lambda > 0$) są wektorami równowagi[8]. W modelach typu Shapleya-Shubika (będących rozwinięciem modelu Gale'a) zbiory wektorów cen równowagi są wypukłymi kratami zupełnymi, w szcze-

[8] Zwykle mówi się w tym przypadku, że istnieje dokładnie jeden wektor cen równowagi wyznaczony z dokładnością do stałej.

gólności dla danej alokacji równowagi istnieją maksymalny i minimalny wektory cen równowagi (zob. np. Mishra, Talman, 2010).

Zbadamy teraz strukturę zbioru wektorów cen równowagi dla modelu G.-S. Rozpoczniemy od przykładu.

Przykład. (Świtalski, 2014) Załóżmy, że mamy trzech kupujących: A, B, C oraz trzy domy na sprzedaż: X, Y, Z. Maksymalne ceny jakie kupujący są gotowi zaoferować za poszczególne domy przedstawione są w tabeli 1.

Tabela 1.

Ceny graniczne kupujących (w tys. zł)

	X	Y	Z
A	850	750	850
B	700	800	800
C	900	700	700

Preferencje kupujących są następujące: A: XYZ, B: YXZ, C: ZYX (kupującemu A najbardziej odpowiada dom X, następnie Y, a na końcu Z itd.). Łatwo sprawdzić, że jedynymi skojarzeniami stabilnymi są w tym przypadku u: $A \to X$, $B \to Y$, $C \to Z$, oraz v: $A \to Z$, $B \to Y$, $C \to X$. Są to więc (na podstawie twierdzenia 2) również jedyne alokacje równowagi. Rozważmy wektor cen $p = (850, 750, 700)$ (tzn. cena domu X jest równa $p(X) = 850$, cena $Y = p(Y) = 750$, cena $Z = p(Z) = 700$). Zbiory domów dopuszczalnych dla poszczególnych kupujących są dla wektora p następujące: $F(p, A) = \{X, Y, Z\}$, $F(p, B) = \{Y, Z\}$, $F(p, C) = \{X, Z\}$. Mamy więc domy optymalne: $Opt\ (p, A) = \{X\}$, $Opt\ (p, B) = \{Y\}$, $Opt\ (p, C) = \{Z\}$. Stąd zbiory popytowe są następujące: $D(p, X) = \{A\}$, $D(p, Y) = \{B\}$, $D(p, Z) = \{C\}$. Widać więc, że ceny p są cenami równowagi dla alokacji równowagi u. Łatwo sprawdzić, że zbiór wszystkich wektorów cen równowagi dla alokacji u jest prostopadłościanem postaci

$$EQ(u) = [0, 850] \times [0, 800] \times [0, 700].$$

Dla alokacji v odpowiedni zbiór ma postać

$$EQ(v) = (850, 900] \times (750, 800] \times (700, 850].$$

Warto krótko wyjaśnić, dlaczego w zbiorze $EQ(u)$ wszystkie przedziały są domknięte, a w zbiorze $EQ(v)$ lewostronnie otwarte. Zauważmy, że przy alokacji u wszyscy kupujący otrzymują najlepsze dla siebie domy, a więc przy dowolnym obniżaniu ceny, aż do wartości 0, zachowana zostaje równowaga, natomiast przy alokacji v i przy maksymalnych cenach równowagi (900, 800, 850) ich obniżenie może spowodować utratę stanu równowagi. Jeśli np. ceny domów będą równe (850, 800, 850),

to w tym przypadku zarówno kupujący A, jak i C chcieliby nabyć dom X, a więc nie są to już ceny równowagi, chociaż cenami równowagi są dowolne ceny postaci $(850 + \varepsilon, 800, 850)$, dla dowolnego $\varepsilon \in (0, 50]$. Podobnie jest dla lewych końców pozostałych dwóch odcinków, a więc dla alokacji v przedziały wyznaczające zbiór $EQ(v)$ są lewostronnie otwarte.

Zbiór wszystkich wektorów cen równowagi można przedstawić jako

$$EQ = EQ(u) \cup EQ(v).$$

Zauważmy, ze zbiory $EQ(u)$ i $EQ(v)$ są rozłączne, zbiór $EQ(v)$ nie zawiera niektórych ścian brzegowych, zbiór EQ jest kratą zupełną zawierającą wektor maksymalny (900, 800, 850) oraz minimalny (0, 0, 0), chociaż nie jest zbiorem wypukłym.

W następnym paragrafie udowodnię, że przy założeniu, że wszystkie ceny graniczne dla kupujących są dodatnie, zbiór wektorów cen równowagi w modelu G.-S. jest zawsze rozłączną sumą wielowymiarowych prostopadłościanów, przy czym niektóre z nich mogą nie zawierać niektórych ścian (jako iloczyny kartezjańskie przedziałów lewostronnie otwartych, podobnie jak w powyższym przykładzie).

5. STRUKTURA ZBIORU WEKTORÓW CEN RÓWNOWAGI W MODELU G.-S.

Rozważamy model G.-S. z n-elementowym zbiorem kupujących K i n-elementowym zbiorem dóbr D. Zbiór wektorów cen równowagi oznaczamy symbolem EQ. Jeśli p jest wektorem cen równowagi, to alokacją równowagi odpowiadającą wektorowi p nazywamy taką bijekcję u: $K \to D$, że dla każdego $k \in K$ zachodzi $u(k) \in Opt\ (p, k)$ (w tym przypadku oznacza to, że $\{u(k)\} = Opt\ (p, k)$). Równowagą nazywamy parę (u, p) taką, że p jest wektorem cen równowagi, a u alokacją odpowiadającą wektorowi p. Jeśli u jest alokacją równowagi (odpowiadającą pewnemu wektorowi cen p), to zbiór wszystkich wektorów cen, którym odpowiada alokacja u oznaczamy symbolem $EQ(u)$ (ceny $p \in EQ(u)$ nazywamy też cenami równowagi dla alokacji u). Łatwo zauważyć (zob. Świtalski, 2014), że zbiór ten zawsze będzie nieskończony.

W zbiorze $EQ(u)$ określimy teraz pewien wektor cen $p(u)$ (który można nazwać granicznym wektorem cen dla alokacji u) za pomocą wzoru:

$$p(u)(d) = r(k, d),$$

gdzie k jest takim kupującym, że $u(k) = d$. Symbol $p(u)(d)$ oznacza tutaj d-tą współrzędną wektora $p(u)$. Wektor $p(u)$ jest więc wektorem cen granicznych dóbr dla kupujących, którzy przy alokacji u otrzymali te właśnie dobra.

Nietrudno zauważyć (Świtalski, 2014), że $p(u) \in EQ(u)$, tzn., że ceny $p(u)$ są cenami równowagi dla alokacji u. Okazuje się, że są to maksymalne ceny równowagi dla alokacji u, o czym mówi następujący lemat.

Lemat 1. Ceny $p(u)$ są maksymalnymi cenami równowagi dla alokacji u, tzn. jeśli (u, q) jest równowagą, dla pewnych cen q, to $p(u) \geq q$.

Dowód. Jeśli (u, q) jest równowagą to, dla każdego $k \in K$ mamy $u(k) \in Opt\ (q, k)$, a więc $u(k) \in F(q, k)$ czyli $r(k, u(k)) \geq q(u(k))$. Przyjmując $d = u(k)$ otrzymujemy, że $r(k, d) \geq q(d)$ dla każdego $d \in D$ i takiego k, że $u(k) = d$ (gdyż u jest bijekcją). Oznacza to, że $p(u)(d) \geq q(d)$ dla każdego $d \in D$, a więc $p(u) \geq q$. ■

W następnych lematach przedstawimy dalsze własności wektorów cen równowagi w modelu G.-S.

Lemat 2. Jeśli q jest wektorem cen równowagi dla alokacji u, to dowolny wektor s spełniający warunek $p(u) \geq s \geq q$ jest też wektorem cen równowagi dla alokacji u.

Dowód. Nierówności $p(u) \geq s \geq q$ implikują

$$F(p(u), k) \subset F(s, k) \subset F(q, k) \tag{1}$$

dla każdego $k \in K$. Ponieważ $p(u)$ oraz q są cenami równowagi dla u, więc dla każdego $k \in K$ dobro $u(k)$ jest optymalne zarówno w zbiorze $F(p(u), k)$, jak i w $F(q, k)$. Na podstawie warunku (1) wnioskujemy**,** że $u(k)$ jest również optymalne w $F(s, k)$. Oznacza to, że również ceny s są cenami równowagi dla u. ■

Rozważamy ponownie wektor $p(u)$ cen granicznych dla alokacji u, o współrzędnych

$$p(u)(d) = r(k, d) \qquad (u(k) = d).$$

Ustalmy $d \in D$. Niech a będzie liczbą taką, że $p(u)(d) \geq a \geq 0$. Niech $(p(u)_{-d}, a)$ będzie wektorem, który ma wszystkie współrzędne takie jak $p(u)$ oprócz współrzędnej d-tej, która jest równa a. Z lematu 2 wynika, że jeśli $(p(u)_{-d}, a)$ jest wektorem równowagi, to wszystkie takie wektory $(p(u)_{-d}, \beta)$, że $p(u)(d) \geq \beta \geq a$, są też wektorami równowagi (tzn. należą do zbioru $EQ(u)$). Niech

$$q(u)(d) = \inf \{\ a\colon p(u)(d) \geq a \geq 0 \wedge (p(u)_{-d}, a) \in EQ(u)\ \}. \tag{2}$$

Liczba $q(u)(d)$ jest wiec graniczną wartością a, dla której można zmniejszać współrzędną $p(u)(d)$ wektora $p(u)$ tak, aby zachować równowagę (tzn. tak, aby ceny $p(u)$ ze zmniejszoną wartością współrzędnej $p(u)(d)$ były w dalszym ciągu cenami równowagi dla alokacji u).

Pytamy się, kiedy

$$(p(u)_{-d}, q(u)(d)) \in EQ(u) \tag{3}$$

(z definicji $q(u)(d)$ w (2) nie wynika, że zawsze tak musi być). Odpowiedź daje poniższy lemat

Lemat 3. Jeśli wszystkie ceny graniczne $r(k, d)$ (dla $k \in K$) są dodatnie, to wektor $(p(u)_{-d}, q(u)(d))$ jest wektorem równowagi dla alokacji u wtedy i tylko wtedy, gdy $q(u)(d) = 0$.

Dowód. Zauważmy po pierwsze, że jeśli $q(u)(d) > 0$, to zależność (3) nie zachodzi. Jeśli bowiem p jest dowolnym wektorem równowagi (tzn. $p \in EQ(u)$) oraz p ma przynajmniej jedną współrzędna dodatnią, to również, dla odpowiednio małej liczby $\varepsilon > 0$ zachodzi $p(\varepsilon) \in EQ(u)$, gdzie $p(\varepsilon)$ jest wektorem powstałym z p przez zmniejszenie współrzędnych dodatnich o liczbę ε. Wynika to stąd, że zbiór wszystkich możliwych wartości cen granicznych jest skończony, a więc dla odpowiednio małego $\varepsilon > 0$ i dla dowolnego $k \in K$ mamy

$$F(p(\varepsilon), k) = F(p, k).$$

Gdyby więc (3) było prawdą dla $q(u)(d) > 0$, to moglibyśmy zmniejszyć liczbę $q(u)(d)$ o dostatecznie małą liczbę $\varepsilon > 0$ zachowując równowagę, ale to przeczyłoby definicji liczby $q(u)(d)$.

Załóżmy, że $q(u)(d) = 0$. Ponieważ wszystkie liczby $r(k, d)$ są dodatnie, więc $p(u)(d) > 0$, a więc na podstawie wzoru (2) otrzymujemy $(p(u)_{-d}, \varepsilon) \in EQ(u)$ dla odpowiednio małej liczby $\varepsilon > 0$. Podobnie, skoro wszystkie liczby $r(k, d)$ są dodatnie, to

$$F((p(u)_{-d}, \varepsilon), k) = F((p(u)_{-d}, 0), k)$$

i ostatecznie $(p(u)_{-d}, 0) \in EQ(u)$. ■

Jeśli dopuszczamy możliwość, że dla jakiegoś k zachodzi $r(k, d) = 0$, to warunek (3) dla $q(u)(d) = 0$ będzie również spełniony poza przypadkiem, gdy $p(u)(d) > 0$ oraz istnieje l takie, że $r(l, d) = 0$ i $d >_l u(l)$.

Następny lemat charakteryzuje zbiór wektorów cen równowagi w modelu G.-S. dla danej alokacji u.

Lemat 4. Niech u: $K \to D$ będzie alokacją równowagi w modelu G.-S., w którym wszystkie ceny $r(k, d)$ są dodatnie. Wektor q jest wektorem cen równowagi dla alokacji u wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $d \in D$ mamy

$$\begin{aligned} &1)\ q(d) \in (q(u)(d), p(u)(d)], && \text{jeśli } q(u)(d) > 0,\\ &2)\ q(d) \in [q(u)(d), p(u)(d)], && \text{jeśli } q(u)(d) = 0. \end{aligned}$$

Dowód. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że q jest wektorem równowagi. Wówczas z lematu 1, dla dowolnego $d \in D$ mamy $0 \le q(d) \le p(u)(d)$. A więc, jeśli $q(u)(d) = 0$, to $q(d) \in [q(u)(d), p(u)(d)]$, czyli prawdziwa jest zależność 2).

Załóżmy, że $q(u)(d) > 0$ oraz $q(d) \le q(u)(d)$. Ponieważ q jest równowagą oraz

$$q \le (p(u)_{-d}, q(d)) \le p(u)$$

(gdyż dla każdego d zachodzi $q(d) \leq p(u)(d)$), więc, na podstawie lematu 2, wektor $(p(u)_{-d}, q(d))$ też jest wektorem równowagi dla alokacji u. Równość $q(d) = q(u)(d)$ jest niemożliwa na podstawie lematu 3 (bo założyliśmy, że $q(u)(d) > 0$). A więc $q(d) < q(u)(d)$. Ale na podstawie definicji $q(u)(d)$ również w tym przypadku wektor $(p(u)_{-d}, q(d))$ nie może być wektorem równowagi. Otrzymaliśmy sprzeczność, skąd wynika, że jeśli $q(u)(d) > 0$, to $q(d) > q(u)(d)$, czyli prawdziwa jest zależność 1).

($\Leftarrow$) Zakładamy, że spełnione są zależności 1) i 2). Chcemy udowodnić, że wektor q jest wektorem równowagi dla alokacji u. Ponieważ $p(u)$ jest wektorem równowagi dla u, więc dla każdego $k \in K$ mamy $\{u(k)\} = Opt\ (p(u), k)$. Ustalmy $k \in K$ i niech $d = u(k)$. Udowodnimy, że $\{d\} = Opt\ (q, k)$. Wystarczy w tym celu udowodnić, że $d \in F(q, k)$ oraz, że jeśli $c \in F(q, k)$, to $d \succeq_k c$. Ponieważ $q \leq p(u)$, więc jeśli dobro d jest dopuszczalne dla kupującego k przy cenach $p(u)$, to jest również dopuszczalne dla k przy cenach q. Stąd $d \in F(q, k)$. Załóżmy, że $c \in F(q, k)$. Ponieważ wektory $(p(u)_{-c}, q(c))$ i q mają tę samą c-tą współrzędną, więc c jest dopuszczalne dla k również przy cenach $(p(u)_{-c}, q(c))$. Ale ceny $(p(u)_{-c}, q(c))$ są cenami równowagi dla alokacji u (co wynika z warunków 1) i 2) oraz definicji $q(u)(d)$). Ponieważ $u(k) = d$, więc d jest dobrem optymalnym dla kupującego k przy cenach $(p(u)_{-c}, q(c))$. Stąd $d \succeq_k c$. ■

Z lematu 4 otrzymujemy jako wniosek następujące twierdzenie (Świtalski, 2014):

Twierdzenie 3. Przy założeniu, że wszystkie ceny graniczne $r(k, d)$ są dodatnie, w modelu rynku typu G.-S. zbiór wektorów cen równowagi jest rozłączną sumą prostopadłościanów postaci $P_1 \times P_2 \times ... \times P_n$, gdzie każdy ze zbiorów P_t ($t = 1, 2, ..., n$) jest przedziałem postaci $(r_t, p_t]$, gdzie $0 < r_t < p_t$ lub $[0, p_t]$, gdzie $p_t > 0$.

6. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono geometryczną strukturę zbioru wektorów cen równowagi w modelu rynku typu Gale'a-Shapleya. Jak się okazuje struktura tego zbioru jest istotnie różna od struktury odpowiedniego zbioru dla modeli typu Shapleya-Shubika (dla modeli typu S.-S. zbiór wektorów cen równowagi jest zbiorem wypukłym). Model rynku typu Gale'a-Shapleya może być traktowany jako alternatywny w stosunku do modelu Shapleya-Shubika (będącego z kolei rozszerzeniem klasycznego modelu Gale'a) model rynku ze skończoną liczbą niepodzielnych dóbr. Modele typu G.-S. w przeciwieństwie do modeli S.-S. nie były do tej pory przedmiotem badań (przynajmniej z punktu widzenia teorii równowagi typu Walrasa), a wydaje się, że są warte zainteresowania ze względu na swą prostotę, naturalność i związek z dobrze znanymi modelami rekrutacji.

Uniwersytet Zielonogórski

LITERATURA

Andersson T., Erlanson A., (2013), Multi-Item Vickrey-English-Dutch Auctions, *Games and Economic Behavior*, 81, 116–129.
Camina E., (2006), A Generalized Assignment Game, *Mathematical Social Sciences*, 52, 152–161.
Gale D., (1960), *The Theory of Linear Economic Models*, The University of Chicago Press, Chicago.
Gale D., Shapley, L. S., (1962), College Admissions and the Stability of Marriage*, American Mathematical Monthly*, 69, 9–15.
Mishra D., Talman D., (2010), Characterization of the Walrasian Equilibria of the Assignment Model, *Journal of Mathematical Economics*, 46, 6–20.
Mishra D., Garg R., (2006), Descending Price Multi-Item Auctions, *Journal of Mathematical Economics*, 42, 161–179.
Shapley L. S., Scarf H., (1974), On Cores and Indivisibility, *Journal of Mathematical Economics*, 1, 23–37.
Shapley L. S., Shubik M., (1971/72), The Assignment Game I: The Core, *Int. Journal of Game Theory*, 1, 111–130.
Shoham Y., Leyton-Brown K., (2009), *Multiagent Systems – Algorithmic, Game-Theoretic and Logical Foundations*, Cambridge University Press, Cambridge.
Sikora W., (red.), (2008), *Badania operacyjne*, PWE, Warszawa.
Sotomayor M., (2007), Connecting the Cooperative and Competitive Structures of the Multiple-Partners Assignment Game, *Journal of Economic Theory*, 134, 155–174.
Świtalski Z., (2014), Równowagi cenowe w dyskretnych modelach rynku typu Gale'a-Shapleya, w: Jurek W. (red.), *Matematyka i informatyka na usługach ekonomii. Rozważania ogólne. Modele*, Wydawnictwo UE, Poznań, 145-155.

STRUKTURA ZBIORU WEKTORÓW CEN RÓWNOWAGI W MODELU RYNKU TYPU GALE'A-SHAPLEYA

Streszczenie

W artykule porównano model rynku dóbr niepodzielnych przedstawiony przez Gale'a (1960) w książce *The Theory of Linear Economic Models* z modelem rynku wzorowanym na modelu rekrutacji kandydatów do szkół przedstawionym przez Gale'a i Shapleya (1962). Dla modelu rynku typu Gale'a-Shapleya (który został bardziej szczegółowo opisany w pracy Świtalskiego, 2014) scharakteryzowano zbiór wektorów cen równowagi jako rozłączną sumę n-wymiarowych prostopadłościanów.

Słowa kluczowe: równowaga rynkowa, rynek dóbr niepodzielnych, model Gale'a-Shapleya, model Shapleya-Shubika

THE STRUCTURE OF THE SET OF VECTORS OF EQUILIBRIUM PRICES IN THE MARKET MODEL OF GALE-SHAPLEY TYPE

Abstract

In the paper we compare market model of Gale (1960) presented in the book *The Theory of Linear Economic Models* (for finite set of indivisible goods) with the market model based on the college admission model of Gale and Shapley (1962). For the market model of Gale-Shapley type (which was presented in details by Świtalski, 2014) we characterize the set of vectors of equilibrium prices as a disjoint union of some n-dimensional rectangular parallelepipeds.

Keywords: market equilibrium, market model for indivisible goods, Gale-Shapley model, Shapley-Shubik model

PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXI – ZESZYT 1 – 2014

MARIA WESTA

ALGEBRAICZNA RÓWNOWAŻNOŚĆ PEWNYCH ESTYMATORÓW MNK ORAZ PREDYKTORÓW W PRZYPADKU KLASYCZNYCH MODELI REGRESJI LINIOWEJ UWZGLĘDNIAJĄCYCH ADDYTYWNE, STAŁE EFEKTY SEZONOWE

1. WSTĘP

Klasyczny model regresji liniowej, do którego włączono addytywne, stałe efekty sezonowe dotyczące wszystkich okresów sezonowych (poniżej nazywany KMRL-AS), nie może być szacowany bezpośrednio metodą najmniejszych kwadratów (MNK) z powodu dokładnej współliniowości zmiennych objaśniających. Niniejszy artykuł dotyczy estymatorów i predyktorów stosowanych w przypadku KMRL-AS, w których wykorzystuje się to, że parametry KMRL-AS są liniowymi funkcjami parametrów pewnych modeli estymowalnych bezpośrednio MNK (poniżej nazywanych modelami pomocniczymi lub krócej MP), uzyskanych z KMRL-AS przez eliminację jednej ze współliniowych zmiennych objaśniających lub jednego z efektów sezonowych. Rozważania artykułu dotyczą pośrednio estymatorów i predyktorów dla klasycznego modelu deterministycznego trendu liniowego z addytywnymi, stałymi efektami sezonowymi. Model ten bowiem z formalnego punktu widzenia jest szczególnym przypadkiem KMRL-AS.

W literaturze światowej brak jest precyzyjnych teoretycznych informacji o relacjach między wynikami uzyskiwanymi przy użyciu różnych estymatorów (różnych predyktorów), dotyczących KMRL-AS lub wspomnianego powyżej szczególnego przypadku KMRL-AS. Znajduje to odzwierciedlenie w podręcznikach akademickich (patrz np. Cieślak, 2005 s. 89; Gruszczyński et. al. 2009 s. 113–114; Maddala, 2006, s. 353 i 391; Welfe, 2003, s. 167–168; Zieliński, 1979). W literaturze przedmiotu brak jest również precyzyjnych informacji teoretycznych o relacjach między estymatorami efektów sezonowych (o relacjach między predyktorami) opartymi na KMRL-AS i na klasycznym modelu regresji liniowej zawierającym składowe harmoniczne (poniżej nazywanym KMRL-HS). Na podstawie przykładów liczbowych stwierdza się, że modele te „można stosować zamiennie, gdyż dają one przybliżone wyniki" (patrz np. Wiśniewski, 1981 s. 69–70).

Wykorzystując twierdzenia udowodnione przez Westę (2004), w niniejszym artykule określono zależności między estymatorami MNK parametrów strukturalnych

dla par modeli należących do zbioru utworzonego przez KMRL-HS i wszystkie MP. Następnie udowodniono:
- algebraiczną równoważność estymatorów parametrów strukturalnych KMRL-AS w przypadku wszystkich procedur wykorzystujących MP;
- identyczność reszt KMRL-AS, KMRL-HS i wszystkich MP;
- algebraiczną równoważność estymatorów dowolnego efektu sezonowego, wykorzystujących MP albo KMRL-HS;
- algebraiczną równoważność predyktorów zmiennej objaśnianej KMRL-HS i KMRL-AS, opartych odpowiednio na KMRL-HS i dowolnych MP.

Dalsza struktura artykułu jest następująca. Po sformułowaniu założeń KMRL-AS (pkt 2), przedstawieniu rozważanych procedur estymacji tego modelu (pkt 3) i określeniu założeń KMRL-HS (pkt 4), udowodniono twierdzenie dotyczące relacji między wynikami estymacji MNK par modeli należących do zbioru obejmującego KMRL-HS i wszystkie MP (pkt 5). W twierdzeniu określono zależności zarówno między estymatorami wektorów parametrów strukturalnych, jak i estymatorami macierzy wariancji i kowariancji tych estymatorów. Wykazano także identyczność reszt MNK tych modeli. Powyższe twierdzenie wykorzystano w dowodach dwóch twierdzeń dotyczących estymacji KMRL-AS (pkt 6). Zgodnie z pierwszym twierdzeniem estymatory wektora parametrów strukturalnych KMRL-AS w wszystkich procedurach wykorzystujących MP są algebraicznie równoważne. Według drugiego twierdzenia reszty KMRL-AS są identyczne z resztami MP. Następnie udowodniono algebraiczną równoważność estymatorów efektów sezonowych w przypadku KMRL-AS i KMRL-HS (pkt 7). Ostatni punkt artykułu dotyczy predyktorów wartości zmiennej objaśnianej w KMRL-AS i KMRL-HS. Wykazano, że predyktory oparte na KMRL-HS i MP są sobie równe i algebraicznie równoważne zaproponowanemu w artykule predyktorowi opartemu na KMRL-AS.

2. ZAŁOŻENIA ROZWAŻANEGO MODELU REGRESJI LINIOWEJ Z ADDYTYWNYMI, STAŁYMI EFEKTAMI SEZONOWYMI

Oznaczmy przez $y_t, x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{kt}$ ($t = 1, 2, \ldots, n$) t-te obserwacje odpowiednio na zmiennych $y, x_1, x_2, \ldots, x_k$. Przyjmijmy, że występuje m-okresowa sezonowość, gdzie m jest liczbą parzystą. Niech Q_{it} ($i \in \{1, 2, \ldots, m\}$; $t \in \{1, 2, \ldots, n\}$) jest zdefiniowane następująco:

$$Q_{it} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } t \text{ dotyczy } i\text{-tego okresu sezonowego} \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases} \tag{1}$$

Załóżmy, że kształtowanie się y_t opisuje następujący model:

$$y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i Q_{it} + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{jt} + u_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, n;\ n > m + k), \tag{2}$$

gdzie: β_0, γ_1, …, γ_m, β_1, β_2, …, β_k – nieznane parametry strukturalne, spełniające warunek:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_m = 0 . \tag{3}$$

u_1, u_2, …, u_n – składniki losowe takie, że:

$$E(u_t) = 0 , \;\; Var(u_t) = \sigma^2 \;\text{ i }\; E(u_t u_{t'}) = 0 , \quad (t = 1,\ 2,\ \ldots, n;\ t' = 1,\ 2,\ \ldots, n \quad \text{i} \quad t' \neq t), \tag{4}$$

przy czym $\sigma^2 > 0$ jest nieznaną stałą.

Niech ponadto macierz obserwacji na zmiennych x_1, x_2, …, x_k w modelu (2), oznaczana poniżej **X**, spełnia następujące założenia:

– elementy macierzy **X** ustalone są w powtarzalnych próbach; (5)
– rząd macierzy **X** jest równy k. (6)

Poniżej model określony w (2)-(6) nazywany będzie skrótowo KMRL-AS. Powstał on przez włączenie do klasycznego modelu regresji liniowej addytywnych, stałych efektów sezonowych dotyczących wszystkich okresów sezonowych. Z formalnego punktu widzenia, szczególnym przypadkiem KMRL-AS jest m.in. następujący model deterministycznego trendu liniowego z addytywnymi, stałymi efektami sezonowymi:

$$y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i Q_{it} + \beta_1 t + u_t \qquad (t = 1,\ 2,\ \ldots, n;\ n > m + 1) . \tag{7}$$

Parametr γ_i w modelu (2) nazywany będzie poniżej efektem sezonowym i-tego okresu sezonowego. Określa on ile przeciętnie w i-tych okresach sezonowych y_t odchyla się od warunkowej wartości oczekiwanej y_t względem x_{1t}, x_{2t}, …, x_{kt}. W przypadku modelu (7) parametr γ_i interpretowany jest jako przeciętne odchylenie w i-tych okresach sezonowych y_t od linii trendu określonej przez parametry β_0 i β_1.

3. PROCEDURY ESTYMACJI PARAMETRÓW KMRL-AS

Nie można oszacować parametrów KMRL-AS stosując MNK bezpośrednio do tego modelu. Z (1) wynika, że:

$$Q_{1t} + Q_{2t} + \cdots + Q_{mt} = 1, \tag{8}$$

Powoduje to, że pierwsza kolumna macierzy obserwacji na zmiennych objaśniających w KMRL-AS jest równa sumie m następnych kolumn, co oznacza dokładną współliniowość zmiennych objaśniających.

Poniżej rozpatrzymy $2m + 1$ procedur estymacji modelu KMRL-AS, w tym:

– m procedur I typu, o numerach 1, 2, ..., m;
– m procedur II typu, o numerach $m + 1$, $m + 2$, …, $2m$;
– jedną procedurę III typu o numerze $2m + 1$.

W powyższych procedurach najpierw szacuje się MNK parametry MP. Potem wykorzystuje się odpowiednie wzory wynikające z teorii estymacji funkcji parametrów klasycznych modeli regresji liniowej.

Niech $\mathbf{X}^{(r)}$ będzie macierzą obserwacji na zmiennych objaśniających MP w r-tej procedurze. Macierz ta ma wymiary $(m + k) \times n$. Pierwszych m kolumn dotyczy zmiennych powstałych przez eliminację z (2) jednej ze współliniowych zmiennych objaśniających lub jednego z efektów sezonowych. Pozostałe k kolumny w $\mathbf{X}^{(r)}$ zawierają kolejno obserwacje na zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_k$, o których mowa w modelu (2). W dalszych rozważaniach przyjmiemy dodatkowo następujące założenie:

> $x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{kt}$ $(t = 1, 2, \ldots, n)$ są takie, że macierz $\mathbf{X}^{(r)}$ obserwacji na zmiennych objaśniających MP w r-tej procedurze, gdzie $r \in \{1, 2, \ldots, 2m + 1\}$, ma rząd równy $m + k$.

Oznaczmy przez $\boldsymbol{\delta}$ i $\boldsymbol{\pi}^{(r)}$ wektory parametrów strukturalnych odpowiednio KMRL-AS i MP w r-tej procedurze. Niech $\mathbf{C}^{(r)}$ będzie macierzą taką, że $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{C}^{(r)}\boldsymbol{\pi}^{(r)}$. Przyjmijmy, że symbole $\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(r)}$ i $\hat{\sigma}_r^2$ oznaczają dla r-tej procedury odpowiednio estymator MNK wektora $\boldsymbol{\pi}^{(r)}$ i wariancję resztową MP. Estymator wektora $\boldsymbol{\delta}$, uzyskany przy użyciu r-tej procedury, oznaczany poniżej $\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{(r)}$, oraz estymator macierzy wariancji i kowariancji $\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{(r)}$ są równe odpowiednio:

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{(r)} = \mathbf{C}^{(r)}\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(r)}, \qquad Var\left(\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{(r)}\right) = \hat{\sigma}_r^2\mathbf{C}^{(r)}\left(\mathbf{X}^{(r)T}\mathbf{X}^{(r)}\right)^{-1}\mathbf{C}^{(r)}.$$

Niech $\tilde{\beta}_0^{(r)}, \tilde{\gamma}_1^{(r)}, \tilde{\gamma}_2^{(r)}, \ldots, \tilde{\gamma}_m^{(r)}, \tilde{\beta}_1^{(r)}, \tilde{\beta}_2^{(r)}, \ldots, \tilde{\beta}_k^{(r)}$, gdzie $r \in \{1, 2, \ldots, 2m + 1\}$, są estymatorami odpowiednio parametrów $\beta_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m, \beta_1, \beta_1, \ldots, \beta_k$ w KMRL-AS, uzyskanymi przy użyciu r-tej procedury. Oznaczmy przez I_r zbiór zdefiniowany następująco:

$$I_r = \{1, 2, \ldots, \mathrm{m}\} - \{r\} \quad \text{gdy} \quad r \in \{1, 2, ..., m\};$$
$$I_r = \{1, 2, \ldots, \mathrm{m}\} - \{r - m\} \quad \text{gdy} \quad r \in \{m + 1, m + 2, ..., 2m\}.$$

Procedury I typu

MP stosowane w procedurach I typu powstają w wyniku wyeliminowania z KMRL-AS jednego z parametrów efektów sezonowych przy użyciu (3). W r-tej procedurze I typu, gdzie $r \in \{1, 2, \ldots, m\}$, wykorzystuje się następujący MP:

$$y_t = \beta_0 + \sum_{i \in I_r} \gamma_i SR_{it}^{(r)} + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{jt} + u_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

gdzie:

$$SR_{it}^{(r)} = Q_{it} - Q_{rt} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } t \text{ dotyczy } i\text{-tego okresu sezonowego } (i \in I_r), \\ -1 & \text{gdy } t \text{ dotyczy } r\text{-tego okresu sezonowego,} \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \tag{10}$$

Model (9) można otrzymać z KMRL-AS podstawiając za γ_r w (2) wyrażenie $-\sum_{i \in I_r} \gamma_i$, uzyskane z (3). Jako estymatory parametrów strukturalnych KMRL-AS w *r*-tej procedurze I typu przyjmuje się:

$$\widetilde{\beta}_0^{(r)} = \hat{\beta}_0^{(r)}, \quad \widetilde{\gamma}_i^{(r)} = \hat{\gamma}_i^{(r)} \ \left(i \in I_r\right), \quad \widetilde{\beta}_j^{(r)} = \hat{\beta}_j^{(r)} \ \left(j = 1, 2, ..., k\right), \quad \widetilde{\gamma}_r^{(r)} = -\sum_{i \in I_r} \hat{\gamma}_i^{(r)}. \tag{11}$$

gdzie $\hat{\beta}_0^{(r)}$, $\hat{\gamma}_i^{(r)}$ $(i \in I_r)$, $\hat{\beta}_j^{(r)}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ oznaczają estymatory MNK parametrów β_0, γ_i $(i \in I_r)$, β_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ modelu (9).

Procedury II typu

MP wykorzystywane w procedurach II typu otrzymuje się przez wyeliminowanie z KMRL-AS jednej ze zmiennych zero-jedynkowych zdefiniowanych w (1). Postać MP wykorzystywanego w procedurze II typu o numerze *r*-tym, gdzie $r \in \{m + 1, m + 2, \ldots, 2m\}$, jest następująca:

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i \in I_r} \alpha_i Q_{it} + \sum_{j=1}^{k} \beta_j \, x_{jt} + u_t \qquad \left(t = 1, \ 2, \ \ldots, n\right), \tag{12}$$

przy czym $\alpha_0 = \beta_0 + \gamma_r$, $\alpha_i = \gamma_i - \gamma_r$ $(i \in I_r)$.

Model (12) można uzyskać z KMRL-AS przez zastąpienie Q_{rt} w (2) przez wyrażenie $1 - \sum_{i \in I_r} Q_{it}$, otrzymane z (8). Przyjmijmy, że $\hat{\alpha}_0^{(r)}$, $\hat{\alpha}_i^{(r)}$ $(i \in I_r)$, $\hat{\beta}_j^{(r)}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ oznaczają estymatory MNK odpowiednio parametrów α_0, α_i $(i \in I_r)$ i β_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ modelu (12). Estymatory parametrów strukturalnych KMRL-AS w *r*-tej procedurze II typu można przedstawić wówczas następująco:

$$\begin{gathered} \widetilde{\beta}_0^{(r)} = \hat{\alpha}_0 + m^{-1} \sum_{i \in I_r} \hat{\alpha}_i^{(r)}, \quad \widetilde{\gamma}_r^{(r)} = -m^{-1} \sum_{i \in I_r} \hat{\alpha}_i^{(r)}, \quad \widetilde{\gamma}_i^{(r)} = \hat{\alpha}_i - m^{-1} \sum_{i \in I_r} \hat{\alpha}_i^{(r)} \ \left(i \in I_r\right), \\ \widetilde{\beta}_j^{(r)} = \hat{\beta}_j^{(r)} \ \left(j = 1, 2, ..., k\right). \end{gathered} \tag{13}$$

Wyrażenie $\sum_{i\in I_r}\alpha_i Q_{it}$ w (12) bywa zastępowane przez wyrażenie $\sum_{i\in I_r}\alpha_i SC_{it}$, gdzie SC_{it} są wartościami tzw. scentrowanych zmiennych sezonowych, zdefiniowanymi następująco: $SC_{it} = Q_{it} - m^{-1}$ $(i \in I_r)$. Transformacja ta nie zmienia wartości odchyleń zmiennych objaśniających w modelu (12) od ich wartości średnich, co na mocy teorii estymacji klasycznych modeli regresji liniowej (patrz np. Goldberger, 1972 s. 239–241) oznacza, że zamiana Q_{it} na SC_{it} w (12) nie ma żadnego wpływu na wartości estymatorów MNK parametrów α_i $(i \in I_r)$ i β_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ modelu (12), a tym samym również wartości estymatorów $\widetilde{\gamma}_i^{(r)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ i $\widetilde{\beta}_j^{(r)}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, określonych w (13). Powyższa transformacja powoduje jedynie zmniejszenie oceny wyrazu wolnego w (12) o wartość $m^{-1}\sum_{i\in I_r}\hat{\alpha}_i^{(r)}$, w wyniku czego oceny wyrazów wolnych w modelach (12) i (2) są sobie równe.

Procedura III typu

W procedurze III typu (o numerze $r = 2m + 1$) wykorzystywany jest następujący MP:

$$y_t = \sum_{i=1}^{m}\mu_i Q_{it} + \sum_{j=1}^{k}\beta_j x_{jt} + u_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, n), \tag{14}$$

gdzie $\mu_i = \beta_0 + \gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Model (14) można otrzymać z KMRL-AS zastępując zmienną przy β_0 w (2), która jest tożsamościowo równa jedności, przez wyrażenie stojące po lewej stronie (8). Oznaczmy przez $\hat{\mu}_i^{(r)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $\hat{\beta}_j^{(r)}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ estymatory MNK odpowiednio parametrów μ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, β_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ modelu (14). Estymatory parametrów strukturalnych KMRL-AS w procedurze III typu są zdefiniowane następująco:

$$\widetilde{\beta}_0^{(r)} = m^{-1}\sum_{i=1}^{m}\hat{\mu}_i^{(r)},\ \widetilde{\gamma}_i^{(r)} = \hat{\mu}_i^{(r)} - m^{-1}\sum_{i=1}^{m}\hat{\mu}_i^{(r)}\ (i = 1, 2, \ldots, m),\ \widetilde{\beta}_j^{(r)} = \hat{\beta}_j^{(r)}\ (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{15}$$

4. ZAŁOŻENIA ROZWAŻANEGO KLASYCZNEGO MODELU REGRESJI LINIOWEJ ZAWIERAJĄCEGO SKŁADOWE HARMONICZNE

Niech $m^* = m/2$ i $\omega_i = 2\pi i/m$. Przyjmijmy, że kształtowanie się y_t opisuje następujący klasyczny model regresji liniowej ze składowymi harmonicznymi (nazywany poniżej skrótowo KMRL-HS):

$$y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{m^*}\alpha_{1i}\cos\omega_i t + \sum_{i=1}^{m^*-1}\alpha_{2i}\sin\omega_i t + \sum_{j=1}^{k}\beta_j x_{jt} + u_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, n;\ n > m + k), \tag{16}$$

gdzie: β_0, α_{11}, …, α_{1m^*}, α_{21}, …, α_{1m^*-1}, β_1, …, β_k – nieznane parametry strukturalne, u_1, u_2, …, u_n – składniki losowe spełniające założenia (4).

Przyjmijmy, że $\hat{\beta}_0^{(h)}$, $\hat{\alpha}_{11}^{(h)}$, …, $\hat{\alpha}_{1m^*}^{(h)}$, $\hat{\alpha}_{21}^{(h)}$, …, $\hat{\alpha}_{2(m^*-1)}^{(h)}$, $\hat{\beta}_1^{(h)}$, …, $\hat{\beta}_k^{(h)}$ oznaczają estymatory MNK odpowiednio parametrów β_0, α_{11}, …, α_{1m^*}, α_{21}, …, α_{1m^*-1}, β_1, …, β_k modelu (16). Jako estymatory efektów sezonowych dla kolejnych okresów sezonowych przyjmuje się:

$$\hat{\gamma}_j^{(h)} = \sum_{i=1}^{m^*} \hat{\alpha}_{1i}^{(h)} \cos \omega_i t_j^* + \sum_{i=1}^{m^*-1} \hat{\alpha}_{2i}^{(h)} \sin \omega_i t_j^* \quad (j = 1, 2, ..., m). \tag{17}$$

gdzie t_j^* jest minimalną wartością zmiennej t dla j-tych okresów sezonowych. W szczególnym przypadku, gdy y_1 dotyczy pierwszego okresu sezonowego, otrzymujemy $t_j^* = j$.

5. ZALEŻNOŚCI MIĘDZY ESTYMATORAMI MNK PARAMETRÓW MODELI NALEŻĄCYCH DO ZBIORU UTWORZONEGO PRZEZ WSZYSTKIE MP ORAZ KMRL-HS

Przypiszmy numery 1, 2, …, $2m + 1$ odpowiednio modelom MP wykorzystywanym w przedstawionych powyżej procedurach 1, 2, …, $2m + 1$ estymacji parametrów KMRL-AS. Niech ponadto KMRL-HS ma numer h-ty, gdzie $h \notin \{1, 2, \ldots, 2m + 1\}$. Przyjmijmy, że

$$M = \{1, 2, \ldots, 2m + 1, h\}. \tag{18}$$

Poniżej wykażemy, że na podstawie ocen MNK parametrów r-tego modelu, $r \in M$, można w prosty sposób znaleźć oceny MNK parametrów dowolnego s-tego modelu, $s \neq r$ i $s \in M$.

Podzielmy macierz obserwacji na zmiennych objaśniających w r-tym modelu, $r \in M$, na bloki w sposób następujący: $\mathbf{X}^{(r)} = \left[\mathbf{X}_1^{(r)} \;\vdots\; \mathbf{X}\right]$, gdzie $\mathbf{X}_1^{(r)}$ i $\mathbf{X}$ są macierzami obejmującymi odpowiednio m pierwszych i k ostatnich kolumn macierzy $\mathbf{X}^{(r)}$. Niech $\mathbf{Z}^{(r)}$ oznacza macierz o wymiarach $m \times m$, utworzona z m pierwszych wierszy macierzy $\mathbf{X}^{(r)}$. Z definicji m pierwszych zmiennych objaśniających w modelach pomocniczych (9), (12), (12) i (16) wynika, że:

– rząd macierzy $\mathbf{Z}^{(r)}$ dla $r \in \{1, 2, \ldots, 2m + 1\}$ jest równy m;
– wiersze o numerach i, $i + m$, $i + 2m$, … w macierzy $\mathbf{X}_1^{(r)}$ są sobie równe.

Wykorzystując powyższe stwierdzamy, że dla każdej pary r i s takiej, że $r \neq s$ i $r, s \in M$, istnieje nieosobliwa macierz o wymiarach $m \times m$, oznaczana poniżej $\mathbf{A}_{r,s}$, dla której zachodzi następująca zależność:

$$\mathbf{X}_1^{(s)} = \mathbf{X}_1^{(r)} \mathbf{A}_{r,s}, \text{ przy czym } \mathbf{A}_{r,s} = \left(\mathbf{Z}^{(r)}\right)^{-1} \mathbf{Z}^{(s)}. \tag{19}$$

Z (19) wynika, że:

$$\mathbf{A}_{r,s}^{-1} = \mathbf{A}_{s,r}. \tag{20}$$

Udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. Przyjmijmy, że $\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(r)}$, gdzie $r \in M$, jest estymatorem MNK wektora parametrów strukturalnych r-tego modelu. Podzielmy wektor $\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(r)}$ na bloki w sposób następujący: $\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(r)} = \left[\left(\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(r)}\right)^T \vdots \left(\hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(r)}\right)^T\right]^T$, gdzie wektory $\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(r)}$, $\hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(r)}$ mają odpowiednio wymiary $m \times 1$ i $k \times 1$. Niech $\hat{u}_t^{(r)}$ i $\hat{\sigma}_r^2$ oznaczają odpowiednio t-tą resztę i wariancję resztową r-tego modelu. Przyjmijmy, że $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{1r}$ jest nieobciążonym estymatorem macierzy wariancji i kowariancji $\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(r)}$, zdefiniowanym następująco: $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{1r} = \hat{\sigma}_r^2 \left(\mathbf{X}_1^{(r)T} \mathbf{X}_1^{(r)}\right)^{-1}$. Niech ponadto $\mathbf{A}_{s,r}$ jest macierzą określoną w (19)-(20). Wówczas dla każdych r i s, takich, że $r \neq s$ i $r,s \in M$, mamy:

a) $\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(s)} = \mathbf{A}_{s,r} \hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(r)}$; (21)

b) $\hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(s)} = \hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(r)}$; (22)

c) $\hat{u}_t^{(r)} = \hat{u}_t^{(s)} \quad (t = 1,\ 2,\ \ldots, n)$; (23)

d) $\hat{\sigma}_r^2 = \hat{\sigma}_s^2$; (24)

e) $\hat{\Sigma}_{1s} = \mathbf{A}_{s,r} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{1r} \mathbf{A}_{s,r}^T$. (25)

Dowód: Macierz $\mathbf{X}^{(s)}$ obserwacji na zmiennych objaśniających w *r*-tym modelu można uzyskać mnożąc prawostronnie *m* pierwszych kolumn macierzy $\mathbf{X}^{(r)}$ przez macierz $\mathbf{A}_{r,s}$, określoną w (19). Wykorzystując twierdzenie dotyczące konsekwencji przekształcenia polegającego na prawostronnym pomnożeniu części kolumn macierzy obserwacji na zmiennych objaśniających przez macierz nieosobliwą o znanych elementach (patrz Westa, 2004, s. 167–168), stwierdzamy prawdziwość (21)-(25). To kończy dowód. ■

Z twierdzenia 1 wynika, że w przypadku KMRL-HS i wszystkich MP estymatory MNK wektora parametrów strukturalnych przy ostatnich *k* zmiennych objaśniających są algebraicznie równoważne. Zgodnie z (21), (25) i (19)-(20), dla określenia zależności między estymatorami MNK wektora *m* pierwszych parametrów strukturalnych (między estymatorami macierzy wariancji i kowariancji estymatora MNK wektora *m* pierwszych parametrów strukturalnych) w modelu *r*-tym i *s*-tym, gdzie $r \neq s$ i $r,s \in M$, wystarcza znajomość macierzy $\mathbf{A}_{s,r} = \left(\mathbf{Z}^{(s)}\right)^{-1} \mathbf{Z}^{(r)}$, przy czym $\mathbf{Z}^{(s)}$ i $\mathbf{Z}^{(r)}$ są macierzami utworzonymi z *m* pierwszych wierszy odpowiednio macierzy $\mathbf{X}^{(s)}$ i $\mathbf{X}^{(r)}$.

Macierz $\mathbf{A}_{s,r}$, wykorzystywana w twierdzeniu 1, ma prostą strukturę dla wszystkich MP. Poniżej podamy przykłady postaci tej macierzy. Niech $\mathbf{W}$ oznacza następującą macierz o wymiarach $(m + 1) \times (m + 1)$:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & m^{-1} & \cdots & m^{-1} & m^{-1} \\ 0 & 1-m^{-1} & \cdots & -m^{-1} & -m^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -m^{-1} & \cdots & 1-m^{-1} & -m^{-1} \\ 0 & -m^{-1} & \cdots & -m^{-1} & 1-m^{-1} \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Oznaczmy przez $\mathbf{W}_{s,r}$ (przez $\mathbf{I}_{s,r}$) macierz powstałą przez usunięcie s-tego wiersza i r-tej kolumny z macierzy $\mathbf{W}$ (z macierzy jednostkowej stopnia $(m + 1)$-tego). Przyjmijmy, że $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ są m-elementowymi następującymi wektorami:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{bmatrix}^T. \tag{27}$$

Wówczas:

– w przypadku MP wykorzystywanych w procedurach pierwszego typu, czyli gdy $r,s \in \{1, 2, \ldots, m\}$, macierz $\mathbf{A}_{s,r}$ jest równa macierzy powstałej przez zastąpienie $(r + 1)$-tego wiersza w macierzy $\mathbf{I}_{s+1,r+1}$ przez wektor $\mathbf{p}$; (28)

– w przypadku MP wykorzystywanych w procedurach drugiego typu, czyli gdy $r,s \in \{m + 1, m + 2, \ldots, 2m\}$, macierz $\mathbf{A}_{s,r}$ jest równa macierzy powstałej przez zastąpienie $(r + 1)$-tej kolumny w macierzy $\mathbf{I}_{s-m+1,r-m+1}$ przez wektor $\mathbf{p}^T$; (29)

– gdy $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$ i $r \in \{m + 1, m + 2, \ldots, 2m\}$, to $\mathbf{A}_{s,r} = \mathbf{W}_{s+1,r-m+1}$; (30)

– gdy $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$ i $r = 2m + 1$, to $\mathbf{A}_{s,r} = \mathbf{W}_{s+1,1}$; (31)

– gdy $s \in \{m + 1, m + 2, \ldots, 2m\}$ i $r = 2m + 1$, to macierz $\mathbf{A}_{s,r}$ jest równa macierzy powstałej przez zastąpienie $(s - m)$-tej kolumny w macierzy $\mathbf{I}_{s-m+1,1}$ przez wektor $\mathbf{q}$. (32)

6. ALGEBRAICZNA RÓWNOWAŻNOŚĆ ESTYMATORÓW PARAMETRÓW KMRL-AS W PROCEDURACH TYPU I-III

Udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2. Oznaczmy przez $\boldsymbol{\delta}$ wektor parametrów strukturalnych KMRL-AS. Przyjmijmy $\widetilde{\boldsymbol{\delta}}^{(r)}$, że jest estymatorem wektora $\boldsymbol{\delta}$ w r-tej procedurze. Wówczas dla każdej pary r i s takiej, że $r \neq s$ i $r,s \in \{1, 2, \ldots, 2m + 1\}$, zachodzi:

$$\widetilde{\boldsymbol{\delta}}^{(r)} = \widetilde{\boldsymbol{\delta}}^{(s)}. \tag{33}$$

Dowód: Podzielmy wektor $\widetilde{\boldsymbol{\delta}}^{(r)}$ na bloki w sposób następujący: $\widetilde{\boldsymbol{\delta}}^{(r)} = \left[\left(\widetilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(r)}\right)^T \vdots \left(\widetilde{\boldsymbol{\delta}}_2^{(r)}\right)^T\right]^T$, gdzie $\widetilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(r)} = \left[\widetilde{\beta}_0^{(r)} \quad \widetilde{\gamma}_1^{(r)} \quad \widetilde{\gamma}_2^{(r)} \quad \cdots \quad \widetilde{\gamma}_m^{(r)}\right]^T$ i $\widetilde{\boldsymbol{\delta}}_2^{(r)} = \left[\widetilde{\beta}_1^{(r)} \quad \widetilde{\beta}_2^{(r)} \quad \cdots \quad \widetilde{\beta}_k^{(r)}\right]^T$. Przyjmujmy, że $\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(r)}$, $\hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(r)}$ są estymatorami MNK parametrów strukturalnych MP w *r*-tej procedurze, określonymi w twierdzeniu 1. Oznaczmy przez $\mathbf{C}_1^{(r)}$ macierz powstałą z macierzy jednostkowej stopnia $(m + 1)$-tego przez usunięcie $(r + 1)$-tej kolumny i zastąpienie$(r + 1)$-tego wiersza przez wektor **p**, zdefiniowany w (27). Niech $\mathbf{C}_2^{(r)}$ (niech $\mathbf{C}_3$) jest macierzą powstałą z macierzy **W**, określonej w (26), przez usuniecie $(r – m + 1)$-tej kolumny (przez usunięcie pierwszej kolumny). Wówczas zależności (11), (13) i (15) można przedstawić odpowiednio w następującej postaci macierzowej:

$$\widetilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(r)} = \mathbf{C}_1^{(r)}\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(r)} \quad \text{i} \quad \widetilde{\boldsymbol{\delta}}_2^{(r)} = \hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(r)} \quad \text{dla} \quad r \in \{1, 2, ..., m\}, \tag{34}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(r)} = \mathbf{C}_2^{(r)}\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(r)} \quad \text{i} \quad \widetilde{\boldsymbol{\delta}}_2^{(r)} = \hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(r)} \quad \text{dla} \quad r \in \{m+1, m+2, ..., 2m\}, \tag{35}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(2m+1)} = \mathbf{C}_3\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(2m+1)} \quad \text{i} \quad \widetilde{\boldsymbol{\delta}}_2^{(2m+1)} = \hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(2m+1)}. \tag{36}$$

Po uwzględnieniu (31) i (32) nietrudno wykazać, że:

$$\mathbf{C}_1^{(r)}\mathbf{A}_{r,2m+1} = \mathbf{C}_3 \quad \text{dla} \quad r \in \{1, 2, ..., m\}, \tag{37}$$

$$\mathbf{C}_2^{(r)}\mathbf{A}_{r,2m+1} = \mathbf{C}_3 \quad \text{dla} \quad r \in \{m+1, m+2, ..., 2m\}. \tag{38}$$

Po podstawieniu w (34) i (35) za $\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(r)}$ odpowiedniego wyrażenia z (21) oraz uwzględnieniu (22), (37) i (38) otrzymujemy:

$$\widetilde{\boldsymbol{\delta}}_2^{(r)} = \widetilde{\boldsymbol{\delta}}_2^{(s)} \quad \text{dla} \quad r \neq s \quad \text{i} \quad r, s \in \{1, 2, ..., 2m+1\}, \tag{39}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(r)} = \mathbf{C}_1^{(r)}\mathbf{A}_{r,2m+1}\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(2m+1)} = \mathbf{C}_3\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(2m+1)}, \quad \text{dla} \quad r \in \{1, 2, ..., m\}, \tag{40}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(r)} = \mathbf{C}_2^{(r)}\mathbf{A}_{i,2m+1}\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(2m+1)} = \mathbf{C}_3\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(2m+1)} \quad \text{dla} \quad r \in \{m+1, m+2, ..., 2m\}. \tag{41}$$

Z (39)-(41) wynika prawdziwość (33), co kończy dowód. ■

Zgodnie z twierdzeniem 2, estymatory wektora **δ** parametrów strukturalnych KMRL--AS, uzyskane przy użyciu procedur typu I, II lub III są algebraicznie równoważne. Poniżej symbol $\widetilde{\boldsymbol{\delta}}$ oznaczać będzie estymator wektora **δ** parametrów strukturalnych KMRL-AS, uzyskany przy użyciu dowolnej z procedur typu I, II lub III, tzn.

$$\widetilde{\boldsymbol{\delta}} = \widetilde{\boldsymbol{\delta}}^{(r)} \qquad \text{dla } r \in \{1, 2, ..., 2m+1\}. \tag{42}$$

Udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3. Przyjmijmy, że $\widetilde{u}_t$ i $\widetilde{\sigma}^2$ są odpowiednio t-tą resztą i wariancją resztową KMRL-AS, określonymi następująco:

$$\widetilde{u}_t = y_i - \mathbf{x}_t\widetilde{\boldsymbol{\delta}}, \qquad \widetilde{\sigma}^2 = \left(n-m-k\right)^{-1}\sum_{t=1}^{n}\left(y_i - \mathbf{x}_t\widetilde{\boldsymbol{\delta}}\right)^2, \tag{43}$$

gdzie $\mathbf{x}_t$ oznacza t-ty wiersz macierzy obserwacji na zmiennych objaśniających w KMRL-AS.
Niech $\hat{u}_t^{(r)}$ i $\hat{\sigma}_r^2$ oznaczają odpowiednio t-tą resztę i wariancję resztową w MP wykorzystywanym w r-tej procedurze. Wówczas dla $r \in \{1, 2, \ldots, 2m+1\}$ i $t = 1, 2, \ldots, n$ zachodzi:

$$\widetilde{u}_t = \hat{u}_t^{(r)} \quad \text{i} \quad \widetilde{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_r^2. \tag{44}$$

Dowód: Na mocy twierdzenia 2 dla każdej pary r i s takiej, że $r \neq s$ i $r,s \in \{1, 2, \ldots, 2m+1\}$ mamy $\hat{u}_t^{(r)} = \hat{u}_t^{(s)}$ $(t = 1, 2, \ldots, n)$ i $\hat{\sigma}_r^2 = \hat{\sigma}_s^2$. Dla przeprowadzenia dowodu wystarczy więc wykazać, że $\widetilde{u}_t$ i $\widetilde{\sigma}^2$ są równe odpowiednio t-tej reszcie i wariancji resztowej MP w dowolnej z procedur, na przykład w procedurze m-tej. Niech $\mathbf{x}_t^{(m)}$ jest t-tym wierszem macierzy obserwacji na zmiennych objaśniających w MP w m-tej procedurze. Z definicji $\widetilde{u}_t$ i $\hat{u}_t^{(r)}$ wynika, że zależność (44) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{x}_t\widetilde{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{x}_t^{(m)}\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(m)}$, co ze względu na (42) jest równoważne

$$\mathbf{x}_t\widetilde{\boldsymbol{\delta}}^{(m)} = \mathbf{x}_t^{(m)}\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(m)}. \tag{45}$$

Dokonując podziału wektora $\widetilde{\boldsymbol{\delta}}^{(m)}$ na bloki w sposób określony w dowodzie twierdzenia 2, można (45) zapisać równoważnie w postaci:

$$\mathbf{x}_{1t}\widetilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(m)} = \mathbf{x}_{1t}^{(m)}\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(m)}, \qquad \mathbf{x}_{2t}\widetilde{\boldsymbol{\delta}}_2^{(m)} = \mathbf{x}_{2t}^{(m)}\hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(m)}, \tag{46}$$

gdzie $\mathbf{x}_{1t} = \begin{bmatrix}1 & Q_{1t} & Q_{2t} & \cdots & Q_{mt}\end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_{1t}^{(m)} = \begin{bmatrix}1 & SR_{1t}^{(m)} & SR_{2t}^{(m)} & \cdots & SR_{(m-1)t}^{(m)}\end{bmatrix}$ oraz $\mathbf{x}_{2t}$ i $\mathbf{x}_{2t}^{(m)}$ są wektorami obejmującymi k ostatnich elementów odpowiednio wektorów $\mathbf{x}_t$ i $\mathbf{x}_t^{(m)}$.
Z (1), (9) oraz (34) wynika, że $\mathbf{x}_{2t} = \mathbf{x}_{2t}^{(m)}$ i $\widetilde{\boldsymbol{\delta}}_2^{(m)} = \hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(m)}$, co oznacza prawdziwość drugiej równości w (46). Zastępując $\widetilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(m)}$ w (46) przez odpowiednie wyrażenie z (34), otrzymujemy: $\mathbf{x}_{1t}\mathbf{C}_1^{(m)}\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(m)} = \mathbf{x}_{1t}^{(m)}\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(m)}$. Wykorzystując następnie to, że $\mathbf{x}_{1t}\mathbf{C}_1^{(m)} = \mathbf{x}_{1t}^{(m)}$, stwierdzamy prawdziwość (46), a tym samym również prawdziwość (44). ■

Zgodnie z twierdzeniem 3 wariancja resztowa i reszty KMRL-AS, określone w (43), są identyczne odpowiednio z wariancją resztową i resztami MP w procedu-

rach typu I, II i III. Można więc w procesie weryfikacji zastąpić reszty i wariancję resztową wykorzystywanego MP, określonego przez (9), (12) i (14), odpowiednio przez reszty i wariancja resztową KMRL-AS. Fakt ten jest istotny w przypadku estymacji KMRL-AS bez pośrednictwa MP (patrz Westa, 2013).

7. ALGEBRAICZNA RÓWNOWAŻNOŚĆ ESTYMATORÓW EFEKTÓW SEZONOWYCH W PRZYPADKU KMRL-AS I KMRL-HS

Udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4. Oznaczmy przez $\widetilde{\boldsymbol{\delta}}_1 = \begin{bmatrix}\widetilde{\beta}_0 & \widetilde{\gamma}_1 & \widetilde{\gamma}_2 & \cdots & \widetilde{\gamma}_m\end{bmatrix}^T$ wektor estymatorów pierwszych $m + 1$ parametrów strukturalnych KMRL-AS, uzyskany przy użyciu dowolnej z procedur typu I-III. Przyjmijmy, że $\widetilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(h)} = \begin{bmatrix}\hat{\beta}_0^{(h)} & \widetilde{\gamma}_1^{(h)} & \widetilde{\gamma}_2^{(h)} & \cdots & \widetilde{\gamma}_m^{(h)}\end{bmatrix}^T$, przy czym $\hat{\beta}_0^{(h)}$ jest estymatorem MNK parametru β_0 modelu (16) i $\hat{\gamma}_i^{(h)}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) jest estymatorem (17) i-tego efektu sezonowego, uzyskanym przy użyciu KMRL-HS. Wówczas zachodzi:

$$\widetilde{\boldsymbol{\delta}}_1 = \widetilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(h)}. \tag{47}$$

Dowód: Podzielmy wektor $\widetilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(h)}$ na bloki odpowiednio w sposób następujący: $\widetilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(h)} = \left[\hat{\beta}_0^{(h)} \;\vdots\; \left(\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(h)}\right)^T\right]^T$, gdzie $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(h)} = \begin{bmatrix}\widetilde{\gamma}_1^{(h)} & \widetilde{\gamma}_2^{(h)} & \cdots & \widetilde{\gamma}_m^{(h)}\end{bmatrix}^T$. Niech obserwacja y_1 dotyczy v-tego okresu sezonowego. Przyjmijmy, że $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(h)*} = \begin{bmatrix}\widetilde{\gamma}_v^{(h)} & \widetilde{\gamma}_{v+1}^{(h)} & \cdots & \widetilde{\gamma}_m^{(h)} & \widetilde{\gamma}_1^{(h)} & \cdots & \widetilde{\gamma}_{v-1}^{(h)}\end{bmatrix}$. Nietrudno zauważyć, że $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(h)*} = \mathbf{Z}^{(2m+1)}\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(h)}$. Stąd $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(h)} = \left(\mathbf{Z}^{(2m+1)}\right)^{-1}\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(h)*}$. Wykorzystując (17) stwierdzamy, że $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(h)*} = \left\{\mathbf{Z}^{(h)} - \left[\mathbf{i} \;\vdots\; \mathbf{0}\right]\right\}\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(h)}$, gdzie $\mathbf{i} = \begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}^T$. Po uwzględnieniu powyższego oraz zależności (21) i (19)-(20), można przedstawić $\widetilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(h)}$ w postaci:

$$\widetilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(h)} = \begin{bmatrix}\hat{\beta}_0^{(h)} \\ \hline \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(h)}\end{bmatrix} = \mathbf{C}_h\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(2m+1)} \tag{48}$$

gdzie:

$$\mathbf{C}_h = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} \\ \hline \left(\mathbf{Z}^{(2m+1)}\right)^{-1}\left\{\mathbf{Z}^{(h)} - \left[\mathbf{i} \;\vdots\; \mathbf{0}\right]\right\}\end{bmatrix}\left(\mathbf{Z}^{(h)}\right)^{-1}\mathbf{Z}^{(2m+1)} = \begin{bmatrix}\mathbf{g}\,\mathbf{Z}^{(2m+1)} \\ \hline \mathbf{I} - \left(\mathbf{Z}^{(2m+1)}\right)^{-1}\left[\mathbf{g}^{\mathbf{T}} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \mathbf{g}^{\mathbf{T}}\right]^T\mathbf{Z}^{(2m+1)}\end{bmatrix}, \tag{49}$$

przy czym $\mathbf{g}$ jest pierwszym wierszem macierzy $\left(\mathbf{Z}^{(h)}\right)^{-1}$.

Z definicji zmiennych objaśniających w modelu (16) wynika, że kolumny macierzy $\mathbf{Z}^{(h)}$ są ortogonalne. Macierz $\left(\mathbf{Z}^{(h)}\right)^{-1}$ można więc otrzymać dzieląc elementy każdej kolumny $\mathbf{Z}^{(h)}$ przez długość tej kolumny i następnie dokonując transpozycji macierzy. Pierwsza kolumna macierzy $\mathbf{Z}^{(h)}$ jest równa wektorowi $\mathbf{i}$. Stąd $\mathbf{g} = (1/m)\mathbf{i}$. Macierz $\mathbf{Z}^{(2m+1)}$ jest macierzą ortogonalną, co oznacza, że $\left(\mathbf{Z}^{(2m+1)}\right)^{-1} = \left(\mathbf{Z}^{(2m+1)}\right)^{T}$. Wykorzystując to, że kolumny $\mathbf{Z}^{(2m+1)}$ są pewną permutacją kolumn macierzy jednostkowej stopnia m-tego, otrzymujemy $\mathbf{g}\,\mathbf{Z}^{(2m+1)} = \mathbf{g}$ i $\left(\mathbf{Z}^{(2m+1)}\right)^{T}\mathbf{g}\,\mathbf{Z}^{(2m+1)} = \mathbf{g}$. Stąd (49) można zapisać w postaci: $\mathbf{C}^{(h)} = \mathbf{C}_3$, co ze względu na (48), (36) i (42) implikuje prawdziwość (47). To kończy dowód. ■

8. ALGEBRAICZNA RÓWNOWAŻNOŚĆ PREDYKTORÓW WARTOŚCI ZMIENNEJ OBJAŚNIANEJ KMRL-AS I KMRL-HS

Niech T będzie okresem takim, że $T > n$. Przyjmijmy, że w tym okresie spełnione są założenia KMRL-AS i KMRL-HS tzn.

$$y_T = \beta_0 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i Q_{iT} + \sum_{j=1}^{k}\beta_j\, x_{jT} + u_T\,, \tag{50}$$

$$y_T = \beta_0 \sum_{i=1}^{m^*}\alpha_{1i}\cos\omega_i T + \sum_{i=1}^{m^*-1}\alpha_{2i}\sin\omega_i T + \sum_{j=1}^{k}\beta_j\, x_{jT} + u_T \tag{51}$$

przy czym

$$E\left(u_T\right) = 0\,,\quad E\left(u_T^2\right) = \sigma^2 \text{ i } E\left(u_t u_T\right) = 0\,,\quad \text{dla każdego} \quad t \in \{1, 2, ..., n\}. \tag{52}$$

Z (50) wynika, że w okresie T spełnione są również założenia modeli pomocniczych (9), (12), (14), tzn.

$$y_T = \beta_0 + \sum_{i\in I}\gamma_i SR_{iT}^{(r)} + \sum_{j=1}^{k}\beta_j\, x_{jT} + u_T\,,\qquad r \in \{1, 2, ..., m\}, \tag{53}$$

$$y_T = \alpha_0 + \sum_{i\in I}\alpha_i Q_{iT} + \sum_{j=1}^{k}\beta_j\, x_{jT} + u_T\,,\quad r \in \{m+1, m+2, ..., 2m\}, \tag{54}$$

$$y_T = \sum_{i=1}^{m}\mu_i Q_{iT} + \sum_{j=1}^{k}\beta_j\, x_{jT} + u_T\,. \tag{55}$$

Przyjmijmy, że $\mathbf{x}_T$ i $\mathbf{x}_T^{(r)}$ są wektorami wartości zmiennych objaśniających w okresie T odpowiednio w KMRL-AS i r-tym modelu, gdzie $r \in M$, przy czym M określony w (18). Niech $\hat{y}_T^{(r)}$ oznacza najlepszy liniowy nieobciążony predyktor wartości zmiennej objaśnianej w r-tym modelu. Stosując teorię prognozowania na podstawie

klasycznych jednorównaniowych modeli regresji (patrz np. Theil, 1979 s. 140-146), stwierdzamy, że gdy zachodzi (50)-(52), a tym samym (53), (54) i (55), to:

$$\hat{y}_T^{(r)} = \mathbf{x}_T^{(r)}\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(r)} \quad \text{dla} \quad r \in M, \tag{56}$$

gdzie $\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(r)}$ jest estymatorem MNK wektora parametrów strukturalnych w *r*-tym modelu.

Przy obliczaniu prognoz wartości zmiennej objaśnianej w KMRL-AS wykorzystuje się predyktory (56) dla $r \in \{1, 2, \ldots, 2m + 1\}$. W niniejszym artykule proponuje się predyktor zdefiniowany następująco:

$$\widetilde{y}_T = \mathbf{x}_T\widetilde{\boldsymbol{\delta}}, \tag{57}$$

gdzie $\widetilde{\boldsymbol{\delta}}$ jest określonym w (42) estymatorem wektora $\boldsymbol{\delta}$ parametrów strukturalnych KMRL-AS, uzyskanym w dowolnej z procedur typu I-III.

Udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5. Załóżmy, że w okresie T, gdzie $T > n$, spełnione są założenia (50)-(52). Niech $\widetilde{y}_T$ i $\hat{y}_T^{(r)}$ dla $r \in M$ są predyktorami zdefiniowanymi odpowiednio w (57) i (56). Wówczas:

$$\hat{y}_T^{(1)} = \hat{y}_T^{(2)} = \cdots = \hat{y}_T^{(2m+1)} = \hat{y}_T^{(h)} = \widetilde{y}_T. \tag{58}$$

Dowód: Podzielmy wektor $\mathbf{x}_T^{(r)}$ na bloki w sposób następujący: $\mathbf{x}_T^{(r)} = \left[\mathbf{x}_{1T}^{(r)} \vdots \mathbf{x}_{2T}^{(r)}\right]$, gdzie $\mathbf{x}_{1T}^{(r)}$ i $\mathbf{x}_{1T}^{(r)}$ obejmują odpowiednio *m* pierwszych i *k* ostatnich elementów wektora $\mathbf{x}_T^{(r)}$. Z (53)-(55) wynika, że:

$$\mathbf{x}_{1T}^{(s)} = \mathbf{x}_{1T}^{(r)}\mathbf{A}_{r,s} \quad \text{i} \quad \mathbf{x}_{2T}^{(s)} = \mathbf{x}_{2T}^{(r)} \quad \text{dla} \quad r \neq s \quad \text{i} \quad r,s \in M, \tag{59}$$

gdzie $\mathbf{A}_{r,s}$ jest nieosobliwą macierzą określoną w (19). Zgodnie z (56) dla dowolnego $s \in \{1, 2, \ldots, 2m + 1\}$ takiego, że $s \neq r$, mamy $\hat{y}_T^{(s)} = \mathbf{x}_T^{(s)}\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(s)}$. Po podstawieniu za $\mathbf{x}_T^{(s)}$ i $\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(s)}$ odpowiednich wyrażeń z (59) oraz (21) i wykorzystaniu następnie (20) otrzymujemy:

$$\hat{y}_T^{(s)} = \left[\mathbf{x}_{1T}^{(r)}\mathbf{A}_{r,s} \quad \mathbf{x}_{2T}^{(s)}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{r,s}^{-1}\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(r)} \\ \hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(r)}\end{bmatrix} = \mathbf{x}_{1T}^{(r)}\mathbf{A}_{r,s}\mathbf{A}_{r,s}^{-1}\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(r)} + \mathbf{x}_{2T}^{(s)}\hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(r)} = \mathbf{x}_T^{(r)}\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(r)} = \hat{y}_T^{(r)}.$$

Oznacza to, że dla udowodnienia twierdzenia wystarczy wykazać, że prawa strona (57) jest równa prawej stronie (56) dla dowolnie wybranego *r*. Dla $r = m$ otrzymujemy:

$$\mathbf{x}_T \widetilde{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{x}_T^{(m)} \hat{\boldsymbol{\pi}}^{(m)}. \tag{60}$$

Prawdziwość (60) wykazujemy analogicznie jak prawdziwość (45), zastępując w wywodach $\mathbf{x}_t$ i $\mathbf{x}_t^{(m)}$ odpowiednio przez $\mathbf{x}_T$ i $\mathbf{x}_T^{(m)}$. To kończy dowód. ■

Zgodnie z twierdzeniem 5, najlepsze liniowe nieobciążone predyktory zmiennej objaśnianej KMRL-AS i KMRL-HS, tj. predyktory o postaci podanej w (56), i predyktor zmiennej objaśnianej KMRL-AS, zaproponowany w (57), są algebraicznie równoważne.

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski

LITERATURA

Cieślak M., (red.), (2005), *Prognozowanie gospodarcze. Metody i zadania*, PWN, Warszawa.
Godlberger A. S., (1972), *Teoria ekonometrii*, PWE, Warszawa.
Gruszczyński M., Kuszewski T., Podgórska M., (red.), (2009), *Ekonometria i badania operacyjne*, PWN, Warszawa.
Maddala G. S., (2006), *Ekonometria*, PWN, Warszawa.
Theil H., (1979), *Zasady ekonometrii*, PWN, Warszawa.
Welfe A., (2003), *Ekonometria*, PWE, Warszawa.
Westa M., (2004), Konsekwencje pewnego przekształcenia macierzy obserwacji na zmiennych objaśniających w liniowym i wykładniczym jednorównaniowym modelu ekonometrycznym, *Przegląd Statystyczny*, 2004 (3), 165–176.
Westa M., (2013), Uogólnienie uproszczonych wzorów K. Maciąg i C. Stepniaka dotyczących estymacji i prognozowania trendu i efektów sezonowych, maszynopis.
Wiśniewski J. W., (1981), *Ekonometria. Zagadnienia do ćwiczeń.* Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.
Zieliński Z., (1979), *Metody analizy dynamiki i rytmiczności zjawisk gospodarczych*, PWN, Warszawa.

ALGEBRAICZNA RÓWNOWAŻNOŚĆ PEWNYCH ESTYMATORÓW MNK ORAZ PREDYKTORÓW W PRZYPADKU KLASYCZNYCH MODELI REGRESJI LINIOWEJ UWZGLĘDNIAJĄCYCH ADDYTYWNE, STAŁE EFEKTY SEZONOWE

S t r e s z c z e n i e

W artykule wykazano, że pewne estymatory MNK (pewne predyktory) stosowane w przypadku klasycznego modelu regresji liniowej, uwzględniającego addytywne stałe efekty sezonowe, są algebraicznie równoważne.

Słowa kluczowe: sezonowość deterministyczna, klasyczna regresja liniowa, prognozowanie

THE ALGEBRAIC EQUIVALENCY OF SOME OLS ESTIMATORS AND PREDICTORS IN THE CLASSICAL LINEAR REGRESSION MODEL WITH ADDITIVE CONSTANT SEASONAL EFFECTS

A b s t r a c t

In the paper, it was proved that some OLS estimators (some predictors) in the classical linear regression model with additive constant seasonal effects are algebraically equivalent.

Keywords: deterministic seasonality, classical linear regression, prediction

PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXI – ZESZYT 1 – 2014

AGATA KLIBER, PAWEŁ KLIBER, PIOTR PŁUCIENNIK

CHARAKTERYSTYKA PRZENIKANIA KRYZYSU NA RYNEK MIĘDZYBANKOWY W POLSCE NA PODSTAWIE ANALIZY 3-MIESIĘCZNYCH SPREADÓW WIBOR-OIS ORAZ LIBOR-OIS DLA DOLARA AMERYKAŃSKIEGO I EURO[1]

1. WPROWADZENIE

Światowy Kryzys Gospodarczy, który rozpoczął się sierpniu 2007 roku, pomimo szybkich interwencji banków centralnych niemal natychmiast przeniósł się ze Stanów Zjednoczonych na inne rynki międzybankowe. Skutki kryzysu najsilniej dały się odczuć w Kanadzie, Japonii i Australii, ponieważ banki pochodzące z tych krajów były w największym stopniu zaangażowane na rynku amerykańskich papierów subprime. Pogorszenie kondycji rynku międzybankowego było także obserwowane w strefie euro. W Polsce w początkowej fazie skutki kryzysu odczuły jedynie rynki kapitałowe. W połowie 2008 roku odwróceniu uległ trend aprecjacyjny wielu walut Europy środkowo-wschodniej, w tym złotego. W III i IV kwartale 2008 nastąpiło w Polsce znaczące obniżenie wskaźników koniunktury gospodarczej przy jednoczesnym znacznym spadku wykorzystania mocy produkcyjnych. W II połowie 2009 roku dynamika produktu krajowego zaczęła jednak powoli odrabiać straty, a Polska była jedynym krajem regionu, który zakończył najgorszy, 2009 rok, z dodatnią dynamiką PKB. Jako przyczyny stosunkowo łagodnego przejścia Polski przez pierwszą odsłonę Światowego Kryzysu Gospodarczego wymienia się m.in. przeprowadzoną uprzednio reformę podatkową, duży wzrost inwestycji publicznych w związku ze zbliżającą się organizacją Euro 2012, optymizm konsumentów i, jak na ironię, dużą deprecjację złotego (por. NBP, 2009). Ta ostatnia z jednej strony przyczyniła się do wzrostu zadłużenia zagranicznego i strat niektórych przedsiębiorstw z tytułu zawartych wcześniej transakcji opcyjnych, z drugiej jednak polskie towary mogły być sprzedawane za granicę taniej bądź z niższą marżą. Sytuacja polskiego sektora bankowego w porównaniu do innych rynków była całkiem dobra. Polskie banki nie były w posiadaniu tzw. toksycznych papierów wartościowych, a głównym kanałem, przez który kryzys przeniknął do sektora bankowego, był kanał zaufania.

[1] Prezentowane w artykule wyniki badań zostały otrzymane w ramach realizacji projektu badawczego NBP "Wpływ światowego kryzysu gospodarczego 2007–2009 na rynek międzybankowy w Polsce".

Skutków kryzysu zaufania nie można lekceważyć, jednak inne uwarunkowania rozwoju kryzysu z Polsce (por. NBP, 2009) oraz fakt, że polska gospodarka w znacznie większym stopniu powiązana jest z gospodarką krajów strefy euro niż Stanów Zjednoczonych, skłoniło nas do postawienia sobie za cel badawczy weryfikacji hipotezy badawczej, która mówi że kryzys zaufania przenika na polski rynek międzybankowy ze znacznym opóźnieniem, i ukształtował się w sposób niezależny w stosunku do kryzysu w Stanach Zjednoczonych i strefie euro.

Cel zostanie zrealizowany poprzez analizę spreadów pomiędzy stopami 3-miesięcznych lokat międzybankowych oraz 3-miesięcznych kontraktów OIS (*Overnight Index Swap*), które będziemy w skrócie nazywać spreadami LIBOR-OIS/WIBOR-OIS. Są one indykatorami nasilenia strachu przed niewypłacalnością kontrahenta na rynku międzybankowym (por. Sengupta, Yu, 2008; Thornton, 2009), a ich wielkość interpretowana jest jako premia za płynność oraz ryzyko kredytowe pożyczki na rynku międzybankowym (por. McAndrews i in., 2009; Soultanaeva, Strömqvist, 2009; Schwarz, 2009; Poskitt, 2011).

2. OPIS DANYCH

Analizie poddane zostały 3-miesięczne spready LIBOR-OIS dla USD i EUR oraz 3-miesięczny spread WIBOR-OIS z okresu od 2 stycznia 2006 do 31 maja 2012 roku, których poziomy przedstawione są na rysunku 1. Jak już wspomnieliśmy spready te reprezentują premię zarówno za ryzyko kredytowe jak i za płynność pożyczki na rynku międzybankowym. Wykorzystanie spreadów LIBOR-OIS nie jest jednak wolne od wad. Trzeba zwrócić uwagę na to, że stawki LIBOR nie są stopami transakcyjnymi. Ich wartości wyznaczane są na fixingu organizowanym przez BBA (*British Bankers Association*). W analogiczny sposób stopy WIBOR wyznaczane są fixingach organizowanych przez Stowarzyszenie Rynków Finansowych ACI Polska. Biorąc pod uwagę ujawnione w 2012 roku manipulacje stopami LIBOR i EURIBOR przez banki kwotujące te stawki oraz nałożenie na bank Barclays trzech kar o łącznej wysokości ponad 450 mln dolarów, wiarygodność stóp została mocno nadwyrężona. Z drugiej jednak strony badania, które miały na celu weryfikację rozbieżności pomiędzy stopami LIBOR i rzeczywistym kosztem pieniądza na rynku międzybankowym, wskazały, że różnica ta nie jest znacząca. Schwarz (2009) na podstawie próbki około 30% wszystkich transakcji międzybankowych porównała średnią rentowność trzymiesięcznych transakcji na rynku międzybankowym w euro w danym dniu z obowiązującą tego dnia stawką LIBOR 3M. Przed sierpniem 2007 roku stawka LIBOR zawyżała rzeczywisty koszt trzymiesięcznej pożyczki średnio zaledwie o 1 punkt bazowy, natomiast po sierpniu 2007 o 5 punktów bazowych. W przypadku stóp WIBOR pojawia się niedogodność związana z tym, że po transmisji kryzysu zaufania do Polski pożyczki o terminie zapadalności dłuższym niż 1 miesiąc na rynku międzybankowym nie były udzielane w ogóle. Z tego powodu rzeczywisty koszt pieniądza na rynku międzybankowym w horyzoncie trzymiesięcznym był trudny do oszacowania. Pomimo tego

z racji braku dobrej alternatywy trzymiesięczny spread WIBOR-OIS jest wykorzystywany w okresowych raportach o stabilności systemu finansowego prowadzonych przez NBP, a także rekomendowany przez Stowarzyszenie Rynków Finansowych ACI Polska.

W rozważanym ponad sześcioletnim okresie dynamika analizowanych sprejów pozostawała w dużym stopniu zróżnicowana. Wynika to z faktu, że był to bardzo burzliwy okres, w którym wystąpiły zarówno wydarzenia związane z kryzysem subprime, jak i kryzysem zadłużeniowym Grecji oraz innych państw Europy Południowej. O ile przypadku analizy pojedynczego szeregu możliwe jest zastosowanie modeli C-GARCH, tak jak to zostało zrobione w artykule Kliber, Płuciennika (2011), w przypadku w którym wykorzystywane są modele wielowymiarowe zmuszeni byliśmy podzielić badany okres na 7 podokresów, mając jednocześnie świadomość, że niewielka długość poszczególnych prób w negatywny sposób oddziałuje na jakość dopasowania modeli.

- I okres(od 2 stycznia 2006 do 7 sierpnia 2007 roku) jest okresem, w którym wystąpiły pierwsze symptomy kryzysu związane z narastaniem globalnych nierównowag, rosnącą skalą zadłużenia osób fizycznych w Stanach Zjednoczonych i pierwszymi upadkami instytucji działających na rynkach kredytowych. Zachowanie badanych spreadów wskazywało jednak, że rynki międzybankowe nie odczuwały jeszcze skali problemu. 8 sierpnia 2007 roku, gdy bank PNB Paribas zaprzestał wypłat z 3 funduszy obligacji zabezpieczanych kredytami subprime, ze względu na niemożność oceny ich ryzyka kredytowego, zaufanie na amerykańskim rynku międzybankowym spadło drastycznie. Ponieważ amerykańskie papiery wartościowe powiązane z rynkiem hipotecznym sprzedawane były także za granicą, kryzys zaufania bardzo szybko przeniknął na inne rynki, w tym do strefy euro. Kryzys zaufania wpłynął znacząco nie tylko na wielkość badanych spreadów, ale i ich dynamikę, wobec czego zdecydowaliśmy się na zakończenie I okresu 7 sierpnia 2007 roku.
- II okres (od 8 sierpnia 2007 do 5 września 2008 roku) to okres narastającego kryzysu zaufania na rynku amerykańskim i rynkach europejskich. Kłopoty finansowe kolejnych dużych instytucji finansowych (m.in. Northern Rock, Bear Stearns) prowadziły do jego konsekwentnego pogłębiania. Interwencje banków centralnych i pomoc rządowa oferowana stojącym na progu bankructwa instytucjom prowadziły tylko do krótkofalowej obniżki badanych spreadów, które szybko powracały na ścieżkę wzrostową. Okres kończymy 7 września 2008 roku, gdy największe instytucje rynku hipotecznego USA, Fannie Mae i Freddie Mac, zostały przejęte przez rząd federalny. Był to moment gwałtownego wzrostu spreadów, który został dodatkowo spotęgowany przez upadek banku Lehman Brothers – czwartego co do wielkości banku inwestycyjnego w Stanach Zjednoczonych.
- III okres (od 5 września 2008 do 27 maja 2009 roku) wiąże się z eskalacją kryzysu. Wspomniana nacjonalizacja dwóch największych instytucji rynku hipotecznego –Fannie Mae oraz Freddie Mac, a przede wszystkim następujący niedługo

po tym upadek banku Lehman Brothers, doprowadziły do obniżenia zaufania do niespotykanego wcześniej poziomu. Po tym ostatnim wydarzeniu obserwowalne było także przeniesienie kryzysu zaufania do Polski. Utrzymywał się on długo na polskim rynku międzybankowym, pomimo wprowadzenia przez Narodowy Bank Polski „Pakietu Zaufania". Uspokojenie nastrojów na rynku polskim przyszło dopiero pod koniec maja 2009 roku, kiedy w NBP zdecydowano się na obniżenie rezerwy obowiązkowej do poziomu 3%. Wydarzenie to pokrywa się z podjęciem przez EBC decyzji o rozpoczęciu skupu denominowanych w euro i zarazem wyemitowanych w strefie euro zabezpieczonych obligacji. Decyzje te przyczyniają się to do wzrostu zaufania pomiędzy bankami.

- IV okres (od 28 maja 2009 do 23 kwietnia 2010 roku) jest okresem, podczas którego na rynkach nastąpiła względna stabilizacja. Badane spready ulegały dalszym spadkom. Gdy23 kwietnia Grecja wystąpiła o uruchomienie pierwszego pakietu pomocowego, co było pierwszym zwiastunem kryzysu zadłużeniowego w tym kraju, spread LIBOR-OIS dla euro zareagował dynamicznym wzrostem.
- V okres (od 24 kwietnia 2010 do 13 czerwca 2011 roku) jest okresem rozwijającego się kryzysu zadłużenia, którego skutki odbiły się także na kondycji sektorów bankowych na rynkach, z racji znacznego udziału obligacji skarbowych zagrożonych państw w portfelach poszczególnych banków. Dzięki szybkiej reakcji Unii Europejskiej oraz Międzynarodowego Funduszu Walutowego wzrost niepokoju na rynkach międzybankowych nie był znaczący. Wartość spreadów LIBOR-OIS nie zmieniła się istotnie, ale napływ informacji dotyczących sytuacji w Grecji spowodował duży wzrost ich zmienności. Gdy 13 czerwca 2011 rating Grecji został obniżony do „śmieciowego" poziomu CCC, spread LIBOR-OIS dla euro zaczęły szybko rosnąć. Wzrost obserwowalny był także dla spreadu LIBOR-OIS dla dolara amerykańskiego. Z tego powodu na dniu 13 czerwca 2011 roku kończymy kolejny okres badawczy.
- VI okres (od 14 czerwca 2011 do 31 grudnia 2011 roku), to okres podwyższonej wartości i zmienności badanych spreadów, co jest efektem coraz mocniej odczuwalnych skutków kryzysu zadłużeniowego. Silnym negatywnym impulsem jest wzrost rentowności 10-letnich włoskich obligacji skarbowych do wartości przekraczającej 7%. Pomimo wysokiej oceny ratingowej Włoch (Standard & Poor's oceniał wówczas wiarygodność kredytową Włoch na A+), inwestorzy zdawali sobie sprawę, że Włochy są dużym krajem z długiem publicznym przekraczającym 100% PKB. Gdyby Włochy miały problem z wykupem obligacji Unia Europejska i Międzynarodowy Fundusz Walutowy nie byłyby w stanie wygospodarować środków na przywrócenie płynności finansowej temu państwu. Do granicy 7% zbliżało się także oprocentowanie obligacji hiszpańskich. Pod koniec roku Europejski Bank Centralny przeprowadził pierwszą z dwóch planowanych rund 3-letnich operacji refinansujących LTRO (*Long-Term Refinancing Operations*) mających na celu dokapitalizowanie banków komercyjnych. Pozytywne skutki pierwszej transzy operacji były obserwowalne niemal natychmiast.

Z tego powodu na 31 grudnia 2011 roku zdecydowaliśmy się zakończyć kolejny okres.

- VII okres (od 2 stycznia 2012 do 31 maja 2012 roku) jest okresem, na początku którego rozpoczyna się konsekwentna obniżka spreadu LIBOR-OIS dla euro. Dzięki drugiej rundzie operacji LTRO, w ramach której banki pożyczyły w sumie 529,5 mld euro (o 40 mld więcej niż w pierwszej rundzie), trend spadkowy spreadów udawało się utrzymać aż do kwietnia 2012 roku, po czym spready dla dolara i euro ustabilizowały się na poziomie 0,3%. Spread WIBOR-OIS zaczął ponownie rosnąć.

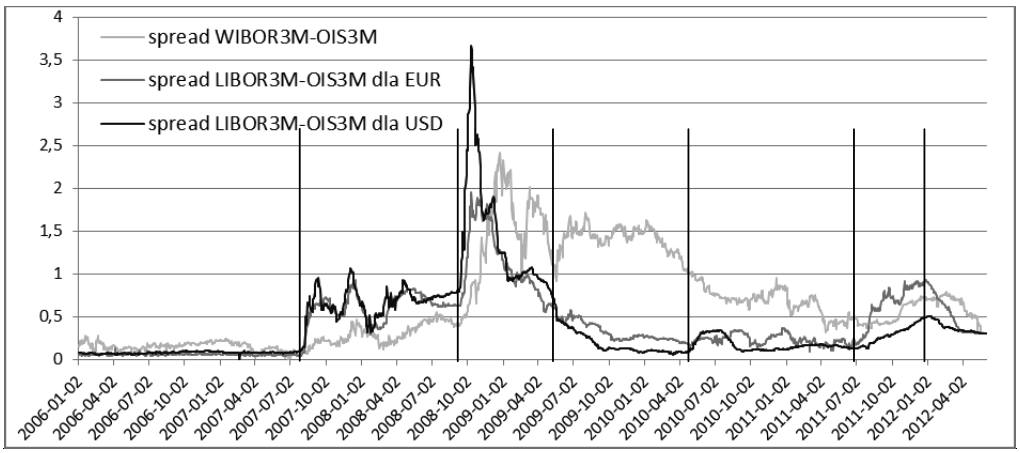
W tabeli 1 przedstawione są statystyki opisowe przyrostów badanych spreadów w poszczególnych podokresach. Charakterystyczną ich cechą jest duże zróżnicowanie zmienności. Największą wartość przyjmuje ona w okresie III, związanym z eskalacją kryzysu zaufania. Co interesujące, przed wybuchem pierwszej fali kryzysu rozkład przyrostów spreadów charakteryzował się większą kurtozą niż po jej wybuchu (wyjątek stanowi spread WIBOR-OIS, w przypadku którego skokowe zmiany w ostatnim okresie wygenerowały wysoką kurtozę). Świadczy to o tym, że przed kryzysem badane spready w większym stopniu reagowały na sygnały płynące z rynku niż po jego wybuchu.

Tabela 1.

Statystyki opisowe przyrostów spreadów pomiędzy oprocentowaniem 3-miesięcznej pożyczki na rynku międzybankowym, a stawką 3-miesięcznego OIS dla złotego, euro i dolara amerykańskiego w zależności od przyjętego podokresu

	Okres	I	II	III	IV	V	VI	VII
	dług. próby	403	273	178	230	293	144	109
WIBOR 3M – PLOIS 3M	średnia	-0,00017	0,001259	0,005	-0,00130	-0,00175	0,001076	-0,00147
	odch. std.	0,026028	0,03358	0,128299	0,04607	0,035779	0,016055	0,028409
	skośność	-0,18888	0,206091	0,185129	0,131834	0,173888	-0,13961	-3,41487
	kurtoza	19,2006	5,29226	5,0189	5,22992	6,98539	5,91823	34,6058
LIBOR EUR 3M – EUROIS 3M	średnia	0,000123	0,001903	-0,00091	-0,00125	-0,00011	0,004972	-0,0054
	odch. std.	0,01043	0,02870	0,051370	0,01414	0,02166	0,029426	0,009290
	skośność	0,18431	0,47781	1,1917	0,5938	-0,56012	0,31	-0,71921
	kurtoza	14,2911	6,23366	9,57372	9,63408	10,5581	4,32972	11,4031
LIBOR USD 3M – USDOIS 3M	średnia	0,000161	0,002392	-0,00193	-0,00156	0,00016	0,00251	-0,00177
	odch. std.	0,010291	0,04776	0,086877	0,006362	0,00668	0,005941	0,004138
	skośność	-0,10769	0,86401	0,85835	-0,37663	2,24365	-0,01965	-0,35219
	kurtoza	84,0202	8,90868	9,28944	3,96623	19,6052	7,08461	3,60936

Źródło: obliczenia własne.



Rysunek 1. Poziomy spreadów pomiędzy 3-miesięczną stopą WIBOR/LIBOR a stawką 3-miesięcznego OIS dla złotego, euro i dolara amerykańskiego. Na rysunku zaznaczono dodatkowo linie podziału na badane podokresy

Źródło: opracowanie własne.

3. MODELE

Identyfikacji wpływu spreadów LIBOR-OIS dla walut zagranicznych na spread WIBOR-OIS dokonaliśmy poprzez dopasowanie do szeregów ich przyrostów modelu VAR(m)-BEKK(p,q) (por. Engle, Kroner, 1995, Fiszeder, 2009) oraz wyznaczenie w ramach tego modelu funkcji odpowiedzi na impuls oraz funkcji odpowiedzi na impuls w wariancji warunkowej. Dobór struktury modelu wynika z relatywnie łatwej metody wyznaczenia funkcji odpowiedzi na impuls w wariancji warunkowej. Do opisu kształtowania się wektorów

$$Spread_t = [(WIBOR3M - OIS3M)_t \quad (LIBOR3M - OIS3M)_t^{EUR} \quad (LIBOR3M - OIS3M)_t^{USD}]',$$

Wykorzystamy więc strukturę VAR (m)-BEKK(p,q) co można zapisać w następujący sposób

$$\begin{cases} A(L)(1-L)Spread_t = y_t, \\ y_t = H_t^{1/2}\varepsilon_t, \\ H_t = C'C + \sum_{l=1}^{q} F_l' y_{t-l} y_{t-l}' F_l + \sum_{l=1}^{p} G'_l H_{t-l} G_l, \\ \varepsilon_t \sim iid(0,1,\upsilon), \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $A(L) = I - A_1L - \ldots - A_mL^m$, gdzie I oznacza macierz jednostkową stopnia *3*, natomiast macierze C, F oraz G są macierzami o wymiarze 3×3, przy czym C jest macierzą dolnotrójkątną. Jako wartości początkowe przyjęto następujące macierze:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix}.$$

4. FUNKCJA ODPOWIEDZI NA IMPULS

Z punktu widzenia zastosowań modelu VAR niezwykle ważnym pojęciem jest funkcja odpowiedzi na impuls, która umożliwia ocenę jaka jest siła oddziaływania zaburzeń każdego spośród modelowanych szeregów na dowolny modelowany szereg na pewną określoną liczbę dni naprzód. Model VAR(p) zapisany równaniem:

$$x_t = a_0 + \sum_{l=1}^{p} A_l x_{t-l} + y_t$$

można przedstawić za pomocą równoważnego modelu postaci VMA(∞) postaci:

$$x_t = \mu + \sum_{l=1}^{\infty} B_l y_{t-l} + y_t, \tag{2}$$

gdzie

$$\mu = \left(1 - \sum_{l=1}^{p} A_l\right)^{-1} a_0,$$

natomiast poszczególne macierze B_l można wyznaczyć przez porównywanie współczynników przy poszczególnych opóźnieniach w równaniu:

$$(I - \sum_{l=1}^{p} A_l L^l)(I - \sum_{l=1}^{\infty} B_l L^l) = I,$$

gdzie I jest macierzą jednostkową (por. Tsay, 2010). W przypadku jednowymiarowym funkcja odpowiedzi na impuls w modelu AR(p) zdefiniowana jest jako funkcja przyporządkowująca liczbie naturalnej l wartość parametru b_l w równoważnym modelu MA(∞) wyrażonym wzorem

$$x_t = \mu + \sum_{l=1}^{\infty} b_l y_{t-l} + y_t.$$

Rozważając model wielowymiarowy musimy pamiętać, że składniki losowe poszczególnych szeregów są ze sobą skorelowane, w związku z czym zdefiniowana w ten sposób funkcja nie miałaby pożądanej interpretacji. Z tego względu dokonuje się dekompozycji Choleskiego macierzy kowariancji $\Sigma = \mathrm{cov}(\varepsilon_t)$ na

$$\Sigma = WUW'$$

gdzie W jest macierzą dolnotrójkątną, natomiast U jest macierzą diagonalną z dodatnimi elementami na diagonali głównej. Wobec powyższego, macierzą kowariancji wektora $u_t = W^{-1} y_t$ jest macierz U, a więc tworzą go zmienne nieskorelowane. Równanie (2) możemy zapisać w postaci

$$x_t = \mu + \sum_{l=1}^{\infty} B_l W W^{-1} y_{t-l} + W W^{-1} y_t = \mu + \sum_{l=1}^{\infty} B_l W u_{t-l} + W u_t = \mu + \sum_{l=1}^{\infty} B_l^* u_{t-l} + W u_t,$$

gdzie $B_l^* = B_l W$. Funkcję przyporządkowującą liczbie naturalnej l macierz B_l^* nazywamy funkcją odpowiedzi na impuls. Zwykle dokonuje się normalizacji wektora u_t w ten sposób, by jego wariancja była równa 1. Element (i,j) macierzy B_l^* interpretujemy jako wpływ zaburzenia $u_{t,j}$ na wartość $x_{t,i}$ na l kroków naprzód.

Pojęcie funkcji odpowiedzi na impuls można rozszerzyć na przypadek wariancji warunkowej. Postać wielowymiarowego modelu wariancji warunkowej można zamienić na równoważną postać MA dla kwadratów składników losowych. Engle i Kroner (1988) wykazali, że wykorzystany w pracy model BEKK jest szczególnym przypadkiem wprowadzonego przez Bollersleva i in., (1988) modelu VEC. Jest on zdefiniowany za pomocą następującego równania:

$$\mathrm{vec}(H_t) = c + \sum_{l=1}^{q} A_l \mathrm{vec}(y_{t-l} y'_{t-l}) + \sum_{l=1}^{p} B_l \mathrm{vec}(H_{t-l}),$$

gdzie c jest wektorem parametrów wymiaru $n(n + 1)/2$ natomiast A_i oraz B_i są kwadratowymi macierzami parametrów stopnia $n(n + 1)/2$. Trzecie równanie w modelu (1) można zapisać w równoważnej reprezentacji VEC, wektoryzując obydwie strony równania i wykorzystując następującą własność macierzy: $\mathrm{vec}(ABC) = (C \otimes A)\mathrm{vec}(B)$, gdzie symbol $\otimes$ oznacza iloczyn Kroneckera. Wówczas otrzymujemy:

$$\mathrm{vec}(H_t) = (C \otimes C)'\mathrm{vec}(I_n) + \sum_{l=1}^{q} \sum_{k=1}^{l} (F_k \otimes F_k)'\mathrm{vec}(y_{t-l} y'_{t-l}) + \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{l} (G_k \otimes G_k)'\mathrm{vec}(H_{t-l}). \quad (3)$$

Oznacza to, że model BEKK jest równoważny modelowi VEC, w którym za macierze A_l podstawmy $\sum_{k=1}^{l}(F_k \otimes F_k)'$, natomiast za B_l podstawiamy $\sum_{k=1}^{l}(G_k \otimes G_k)'$. Model opisany równaniem (3) można zapisać w reprezentacji VARMA. Przyjmując oznaczenia $A_l = \sum_{k=1}^{l}(F_k \otimes F_k)'$ oraz $B_l = \sum_{k=1}^{l}(G_k \otimes G_k)'$ otrzymujemy następujące równanie

$$\operatorname{vec}(y_t y_t') = (C \otimes C)'\operatorname{vec}(I_n) + \sum_{l=1}^{\max(p,q)}(A_l + B_l)\operatorname{vec}(y_{t-l} y_{t-l}') + \sum_{i=1}^{p} B_l u_{t-l} + u_t,$$

gdzie $u_t = y_t y_t' - H_t$ jest wektorowym białym szumem(por. Engle, Kroner, 1995; Stelzer, 2008). Powyższy model można zapisać w następującej reprezentacji VMA(∞).

$$\operatorname{vec}(y_t y_t') = \operatorname{vec}(H) + \sum_{l=0}^{\infty}\phi_l u_{t-l},$$

gdzie H jest macierzą bezwarunkowej kowariancji, a ponadto $\phi_0 = I$ oraz $\phi_l = -B_l + \sum_{k=1}^{l}(A_k + B_k)\phi_{l-k}$ (por. Hafner, Herwartz, 2006; Lütkepohl, 2007). W niniejszej pracy parametry w macierzy ϕ_l, podobnie jak Davidson (2013), interpretujemy jako funkcje odpowiedzi na impuls w wariancji warunkowej.

Element (i,j) macierzy ϕ_l interpretujemy jako wpływ kwadratu zaburzenia $u_{t,j}$ na element (i,i) macierzy H_{t+l} który wyraża wariancją warunkową i-tego modelowanego szeregu.

5. BADANIE KIERUNKÓW TRANSMISJI KRYZYSU ZAUFANIA

Identyfikacji zależności występujących w spreadach dokonujemy poprzez dopasowanie do ich przyrostów modelu VAR-BEKK, by następnie za jego pomocą wyznaczyć funkcje odpowiedzi na impuls w średniej i wariancji warunkowej. Pozwoli to wyciągnąć wniosku dotyczące wpływu sytuacji na rynku bankowym w Stanach Zjednoczonych i strefie euro na polski rynek międzybankowy. Obliczenia zostaną dokonane za pomocą programu Time Series Modeling 4.39. Podobne badania zostały przeprowadzone przez Europejski Bank Centralny (EBC, 2008) celem zbadania zależności pomiędzy rozwojem kryzysu zaufania w strefie euro i Stanach Zjednoczonych, przez Imakubo i in.(2008), a także przez Soultanaevę i Strömqvist (2009), które zbadały mechanizm transmisji kryzysu zaufania do Szwecji.

Aby uniknąć identyfikacji pozornych reakcji na impulsy, zależności, które w modelu okazały się statystycznie nieistotne, zostały z niego wyeliminowane. Rząd modelu został dobrany na podstawie kryterium informacyjnego Akaike. Ze względu na wysoką kurtozę charakteryzującą rozkłady poszczególnych szeregów przyrostów spreadów w większości rozważanych okresów jako rozkłady innowacji wykorzystywaliśmy rozkład GED (Nelson, 1990). W niektórych przypadkach modele z rozkładem GED nie osiągały kryterium zbieżności. Wówczas był on zastępowany rozkładem *t* Studenta (Bollerslev, 1987). Parametry modeli dopasowanych do szeregów przyrostów rozważanych spreadów w poszczególnych podokresach przedstawione są w tabelach 2–8, natomiast otrzymane na podstawie tych modeli funkcje odpowiedzi na impuls przedstawiliśmy na rysunkach 2–14.

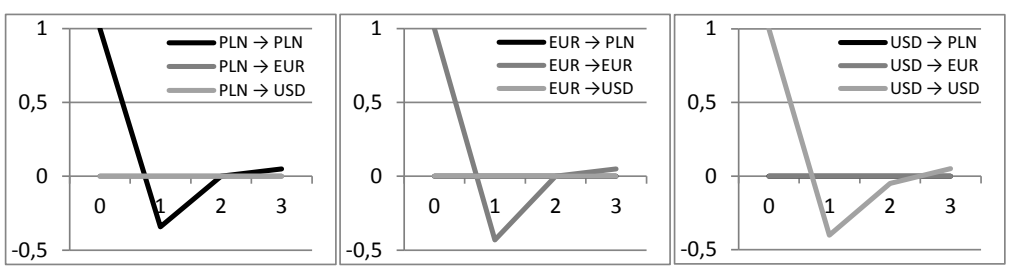
Tabela 2.

Oceny parametrów modelu VAR(3)-BEKK(1,1) dopasowanego do przyrostów spreadów pomiędzy oprocentowaniem 3-miesięcznej pożyczki na rynku międzybankowym, a stawką 3-miesięcznego OIS dla złotego, euro i dolara amerykańskiego w I rozważanym okresie

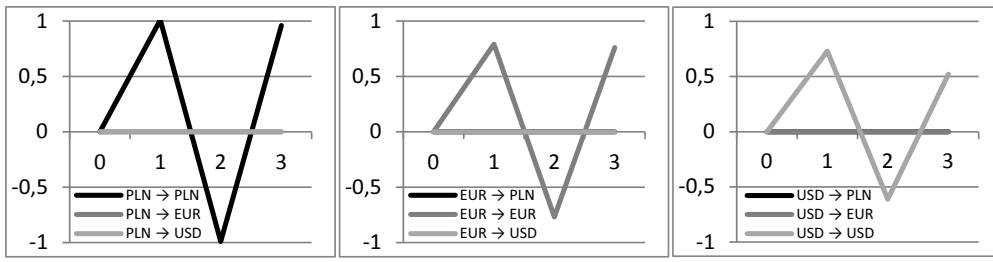
κ (GED)	$a_{1,11}$	$a_{1,22}$	$a_{1,33}$	$a_{2,22}$	$a_{2,33}$	$a_{2,11}$	$a_{3,22}$	C_{11}	C_{12}
0,69096 ---	-0,32846 [0]	-0,46636 [0]	-0,39258 [0]	-0,31155 [0]	-0,22797 [0]	-0,15721 [0,005]	-0,15305 [0,007]	0,00729 ---	0,30476 [0,096]
C_{13}	C_{22}	C_{23}	C_{33}	$F_{1,11}$	$F_{1.22}$	$F_{1,33}$	$G_{1,11}$	$G_{1,22}$	$G_{1,33}$
0,18234 [0,135]	0,0029 ---	0,00013 [0,0905]	0,00229 ---	0,21177 [0]	-0,14805 [0,023]	-0,19453 [0]	0,87529 [0]	0,94172 [0]	0,85138 [0]

W nawiasach kwadratowych podano p-wartości.

Źródło: obliczenia własne.



Rysunek 2. Funkcje odpowiedzi na impuls w średniej warunkowej przyrostów spreadów w I okresie
Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 3. Funkcje odpowiedzi na impuls w wariancji warunkowej spreadów w I okresie
Źródło: opracowanie własne.

Analizując parametry modelu dopasowane do spreadów w I okresie oraz funkcje odpowiedzi na impuls w średniej i wariancji warunkowej obserwujemy brak powiązania pomiędzy spreadami. Parametry C_{21}, C_{31}, C_{32} odpowiedzialne za bezwarunkową kowariancję okazały się statystycznie nieistotne. Nie zidentyfikowano także zależności warunkowych pomiędzy przyrostami spreadów zarówno w średniej, jak i wariancji warunkowej. Wielkości te uzależnione są jedynie od swoich własnych opóźnień, co świadczy o tym, że w pierwszym badanym okresie wszystkie spready kształtowały się względem siebie niezależnie.

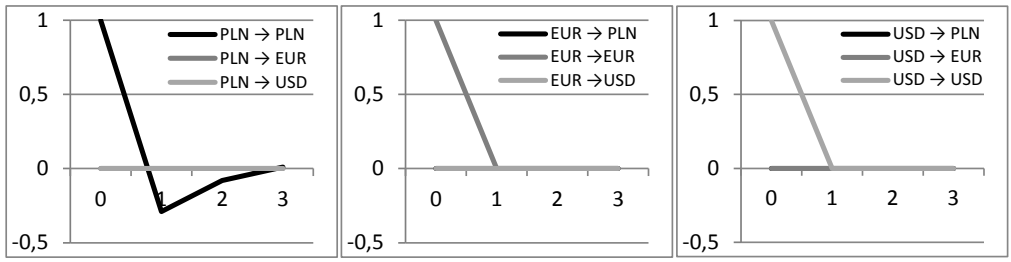
Tabela 3.

Oceny parametrów modelu VAR(2)-BEKK(1,1) dopasowanego do przyrostów spreadów pomiędzy oprocentowaniem 3-miesięcznej pożyczki na rynku międzybankowym, a stawką 3-miesięcznego OIS dla złotego, euro i dolara amerykańskiego w II rozważanym okresie

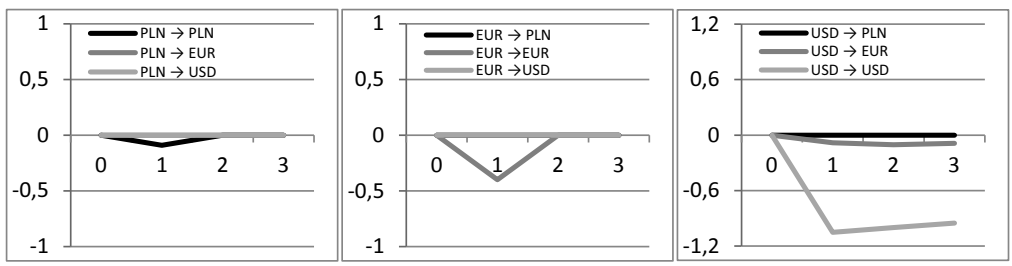
υ (Student t)	$a_{1,11}$	$a_{2,11}$	C_{11}	C_{13}	C_{21}	C_{22}
5,50787 ------	-0,2926 [0]	-0,14649 [0,017]	0,00729 ------	0,55586 [0,263]	-0,00456 [0,948]	0,0029 ------
C_{23}	C_{33}	$F_{1,11}$	$F_{1,22}$	$F_{1,33}$	$G_{1,32}$	$G_{1,33}$
0,00015 [0,124]	0,00229 ------	-0,11412 [0,085]	-0,42319 [0,002]	-0,26837 [0,009]	-0,10453 [0,031]	-0,93525 [0]

W nawiasach kwadratowych podano p-wartości.

Źródło: obliczenia własne.



Rysunek 4. Funkcje odpowiedzi na impuls w średniej warunkowej przyrostów spreadów w II okresie
Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 5. Funkcje odpowiedzi na impuls w wariancji warunkowej spreadów w II okresie
Źródło: opracowanie własne.

W drugim badanym okresie obserwujemy wyraźną zmianę w kształtowaniu się dynamiki rozważanych spreadów: słabną zależności liniowe, w dopasowanym do wektora spreadów modelu parametr $a_{3,11}$ jest statystycznie istotny. W przypadku dwóch pozostałych spreadów nie zidentyfikowano żadnych zależności autoregresyjnych. W równaniu wariancji warunkowej, będącej miarą niepewności, uwidacznia się natomiast zależność spreadu LIBOR-OIS dla euro od spreadu LIBOR-OIS dla dolara amerykańskiego, co ma związek z przenikaniem niepewności z rynku międzybankowego w Stanach Zjednoczonych na rynek międzybankowy w strefie euro. Model nie wykazał żadnego oddziaływania na rynek Polski, chociaż w tym okresie dał się już zaobserwować wzrost spreadu WIBOR-OIS. Nie był on jednak tak gwałtowny jak w przypadku dwóch pozostałych walut.

W trzecim rozważanym okresie, związanym głównie z upadkiem banku Lehman Brothers i wydarzeniami, które nastąpiły krótko po nim, nastąpił ogromny spadek zaufania, o czym świadczy olbrzymi wzrost wszystkich trzech rozważanych spreadów. Pomimo to model oraz otrzymane w jego ramach funkcje odpowiedzi na impuls nie wykazały żadnych zależności ani w średniej, ani w wariancji warunkowej, co świadczy o niezależnym kształtowaniu się wszystkich badanych spreadów. Wynika to z faktu, że choć wydarzenia związane z upadkiem Lehman Brothers niewątpliwie wywarły wpływ na sektory bankowe wszystkich trzech gospodarek, to skala zagroże-

Tabela 4.

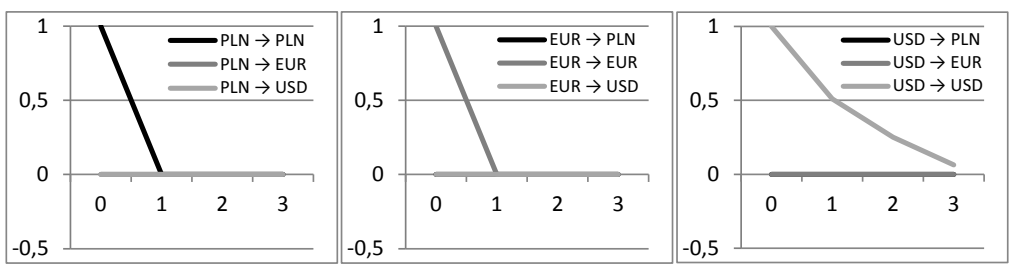
Oceny parametrów modelu VAR(1)-BEKK(3,0) dopasowanego do przyrostów spreadów pomiędzy oprocentowaniem 3-miesięcznej pożyczki na rynku międzybankowym, a stawką 3-miesięcznego OIS dla złotego, euro i dolara amerykańskiego w III rozważanym okresie

κ (GED)	$a_{1,33}$	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{22}	C_{23}	C_{33}
0,73604 ------	0,51047 [0]	0,05033 ------	0,16216 [0,304]	0,40609 [0,187]	0,01769 ------	0,38689 [0,191]	0,00971 ------
$F_{1,11}$	$F_{1,22}$	$F_{1,33}$	$F_{2,11}$	$F_{2,22}$	$F_{2,33}$	$F_{3,11}$	$F_{3.22}$
0,22692 [0,045]	-0,4139 [0]	-0,29343 [0,007]	0,43282 [0,001]	0,1719 [0,218]	0,37582 [0,006]	0,26585 [0,002]	0,44534 [0,003]

W nawiasach kwadratowych podano p-wartości.

Źródło: obliczenia własne.

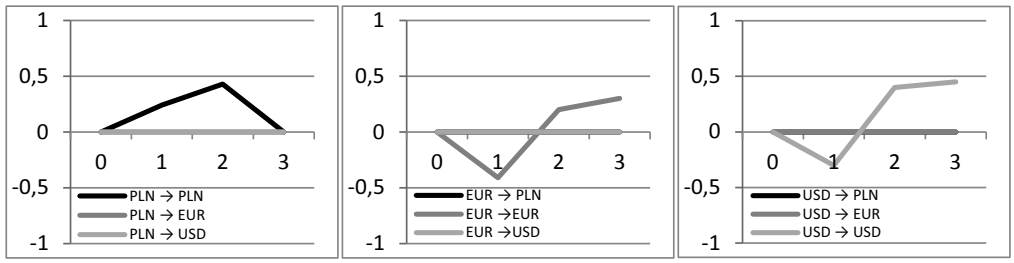
nia związana z tymi wydarzeniami w każdej z nich była inna. W Stanach Zjednoczonych wystąpiła realna groźba lawiny upadków banków – wierzycieli Lehman Brothers osłabionych już silnie poprzez zaangażowanie na rynku papierów powiązanych z kredytami subprime. Dlatego, jak można zaobserwować na rysunku 1, reakcja spreadu LIBOR-OIS dla dolara amerykańskiego była natychmiastowa. Spread LIBOR-OIS dla euro wzrasta z pewnym opóźnieniem i nie tak intensywnie, co wynika z mniejszego zaangażowania banków ze strefy euro na rynku kredytów euro i praktycznie braku zobowiązań banku Lehman Brothers wobec tych banków[2]. Spread WIBOR-OIS reaguje znacznie mniej dynamicznie, jako że polskie banki nie były zaangażowane na rynku papierów subprime, a głównym problemem, z jakim musiał się zmagać sektor, była utrata zaufania banków do siebie nawzajem.



Rysunek 6. Funkcje odpowiedzi na impuls w średniej warunkowej przyrostów spreadów w III okresie

Źródło: opracowanie własne.

[2] Według danych opublikowanych w raporcie upadłościowym Lehman Brothers, w trzydziestce największych wierzycieli Lehman Brothers znajduje się tylko 6 banków europejskich, które w momencie upadku banku zdeponowały w nim 650 mln dolarów. Łączne zobowiązania Lehman Brothers szacowane są na 322 mld dolarów.



Rysunek 7. Funkcje odpowiedzi na impuls w wariancji warunkowej spreadów w III okresie
Źródło: opracowanie własne.

W czwartym badanym okresie, w którym kryzys zaufania stopniowo słabnie, pojawia się zależność pomiędzy warunkowymi wariancjami spreadów LIBOR-OIS dla dolara amerykańskiego oraz euro. Jak już wspomnieliśmy, jest to jednocześnie okres pierwszych sygnałów kryzysu fiskalnego państw Europy Południowej. W okresie tym instytucje finansowe odzyskując powoli zaufanie do siebie nawzajem, bardzo uważały na sygnały napływające z innych rynków. W ten sposób rosnąca nerwowość na rynku międzybankowym w Stanach Zjednoczonych przekładała się natychmiast na rosnącą nerwowość w strefie euro i odwrotnie. Jednocześnie obserwujemy całkowicie niezależne ukształtowanie się dynamiki spreadu WIBOR-OIS.

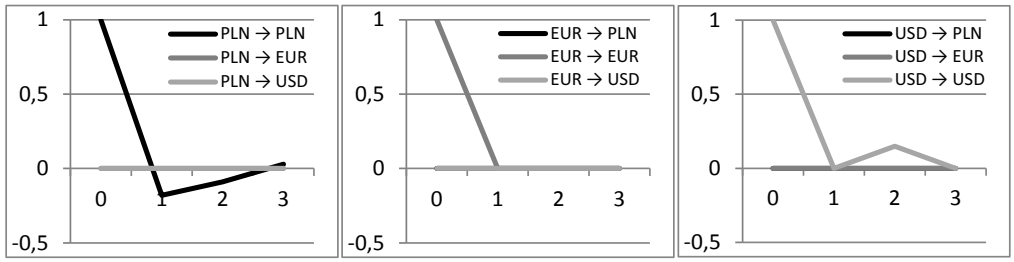
Tabela 5.

Oceny parametrów modelu VAR(1)-BEKK(3,0) dopasowanego do przyrostów spreadów pomiędzy oprocentowaniem 3-miesięcznej pożyczki na rynku międzybankowym, a stawką 3-miesięcznego OIS dla złotego, euro i dolara amerykańskiego w IV rozważanym okresie

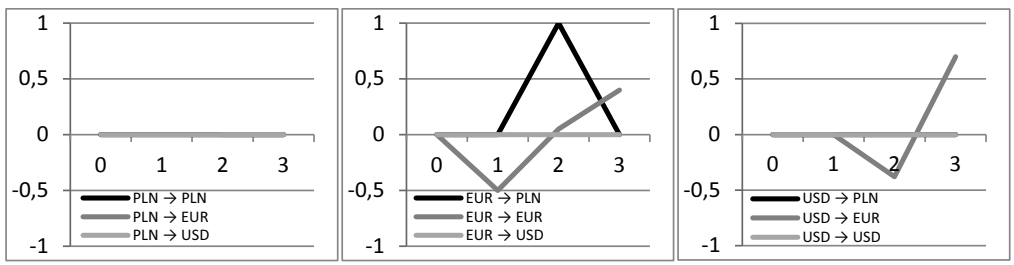
κ (GED)	$a_{1,11}$	$a_{2,11}$	$a_{2,33}$	C_{11}	C_{21}	C_{22}	C_{31}	C_{32}
1,32017 ------	-0,18186 [0,013]	-0,12641 [0,031]	0,16019 [0,044]	0,03465 ------	0,03309 [0,823]	0,00468 ------	0,09614 [0,23]	-0,00354 [0,976]
	C_{33}	$F_{1,22}$	$F_{2,12}$	$F_{2,23}$	$F_{2,32}$	$F_{3,21}$	$F_{3.22}$	$F_{3,23}$
	-0,46745 ------	-0,46745 [0]	0,99772 [0]	-0,43257 0[,013]	-0,11817 [0,001]	-0,09344 [0,001]	0,30139 [0,025]	0,67676 [0,003]

W nawiasach kwadratowych podano p-wartości.

Źródło: obliczenia własne.



Rysunek 8. Funkcje odpowiedzi na impuls w średniej warunkowej przyrostów spreadów w IV okresie
Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 9. Funkcje odpowiedzi na impuls w wariancji warunkowej spreadów w IV okresie
Źródło: opracowanie własne.

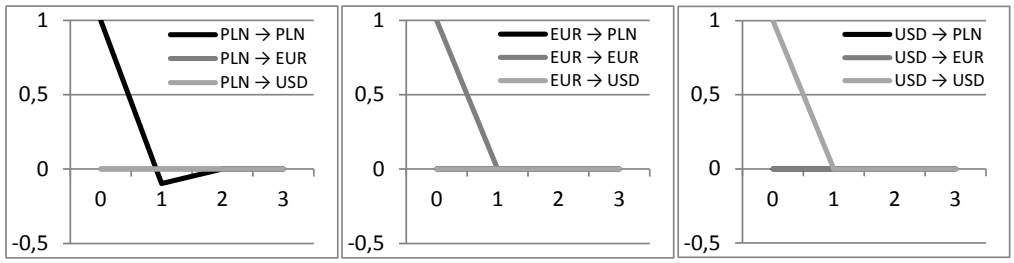
Tabela 6.

Oceny parametrów modelu VAR(1)-BEKK(1,0) dopasowanego do przyrostów spreadów pomiędzy oprocentowaniem 3-miesięcznej pożyczki na rynku międzybankowym, a stawką 3-miesięcznego OIS dla złotego, euro i dolara amerykańskiego w V rozważanym okresie

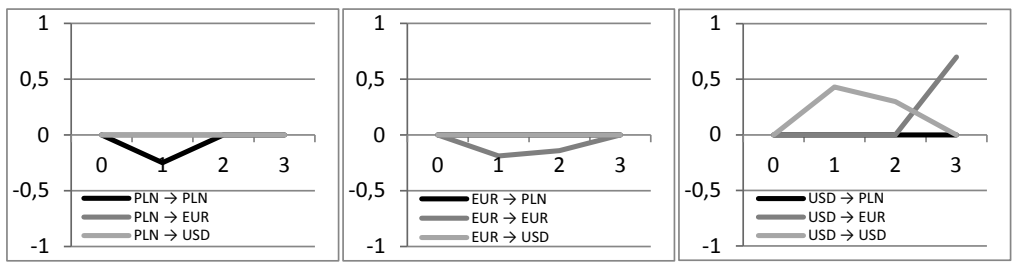
κ (GED)	$a_{2,11}$	$a_{3,22}$	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{22}
0,713 ------	-0,09792 [0,003]	-0,0334 [0,001]	0,01695 ------	0,11861 [0,105]	0,02312 [0,768]	0,01053 ------
C_{23}	C_{33}	$F_{1,11}$	$F_{1,22}$	$F_{1,33}$	$F_{2,22}$	$F_{2,33}$
0,0561 [0,515]	0,00197 ------	0,99772 [0]	-0,43257 [0,013]	-0,09344 [0,001]	0,30139 [0,025]	0,67676 [0,003]

W nawiasach kwadratowych podano p-wartości.

Źródło: obliczenia własne.



Rysunek 10. Funkcje odpowiedzi na impuls w średniej warunkowej przyrostów spreadów w V okresie
Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 11. Funkcje odpowiedzi na impuls w wariancji warunkowej (VIRF) spreadów w V okresie
Źródło: opracowanie własne.

W piątym badanym okresie, wobec rozwoju kryzysu fiskalnego, zmienność spreadu LIBOR-OIS dla euro znacząco wzrasta. Niepokojące sygnały ze strefy euro nie znalazły odzwierciedlenia w zachowaniu pozostałych spreadów. Wszystkie parametry wyrażające wzajemne powiązania pomiędzy spreadami pozostały statystycznie nieistotne. Spread WIBOR-OIS kontynuuje trend spadkowy, natomiast spread LIBOR-OIS dla dolara amerykańskiego, początkowo zaburzony przez konsekwencje wycieku ropy naftowej z platformy wiertniczej w Zatoce Meksykańskiej, stabilizuje się na stałym poziomie.

W szóstym rozważanym okresie obserwujemy dwa krótkookresowe wzrosty wariancji warunkowej. Pierwszy z nich wiąże się z obniżeniem przez Standard & Poor's ratingu USA do AA+ w dniu 5 sierpnia 2011, drugi z przekroczeniem przez włoskie obligacje 10-letnie 7-procentowego progu rentowności w dniu 9 listopada 2011 roku. Wydarzenia te w największym stopniu odbijają się na spreadzie LIBOR-OIS dla euro. Z pewnym opóźnieniem reaguje spread WIBOR-OIS, natomiast spread LIBOR-OIS dla dolara amerykańskiego nie reaguje w ogóle. Zastosowany model wielowymiarowy nie pozwolił na zidentyfikowanie jakichkolwiek zależności pomiędzy spreadami w tym okresie.

Z początkiem 2012 roku po przeprowadzeniu pierwszej z dwóch planowanych przez EBC rund operacji LTRO zmienność wszystkich spreadów maleje i stabilizuje się. Wszystkie parametry modelu BEKK, które opisywały wariancję warunkową tych spreadów, są statystycznie nieistotne, co świadczy o braku efektu ARCH w tych szeregach (potwierdziły to przeprowadzone niezależnie testy Engle'a (1982) i McLeoda-Li (1983)). Model pokazał, że spready w dalszym ciągu kształtują się w sposób niezależny.

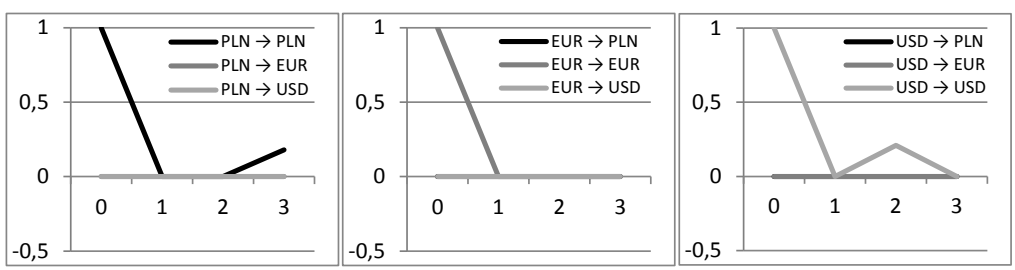
Tabela 7.

Oceny parametrów modelu VAR(3)-BEKK(1,0) dopasowanego do przyrostów spreadów pomiędzy oprocentowaniem 3-miesięcznej pożyczki na rynku międzybankowym, a stawką 3-miesięcznego OIS dla złotego, euro i dolara amerykańskiego w VI rozważanym okresie

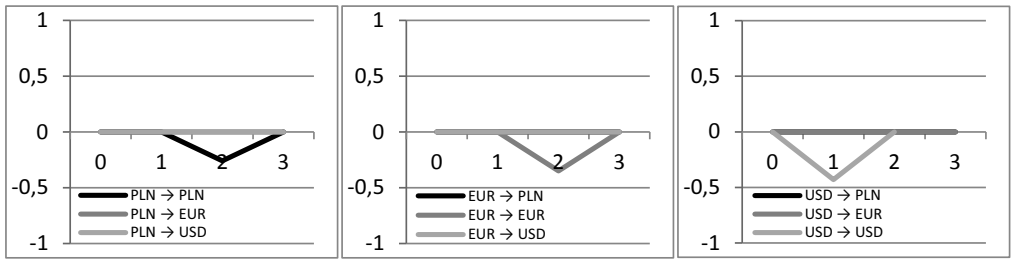
κ (*GED*)	$a_{3,11}$	$a_{2,33}$	C_{11}	C_{12}	C_{13}
1,13639 ------	0,18024 [0,01]	0,25472 [0,001]	0,10329 ------	0,07043 [0,434]	-0,02037 [0,822]
C_{22}	C_{23}	C_{33}	$F_{2,11}$	$F_{2,22}$	$F_{1,33}$
0,14335 ------	0,16045 [0,312]	0,06337 ------	-0,26852 [0,066]	-0,34158 [0,005]	-0,4533 [0]

W nawiasach kwadratowych podano p-wartości.

Źródło: obliczenia własne.



Rysunek 12. Funkcje odpowiedzi na impuls w średniej warunkowej przyrostów spreadów w VI okresie
Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 13. Funkcje odpowiedzi na impuls w wariancji warunkowej spreadów w VI okresie
Źródło: opracowanie własne.

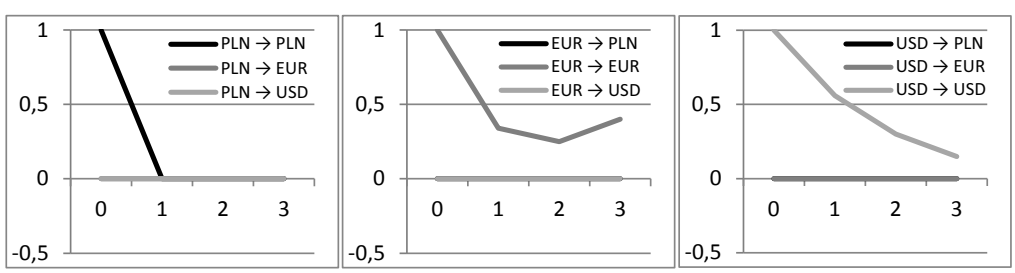
Tabela 8.

Oceny parametrów modelu VAR(3)-BEKK(1,0) dopasowanego do przyrostów spreadów pomiędzy oprocentowaniem 3-miesięcznej pożyczki na rynku międzybankowym, a stawką 3-miesięcznego OIS dla złotego, euro i dolara amerykańskiego w VII rozważanym okresie

υ (Student)	$a_{1,22}$	$a_{2,22}$	$a_{3,22}$	$a_{1,33}$	C_{11}
4,80873 ------	0,34884 [0]	0,13073 [0,028]	0,25831 [0]	0,5487 [0]	0,01713 ------
C_{13}	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{33}	
-0,0804 [0,487]	-0,19474 [0,082]	0,00528 ------	0,20254 [0,238]	0,00315 ------	

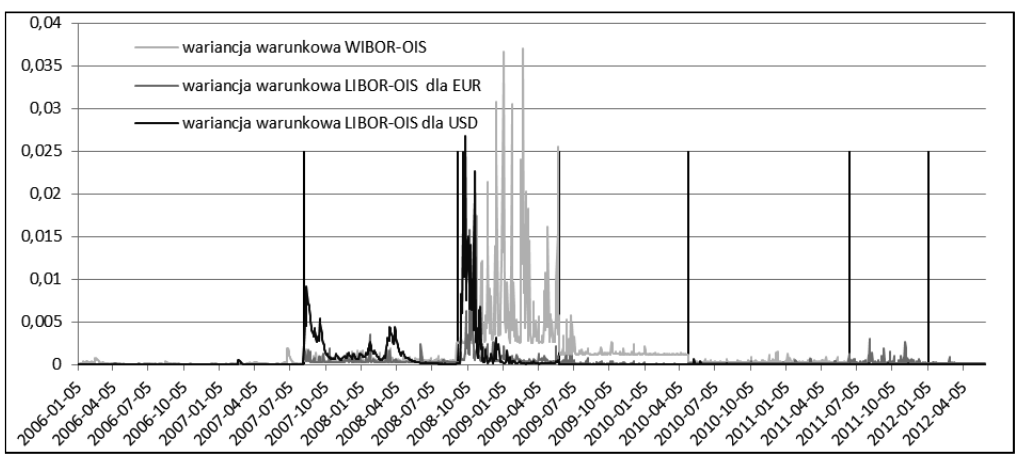
W nawiasach kwadratowych podano p-wartości.

Źródło: obliczenia własne.



Rysunek 14. Funkcje odpowiedzi na impuls w średniej warunkowej przyrostów spreadów w VII okresie
Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 15 przedstawiony jest wykres wariancji warunkowej otrzymanej za pomocą dopasowanych modeli BEKK. Pokazuje on, że nerwowość rynku jest oddana nie tylko przez wielkość spreadów, ale także ich dynamikę. W drugim spośród rozważanych okresów obserwujemy znaczny wzrost dynamiki spreadów LIBOR-OIS dla euro i dolara amerykańskiego w przededniu nacjonalizacji Northern Rock oraz sprzedaży banku Bear Stearns holdingowi GP Morgans. Jednocześnie da się zauważyć wpływ tych wydarzeń na dynamikę spreadu WIBOR-OIS. Na początku trzeciego rozważanego okresu obserwujemy znaczący wpływ upadku banku Lehman Brothers na wariancję warunkową spreadu LIBOR-OIS dla dolara i euro. Dynamiczne zmiany spreadu WIBOR-OIS wiążą się z dużą niepewnością co do kształtowania się stawki POLONIA[3], która wobec rozwoju kryzysu zaufania w znacznym stopniu odbiega od stopy referencyjnej. Duża zmienność stawki POLONIA implikuje również wzrost zmienności stawek OIS. Na początku czwartego rozważanego okresu wariancje spreadów stabilizują się na stałym poziomie. Wahania wariancji spreadów w piątym rozważanym okresie wiążą się z pojawiającymi się symptomami kryzysu fiskalnego. Można też zauważyć, że poszczególne skoki w wariancji warunkowej spredów WIBOR-OIS oraz LIBOR-OIS dla euro pokrywają się z datami obniżenia ratingów państw o wysokim poziomie zadłużenia. Można tu wymienić m.in. zmianę



Rysunek 15. Wariancje warunkowe spreadów pomiędzy 3-miesięczną stopą WIBOR/LIBOR a stawką 3-miesięcznego OIS dla złotego, euro i dolara amerykańskiego

Na rysunku zaznaczono dodatkowo podział na badane podokresy.

Źródło: opracowanie własne.

[3] Stawka POLONIA określa oprocentowanie depozytów złotowych udzielonych lub przyjętych w terminie overnight na rynku międzybankowym. Jest wyznaczana jako średnia ważona transakcji zawartych do godziny 16 przez 21 banków ją kwotujących.

perspektywy Hiszpanii ze stabilnej na negatywną przez Fitch 4 marca 2011 roku oraz sukcesywne obniżki ratingu Grecji w maju i czerwcu 2011.

6. ZAKOŃCZENIE

Przeprowadzone badanie pokazało, że przez większą część badanego okresu spread WIBOR-OIS nie był uzależniony od dwóch rozważanych spreadów LIBOR-OIS. Wyjątek stanowił jedynie okres IV, wiążący się ze stopniowym narastaniem kryzysu zadłużeniowego w państwach Europy Południowej. W okresie tym uwidocznił się dodatni wpływ wariancji warunkowej spreadu LIBOR-OIS dla euro na wariancję warunkową spreadu WIBOR-OIS. Wiele istotnych wydarzeń związanych z kryzysem wywarło wpływ na wariancję warunkową spreadu WIBOR-OIS. Wobec powyższego nie można przyjąć hipotezy postulującej brak przenikania impulsów związanych z kryzysem do Polski. Wpływ rynku amerykańskiego na rynek polski niewątpliwie wystąpił, choć był on słabszy niż w przypadku państw strefy euro. Już przedstawiona na rysunku 1 dynamika spreadów pokazuje, że kryzys przenika na polski rynek międzybankowy ze znacznym opóźnieniem. Otrzymany rezultat jest zgodny z tezami stawianymi w raporcie NBP (2009), gdzie szczegółowo przeanalizowano ukształtowanie się sytuacji w Polsce wobec pierwszej odsłony światowego kryzysu finansowego. Do podobnych wniosków dojść możemy analizując drugą odsłonę kryzysu.

Silne zależności pomiędzy spreadami LIBOR-OIS dla dolara i euro uwidaczniają się w okresie II, związanym z rozwojem kryzysu subprime (wpływ wariancji warunkowej spreadu LIBOR-OIS dla dolara amerykańskiego na wariancję warunkową spreadu LIBOR-OIS dla euro) oraz IV (wzajemne zależności pomiędzy wariancją warunkową spreadu LIBOR-OIS dla dolara amerykańskiego i euro).

LITERATURA

Bollerslev T., (1987), A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return, *Review of Economics and Statistics*, 69, 542–547.

Bollerslev T., Engle R. F., Wooldridge J. M., (1988), A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariances, *Journal of Political Economy*, 96, 116–131.

Davidson J., (2013), *Time Series Modelling* 4.39, www.timeseriesmodeling.com.Pobrano 09.11.2013.

Engle R. F., (1982), Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, 50, 987–1007.

Engle R., Kroner F., (1995), Multivariate Simultaneous Generalized ARCH, *Econometric Theory*, 11, 122–-150

EBC, (2008), *Financial Stability Review*, *Box 3 Transmission of US Dollar and Pound Sterling Money Market Tensions to EUR Money Markets*, December.

Fiszeder P., (2009), *Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.

Hafner C. M., Herwartz H., (2006), Volatility Impulse Responses for Multivariate GARCH Models: An Exchange Rate Illustration, Journal of International Money and Finance, Elsevier, 25 (5), August, 719–740.

Imakubo K., Kimura T., Nagano T., (2008), Cross-Currency Transmission of Money Market Tensions, *Bank of Japan Review*, July, 1–11.

Kliber A., Płuciennik P., (2011), An Assessment of Monetary Policy Effectiveness in POLONIA Rate Stabilization During Financial Crisis, *Bank i Kredyt*, 42 (4), 5–30.

Lütkepohl H., (2007), *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer Berlin Heidelberg New York.

McAndrews J., Sarkar A., Wang Z., (2009), *The Effect of the Term Auction Facility on the London InterBank Offered Rate*, Staff Reports, 335, Federal Reserve Bank of New York.

McLeod A. I., Li W. K., (1983), Diagnostic Checking ARMA Time Series Models Using Squared Residual Autocorrelations. *Journal Time Series Analysis*, 4, 269–273.

Nelson D. B., (1990), ARCH Models as Diffusion Approximations, *Journal of Econometrics*, 45, 7–38.

NBP, (2009), *Polska wobec światowego kryzysu gospodarczego*, Warszawa.

Poskitt R., (2011), *Do Liquidity or Credit Effects Explain the Behavior of the LIBOR-OIS Spread?* Department of Accounting and Finance, University of Auckland, New Zealand

Sengupta R., Yu M. T., (2008), The LIBOR-OIS Spread as a Summary Indicator, *Economic Synopses*, 25, Federal Reserve Bank of St. Louis, 1–1.

Schwarz K., (2009), *Mind the Gap: Disentangling Credit and Liquidity in Risk Spreads*, Working Paper of University of Pennsylvania Wharton School of Business.

Soultanaeva A., Strömqvist M., (2009), The Swedish Money Market Risk Premium – Experiences from the Crisis, *Economic Review*, 3, 5–35.

Stelzer R., (2008), On the Relation between the VEC and BEKK Multivariate GARCH Models, *Econometric Theory*, 24, 1131–1136,

Thornton D. L., (2009), What the Libor-OIS Spread Says, *Economic Synopses*, 24, Federal Reserve Bank of St. Louis, 1–2.

Tsay R. S., (2010), *Analysis of Financial Time Series*, Wiley.

CHARAKTERYSTYKA PRZENIKANIA KRYZYSU NA RYNEK MIĘDZYBANKOWY W POLSCE NA PODSTAWIE ANALIZY 3-MIESIĘCZNYCH SPREADÓW WIBOR-OIS ORAZ LIBOR-OIS DLA DOLARA AMERYKAŃSKIEGO I EURO

S t r e s z c z e n i e

Spready pomiędzy stopą procentową LIBOR oraz stawką kontraktu OIS o tym samym terminie zapadalności są dobrym miernikiem kondycji rynku międzybankowego. W niniejszym artykule zostały one wykorzystane celem wyznaczenia kierunków przenikania kryzysu subprime oraz kryzysu zadłużeniowego pomiędzy Stanami Zjednoczonymi, strefą euro i Polską. Analiza została oparta o modele VAR-BEKK oraz wyznaczone za ich pomocą funkcje odpowiedzi na impuls w średniej i wariancji warunkowej.

Słowa kluczowe: modele VAR, modele BEKK, funkcja odpowiedzi na impuls, spready LIBOR-OIS

THE CHARACTERISTICS OF CRISIS TRANSMISSION TO POLISH INTERBANK MARKET ON THE BASIS OF 3-MONTH WIBOR-OIS AND LIBOR-OIS SPREADS FOR AMERICAN DOLLAR AND EURO

A b s t r a c t

Spreads between the LIBOR rate and fixed rate of the OIS contract of the same maturity are good indicators of respective interbank markets condition. In this article their dynamics is used to determine directions of subprime and debt crises transmission among the interbank markets of the United States, the euro zone and Poland. In our analysis we used VAR-BEKK models and determined impulses response in conditional mean and conditional variance processes.

Keywords: VAR models, BEKK models, impulse response function, LIBOR-OIS spread

PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXI – ZESZYT 1 – 2014

MICHAŁ BERNARD PIETRZAK, JUSTYNA ŁAPIŃSKA

ZASTOSOWANIE MODELU GRAWITACJI DO IDENTYFIKACJI CZYNNIKÓW DETERMINUJĄCYCH PRZEPŁYWY HANDLOWE W UNII EUROPEJSKIEJ

1. WSTĘP

Dwie ostatnie dekady były w gospodarce światowej okresem rozkwitu regionalnych ugrupowań integracyjnych. Powstały nowe ugrupowania, a te które już istniały weszły na drogę pogłębiania integracji. U podstaw tych procesów leżą oczekiwania, że integracja stwarza możliwość wzrostu obrotów handlowych, rozszerzenia skali produkcji oraz pozwala na efektywniejszą alokację zasobów gospodarczych. Zgodnie z założeniami teorii integracji gospodarczej, wymiana handlowa z zagranicą jest obszarem, w którym najszybciej i najbardziej wyraźnie można zaobserwować wpływ integracji regionalnej na gospodarki krajów. Na pozytywne efekty handlowe tego typu procesów wskazują liczne badania empiryczne (zob. m.in.: Nilsson, 2000; Greenaway, Milner, 2002; Ghosh, Yamarik, 2004; Szczygielski, Grabowski, 2012).

Od rozszerzenia Unii Europejskiej o nowe kraje minęło dopiero kilka lat. Nie jest to okres długi dla oceny przebiegu procesów integracyjnych, niemniej jednak można już zaobserwować pewne zmiany i nowe tendencje rozwojowe, zarówno w gospodarkach poszczególnych krajów, jak i w całym ugrupowaniu. Po akcesji nowych krajów do Unii Europejskiej[1] wzrosły wzajemne obroty handlowe. Analiza wskaźnikowa oparta na danych statystycznych wskazuje na pozytywne zmiany w czasie, w zakresie wzrostu obrotów handlowych, natomiast pomija przyczyny tych zmian. W artykule podjęto próbę identyfikacji czynników determinujących rozwój bilateralnych obrotów handlowych w krajach Unii Europejskiej w latach 1999–2010. Do oceny siły oraz kierunku wpływu wybranych czynników głównie ekonomicznych zastosowano model grawitacyjny dla danych panelowych.

Za potencjalne determinanty przyjęto odległość geograficzną między krajami członkowskimi Unii Europejskiej, PKB, PKB *per capita* oraz bezpośrednie inwestycje zagraniczne krajów. W badaniu zostały uwzględnione również wskaźniki wolności handlowej (ang. *trade of freedom index*), relatywnej różnicy między PKB krajów oraz

[1] Chodzi o rozszerzenie Unii Europejskiej o nowe kraje z 2004 roku.

relatywnej różnicy między PKB *per capita* partnerów handlowych. Dodatkowo rozpatrzono wpływ przynależności krajów do Unii Europejskiej na wzrost ich wzajemnych obrotów handlowych.

2. MODEL GRAWITACJI HANDLU – WYBRANE ASPEKTY TEORETYCZNE

W analizie międzynarodowych przepływów towarowych model grawitacji został po raz pierwszy wykorzystany ponad pół wieku temu przez holenderskiego ekonomistę i fizyka Tinbergena (1962). Odwołując się do sformułowanego przez Newtona prawa powszechnego ciążenia, zaproponował on grawitacyjny model handlu w postaci opisanej następującym równaniem:

$$T_{ij} = C\frac{PNB_i^{\alpha} PNB_j^{\beta}}{DIST_{ij}^{\delta}}, \tag{1}$$

gdzie: T_{ij} – strumień handlu między krajami *i* oraz *j*, $PNB_{i(j)}$ – produkt narodowy brutto kraju *i (j)*, $DIST_{ij}$ – odległość geograficzna między krajami *i* oraz *j*, α, β, δ – elastyczności handlu względem produktu narodowego brutto krajów oraz odległości między krajami, *C* – stała grawitacyjna.

Zgodnie z powyższym równaniem wielkość dwustronnych obrotów handlowych Tij między krajami i oraz j jest dodatnio skorelowana z wielkością gospodarek obu krajów, wyrażoną poziomem ich produktów narodowych brutto PNB_i oraz PNB_j, a ujemnie z odległością[2] pomiędzy nimi $DIST_{ij}$ (zob. Drzewoszewska, Pietrzak, Wilk, 2013).

W modelach grawitacyjnych handlu ważnym zagadnieniem jest określenie zmiennej objaśnianej, która opisuje „siłę wzajemnego oddziaływania" partnerów handlowych. Może nią być eksport, import lub całkowite obroty bilateralne, będące sumą eksportu oraz importu. Zaletą przyjęcia eksportu, jako zmiennej zależnej jest jego mniejsze zniekształcenie wynikające ze stosowania różnych instrumentów protekcji oraz uwzględnienie w cenach kosztów transportu i ubezpieczenia. Dlatego w wielu pracach empirycznych za zmienną objaśnianą przyjmowany jest eksport (zob. m.in.: Kalirajan, 1999; Egger, 2002; Roberts, 2004). Dość często w pracach empirycznych zmienną objaśnianą są także całkowite obroty dwustronne (zob. m.in.: Tzouvelekas, 2007; Henderson, Millimet, 2008). Tak zdefiniowana zmienna zależna przedstawia całościowe ujęcie handlu dwustronnego, jednakże takie ujęcie wiąże się z problemem dostępności kompletnych danych. Zarówno po stronie eksportu, jak i importu występują pewne braki danych, stąd uwzględnienie obu strumieni handlu może niekiedy

[2] W badaniach ekonomicznych dotyczących obrotów handlowych najczęściej stosowana jest odległość geograficzna między krajami. Alternatywę stanowi zastosowanie odległości ekonomicznej, która również ma istotny wpływ na poziom międzynarodowych przepływów towarowych (zob. Pietrzak, 2010a; Pietrzak, 2010b; Pietrzak, 2012).

powodować ich kumulację (zob. Czarny, Folfas, 2011). W nielicznych pracach (zob. Fukao, Okubo, Stern, 2003; Kandogan, 2005) za zmienną objaśnianą przyjmowane są wartości importu.

Przy konstrukcji modelu grawitacji opisującego relacje międzynarodowe ważną kwestią jest określenie czynników wpływających na siłę przyciągania krajów oraz określenie odległości pomiędzy partnerami handlowymi (zob. Gómez-Herrera, 2013).

Jednym z czynników determinujących obroty handlowe jest wielkość ekonomiczna krajów, która może być mierzona kombinacją PNB i liczby ludności (zob. Linneman, 1966). Po ukazaniu się prac Andersona (1979) i Bergstranda (1985) wyjaśniających teoretyczne podstawy modeli grawitacyjnych, równie często stosowaną w pracach empirycznych miarą wielkości gospodarek krajów jest PKB. W celu lepszego dopasowania modelu do rzeczywistości wielu autorów za zmienną objaśniającą przyjmuje również PKB *per capita* (zob. m.in.: Carrère, 2006; Rahman, 2009). Badania empiryczne potwierdzają bowiem, że obroty handlowe pomiędzy krajami bardziej rozwiniętymi są większe (zob. Head, 2000).

Odległość w modelu newtonowskim wyraża opór, jaki masy muszą pokonać na drodze ku sobie. Jest zatem czynnikiem osłabiającym siłę przyciągania. W modelach handlu międzynarodowego odległość geograficzna odzwierciedla przede wszystkim czas oraz koszty transportu i łączności, które istotnie wpływają na wielkość obrotów handlowych między krajami. Nie jest to jednak jedyny czynnik wpływający na intensywność handlu między parą krajów. Czynnikiem związanym z odległością geograficzną może być także istnienie wspólnej granicy z partnerem handlowym. Kraje posiadające wspólną granicę łatwiej nawiązują kontakty handlowe (zob. Serlenga, Shin, 2004; Ok, 2010).

Czynnikiem, który również wzmacnia bilateralną wymianę handlową jest przynależność partnerów handlowych do regionalnego ugrupowania integracyjnego. Liberalizacja rynku, która jest elementem procesów integracyjnych prowadzi do poprawy efektywności alokacji zasobów w gospodarce (zob. Baldwin, 1994). Wpływ regionalnej integracji gospodarczej na alokację zasobów w gospodarce analizowany jest zwykle za pomocą dwóch efektów – kreacji oraz przesunięcia handlu. Efekt kreacji handlu oznacza powstanie nowych strumieni obrotów handlowych między krajami, które tworzą ugrupowanie integracyjne. Efekt ten ujawnia się w rezultacie wykorzystania różnic w kosztach produkcji i pojawienia się dodatkowych impulsów wymiany między członkami ugrupowania integracyjnego na skutek liberalizacji obrotów handlowych, przy równoległym występowaniu barier w obrotach z krajami trzecimi. Z kolei efekt przesunięcia handlu polega na zastąpieniu dostaw od producentów z krajów nieczłonkowskich dostawami z krajów będących członkami ugrupowania integracyjnego, których konkurencyjność wzrosła na skutek zniesienia barier handlowych.

Modele grawitacji są narzędziem często wykorzystywanym do badań wpływu udziału krajów w regionalnym ugrupowaniu integracyjnym na ich wzajemny handel.

Badania nad efektami tworzenia ugrupowań integracyjnych polegają najczęściej na wprowadzeniu do modelu zmiennych zero-jedynkowych dla wybranych grup krajów i szacowaniu ich istotności. Analizy empiryczne przeprowadzone dla większości ugrupowań integracyjnych wykazały pozytywne efekty handlowe wynikające z procesów regionalizmu (zob. Greenaway, Milner, 2002). Do innych czynników o charakterze jakościowym, które mogą wpływać na bilateralną wymianę między krajami, należą również wspólnota kulturowa, a szczególnie wspólny język, tożsamość narodowa, wspólna tradycja czy historia (zob. Eichengreen, Irwin, 1998).

3. MODEL GRAWITACJI DLA PRZEPŁYWÓW HANDLOWYCH KRAJÓW UNII EUROPEJSKIEJ

W artykule zastosowano model grawitacji dla danych panelowych do analizy czynników determinujących bilateralną wymianę handlową krajów Unii Europejskiej. Za zmienną objaśnianą przyjęto, wartości eksportu krajów Unii Europejskiej w latach 1999–2010. W badaniu uwzględniono 27 krajów, które były członkami Unii Europejskiej w 2010 roku. Za potencjalne zmienne objaśniające przyjęto PKB, PKB *per capita,* skumulowane w czasie wartości bezpośrednich inwestycji zagranicznych[3], wskaźnik wolności handlowej, wskaźnik relatywnej różnicy między PKB krajów członkowskich oraz wskaźnik relatywnej różnicy między PKB *per capita* partnerów handlowych. Uwzględniono także wpływ odległości geograficznej między krajami, którą wyrażono liczbą kilometrów między stolicami handlujących krajów. Dodatkowo zbadano wpływ przynależności krajów do Unii Europejskiej na wzrost obrotów handlowych. Skoncentrowano się na odpowiedzi na pytanie, czy po rozszerzeniu Wspólnoty nastąpił istotny wzrost eksportu z nowych krajów członkowskich (EU-12) do tzw. starych krajów Unii Europejskiej (UE-15) i odwrotnie. W tym celu do modelu wprowadzono zmienne zero-jedynkowe EU_{12}, EU_{15}.

Weryfikacji poddano następujące hipotezy badawcze, dotyczące obrotów handlowych krajów członkowskich Unii Europejskiej:

H1: Przynależność do Unii Europejskiej istotnie wpływa na zwiększenie obrotów handlowych pomiędzy członkami ugrupowania.

H2: Istnieje dodatnio zależność pomiędzy wielkością gospodarek partnerów handlowych, mierzoną rozmiarami PKB a poziomem wzajemnych obrotów handlowych.

H3: Istnieje dodatnia zależność pomiędzy poziomem rozwoju gospodarczego krajów Unii Europejskiej, mierzonego wielkością ich PKB *per capita* a poziomem wzajemnych obrotów handlowych.

[3] Agregacji bezpośrednich inwestycji zagranicznych dla poszczególnych krajów dokonano sumarycznie od 1999 roku do 2010 roku.

H4: Bezpośrednie inwestycje zagraniczne istotnie poprawiają potencjał eksportowy krajów członkowskich. Przyczyniają się one raczej do wzrostu eksportu niż służą zaspokojeniu popytu wewnętrznego.
H5: Poziom tzw. wolności handlowej krajów, który może być zmierzony wskaźnikiem odzwierciedlającym stopień stosowanych barier handlowych, wpływa dodatnio na wielkość wymiany handlowej pomiędzy krajami Unii Europejskiej.
H6: Istnieje ujemna zależność pomiędzy relatywnymi różnicami w wielkości gospodarek partnerów handlowych (mierzonymi rozmiarami PKB) a poziomem wymiany handlowej między członkami Unii Europejskiej.
H7: Relatywne różnice w dochodach *per capita* partnerów handlowych oddziałują ujemnie na poziom wymiany handlowej między członkami Unii Europejskiej.
H8: Istnieje ujemna zależność między odległością geograficzną pomiędzy krajami członkowskimi Unii Europejskiej a wielkością ich wzajemnej wymiany.

Powyższe hipotezy pozwoliły na specyfikację modelu grawitacji dla danych panelowych[4]:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{ijt} &= \boldsymbol{\beta}_{ij} + \boldsymbol{\beta}_{t} + \beta_1\mathbf{GDP}_{it} + \beta_2\mathbf{GDP}_{jt} + \beta_3\mathbf{PCI}_{it} + \beta_4\mathbf{PCI}_{jt} + \beta_5\mathbf{FDI}_{it} + \beta_6\mathbf{FDI}_{jt} + \\ &+ \beta_7\mathbf{TF}_{it} + \beta_8\mathbf{TF}_{jt} + \beta_9\mathbf{DGDP}_{ijt} + \beta_{10}\mathbf{DPCI}_{ijt} + \alpha_1\mathbf{UE}_{12} + \alpha_2\mathbf{UE}_{15} - \gamma\mathbf{DIST}_{ij} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ijt}\,,\end{aligned} \tag{2}$$

gdzie $\mathbf{X}_{ijt}$ jest wektorem wartości zmiennej objaśnianej, $\mathbf{GDP}_{it}$, $\mathbf{GDP}_{jt}$, $\mathbf{PCI}_{it}$, $\mathbf{PCI}_{jt}$, $\mathbf{FDI}_{it}$, $\mathbf{FDI}_{jt}$, $\mathbf{TF}_{it}$, $\mathbf{TF}_{jt}$, $\mathbf{DGDP}_{ijt}$, $\mathbf{DPCI}_{ijt}$, $\mathbf{DIST}_{ij}$ są wektorami wartości zmiennych objaśniających, $\mathbf{EU}_{12}$, $\mathbf{EU}_{15}$ stanowią wektory zmiennych zero-jedynkowych określających przynależność krajów do Unii Europejskiej, $\boldsymbol{\beta}_{ij}$, $\boldsymbol{\beta}_{t}$ są wektorami efektów indywidualnych oraz okresowych[5] modelu panelowego, α_1, α_2, β_1, β_2, β_3, β_4, β_5, β_6, β_7, β_8, β_9, β_{10}, γ są to parametry strukturalne modelu, a $\boldsymbol{\varepsilon}_{ijt}$ stanowi wektor składnika losowego. Opis poszczególnych zmiennych oraz źródła wykorzystanych danych przedstawiono w tabeli 1.

[4] Wszystkie zmienne z wyjątkiem zmiennych zero-jedynkowych wyrażone zostały w logarytmach.

[5] Zastosowanie w modelu panelowym efektów indywidualnych pozwala na opis zmienności wynikającej ze specyfiki poszczególnych obiektów, natomiast efektów czasowych na opis zmienności wszystkich obiektów w czasie.

Tabela 1.

Potencjalne determinanty obrotów handlowych krajów Unii Europejskiej

Symbol	Opis zmiennych
X_{ijt}	Eksport kraju *i* do kraju *j*, w okresie *t* (w mln EUR). Źródło danych: Eurostat http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/international_trade/data/database
GDP_{it}, GDP_{jt}	Produkt Krajowy Brutto kraju eksportera *i* oraz importera *j*, w okresie *t* (w mln EUR). Źródło danych: Eurostat http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/national_accounts/data/database
PCI_{it}, PCI_{jt}	Produkt Krajowy Brutto *per capita* kraju eksportera *i* oraz importera *j*, w okresie *t* (w mln EUR). Źródło danych: Eurostat http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/national_accounts/data/database; http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/population/data/database
FDI_{it}, FDI_{jt}	Skumulowane w czasie bezpośrednie inwestycje zagraniczne dla krajów eksportera *i* oraz importera *j*, w okresie *t* (w mln EUR). Źródło danych: UNCTADSTAT United Nations Conference on Trade and Development http://unctadstat.unctad.org/ReportFolders/reportFolders.aspx
TF_{it}, TF_{jt}	Wskaźnik tzw. wolności handlowej (ang. *trade of freedom index*) kraju eksportera *i* oraz importera *j* w okresie *t*. Wskaźnik ten jest jednym z filarów wolności ekonomicznej. Odzwierciedla poziom tzw. wolności od ceł i barier pozataryfowych. Maksymalna wartość wskaźnika wynosi 100, co oznacza, że kraj odznacza się najwyższym poziomem wolności handlowej. W badaniu uwzględniono fakt, że wskaźnik publikowany w roku *t* skonstruowany jest na podstawie danych dotyczących lat wcześniejszych. Źródło danych: The Heritage Foundation, Wall Street Journal *Index of Economic Freedom* http://www.heritage.org/index/explore
$DGDP_{ijt}$	Wskaźnik relatywnej różnicy w wielkości PKB kraju eksportera *i* oraz importera *j* w okresie *t*. Wartości wskaźnika mierzone są za pomocą wzoru (por. m.in.: Somma 1994, Zhang, Li 2006): $$DGDP_{ijt} = 1 + \frac{[w ln w + (1-w) ln(1-w)]}{ln 2},$$ $$w = \frac{GDP_{it}}{GDP_{it} + GDP_{jt}},$$ gdzie GDP_{it}, GDP_{jt} – produkt krajowy brutto kraju *i* oraz jego partnera handlowego *j* w okresie *t*. Powyższy wskaźnik jest miarą znormalizowaną, przyjmuje wartości z przedziału [0;1]. Jeśli różnice w PKB pomiędzy krajami *i* oraz *j* są duże, wówczas wskaźnik zbliża się do wartości 1. Przy identycznym PKB obu krajów przyjmuje wartość 0.

Symbol	Opis zmiennych
$DPCI_{ijt}$,	Wskaźnik relatywnej różnicy w dochodach PKB *per capita* kraju eksportera *i* oraz importera *j* w okresie *t*. Wartości wskaźnika obliczane są za pomocą wzoru skonstruowanego analogicznie jak w przypadku $DGDP_{ijt}$.
EU_{12}	Zmienna zero-jedynkowa, przyjmuje wartość 1 dla nowych krajów (UE-12) od 2004 r oraz wartość 0 przed 2004 rokiem[1]
EU_{15}	Zmienna zero-jedynkowa, przyjmuje wartość 1 dla starych krajów (UE-15) od 2004 r oraz wartość 0 przed 2004 rokiem
DISTij	Odległość geograficzna pomiędzy stolicami krajów *i* oraz *j* (w tys. km). Źródło danych: Centre D'Etudes Prospectives et D'Informations Internationales, http://www.cepii.fr/anglaisgraph/bdd/distances.htm

* Wartości zmiennych zostały urealnionone.
[1] Dla Rumunii i Bułgarii od 2007 roku.

Źródło: opracowanie własne.

4. IDENTYFIKACJA CZYNNIKÓW DETERMINUJĄCYCH PRZEPŁYWY HANDLOWE KRAJÓW UNII EUROPEJSKIEJ

Interpretacja oddziaływania zmiennych objaśniających w grawitacyjnych modelach handlu jest złożona. Pojawia się bowiem kwestia jednoczesnego oddziaływania dwóch efektów: efektu wypychania przepływów handlowych w przypadku regionów źródeł, czyli eksporterów oraz efektu przyciągania przepływów w przypadku regionów docelowych, czyli importerów. Statystyczna istotność odpowiedniego parametru strukturalnego świadczy o istnieniu efektu wypychania lub efektu przyciągania. Statystyczna nieistotność parametru wskazuje na brak wpływu czynników, które zgodnie z teorią handlu determinują wielkość obrotów handlowych.

Badanie rozpoczęto od przeprowadzenia testu Hausmana, który wskazał na występowanie korelacji między błędami losowymi i zmiennymi objaśniającymi. Estymator panelowego modelu z efektami losowymi (RE) staje się obciążony i niezgodny, przez co preferowana jest estymacja parametrów panelowego modelu z efektami stałymi (FE). W związku z tym rozważone zostały trzy specyfikacje panelowego modelu z efektami stałymi: panelowy model z efektami indywidualnymi, panelowy model z efektami okresowymi, panelowy model z efektami indywidualnymi oraz okresowymi łącznie. Dla kolejnych specyfikacji przeprowadzono test F, który wskazał wyłącznie na istotność efektów indywidualnych. Ostatecznie dokonano więc estymacji panelowego modelu (FE) z efektami indywidualnymi. W procesie estymacji parametrów panelowego modelu grawitacji zastosowany został estymator Hausmana-Taylora. Do obliczeń wykorzystano procedury z pakietu *plm* w ramach oprogramowania R-Cran. W tabeli 2. przedstawiono wyniki estymacji wybranej specyfikacji modelu panelowego.

Tabela 2.

Wyniki estymacji panelowego modelu grawitacji dla przepływów handlowych krajów Unii Europejskiej w latach 1999–2010

Zmienna	Parametr	Ocena	Graniczny poziom istotności
EU_{12}	α_1	0,2225	~0,0001
EU_{15}	α_2	0,1517	0,0039
GDP_{it}	β_1	0,8908	~0,0001
GDP_{jt}	β_2	0,8835	0,0032
PCI_{it}	β_3	0,2648	~0,0001
PCI_{jt}	β_4	0,2283	~0,0001
FDI_{it}	β_5	0,2057	~0,0001
TF_{it}	β_7	0,9363	~0,0001
TF_{jt}	β_8	0,7182	0,0011
$DPCI_{ijt}$	β_{10}	-0,8415	~0,0001
$DIST_{ij}$	γ	-1,4067	~0,0001
Statystyka testu F	52,9249	Graniczny poziom istotności	~0,0001
Statystyka testu Hausmana	7,8776	Graniczny poziom istotności	0,0486
Współczynnik R^2	0,8907	Liczba obserwacji	8424

* Do oceny istotności statystycznej parametrów przyjęto 5% poziom istotności. Parametr β_6 dla zmiennej FDI_{jt} oraz parametr β_9 dla zmiennej $DGDP_{ijt}$ okazały się statystycznie nieistotne.

Źródło: obliczenia własne.

Istotny wzrost obrotów handlowych między krajami UE-12[6] i UE-15 został zaobserwowany już przed formalnym rozszerzeniem Unii Europejskiej. Był on efektem podpisania umów stowarzyszeniowych z krajami kandydującymi. Po formalnym rozszerzeniu Unii Europejskiej nastąpił jednak dalszy wzrost obrotów handlowych między jej starymi członkami, a krajami nowoprzyjętymi. Otrzymane wyniki estymacji modelu grawitacji pozwoliły na weryfikację hipotezy badawczej H1, mówiącej o istotnym, dodatnim wpływie przynależności krajów do Unii Europejskiej na rozwój ich wzajemnych obrotów handlowych. Zarówno parametr α_1, jak i parametr α_2 okazały się statystycznie istotne. Dodatnia ocena parametru α_1 świadczy o istotnym wzroście poziomu eksportu z 12 nowych krajów członkowskich do 15 starych krajów UE w okresie po ich akcesji. Dodatnia ocena parametru α_2 świadczy z kolei o istotnym wzroście poziomu eksportu z 15 starych krajów członkowskich do 12 nowych krajów

[6] UE-12 oznacza 12 państw, które przyjęto do Unii Europejskiej w 2004 i 2007 roku.

UE po rozszerzeniu Wspólnoty. Oznacza to, że po akcesji nowych krajów do Wspólnoty nastąpił istotny wzrost poziomu eksportu zarówno z krajów UE-12 do UE-15, jak i odwrotnie. Na tej podstawie można wnioskować, że dotychczasowa liberalizacja handlu wynikająca z realizacji umów stowarzyszeniowych nie wyczerpała jeszcze możliwości realizowania korzyści wynikających z integracji. Wraz z formalnym przystąpieniem nowych członków do Unii Europejskiej, w dalszym ciągu ujawniał się efekt kreacji handlu, wzrastały bowiem wzajemne obroty handlowe pomiędzy krajami UE-15 a krajami EU-12.

W wyniku formalnego rozszerzenia Unii Europejskiej nie nastąpiły wprawdzie zmiany w zakresie obciążeń celnych, ale zlikwidowano wiele istniejących wcześniej barier pozataryfowych. W ocenie *The Heritage Foundation* formalne rozszerzenie Unii Europejskiej istotnie poprawiło warunki współpracy między starymi krajami Unii i jej nowymi członkami. Odzwierciedlają to m.in. wskaźniki wolności handlowej[7], które informują o poziomie tzw. wolności od ceł i barier pozataryfowych. W przypadku nowych członków, ich wskaźniki wolności handlowej istotnie wzrosły po akcesji, osiągając poziom reprezentowany przez kraje będące członkami przed rozszerzeniem Unii Europejskiej. Parametry β_7 i β_8 wyrażające wpływ tzw. wolności handlowej okazały się statystycznie istotne. Dodatnie oceny parametrów wskazują, że poziom wolności handlowej jest czynnikiem istotnie wspierającym rozwój bilateralnej wymiany handlowej. Pozwala to na weryfikację hipotezy H5, dotyczącej zależności, jakie występują pomiędzy stopniem stosowanych barier handlowych a wielkością wymiany handlowej pomiędzy krajami Unii Europejskiej.

Wielkość obrotów handlowych zależy również od mierzonej rozmiarami PKB wielkości gospodarek krajów prowadzących wymianę. Analizując uzyskane wyniki należy stwierdzić, że obydwa parametry β_1 oraz β_2 okazały się statystycznie istotne. Dodatnie oceny parametrów świadczą o dodatnim wpływie poziomu PKB, zarówno na wielkość ekportu, jak i importu między krajami członkowskimi Unii Europejskiej. Uzyskane wyniki pozwalają na weryfikację hipotezy H2, mówiącej o dodatniej zależności pomiędzy wielkością gospodarek partnerów handlowych, mierzoną rozmiarami PKB a poziomem wzajemnych obrotów handlowych. Zbadano również, czy różnice w wielkości gospodarek partnerów handlowych są czynnikiem istotnie wpływającym na rozwój bilateralnej wymiany handlowej. Na podstawie wyników estymacji panelowego modelu grawitacji stwierdzono, że parametr β_9 okazał się statystycznie nieistotny. Hipoteza badawcza H6, zakładająca istnienie dodatniej zależności pomiędzy relatywnymi różnicami w wielkości gospodarek a poziomem wymiany handlowej między członkami UE nie potwierdziła się.

Estymacja parametrów modelu grawitacji pozwoliła na zbadanie wpływu oddziaływania na wielkość obrotów handlowych poziomu PKB *per capita* krajów

[7] Wskaźniki wolności handlowej dla poszczególnych krajów publikowane są w raporcie *Index of Economic Freedom,* opracowywanym corocznie przez *The Heritage Foundation* we współpracy z *Wall Street Journal*.

członkowskich, który może być utożsamiany z poziomem ich rozwoju gospodarczego. Należy stwierdzić, że wyniki oszacowania parametrów β_3 oraz β_4 świadczą o istotnym wpływie tej determinanty. Biorąc pod uwagę dodatnią ocenę parametru β_3 można sformułować wniosek, że dla krajów eksportujących zachodzi dodatni wpływ wzrostu PKB *per capita* na wielkość ich eksportu. Również w przypadku krajów importujących dodatnia ocena parametru β_4 oznacza dodatni wpływ poziomu rozwoju gospodarczego na wartość importu tych krajów. Gospodarki wysokorozwinięte charakteryzują się wyższym poziomem innowacyjności. Ułatwia to wprowadzanie i rozwój nowych, bardziej konkurencyjnych produktów, co z kolei sprzyja rozwojowi wymiany handlowej. Ponadto w krajach bogatych o znacznym PKB *per capita* koszyk dóbr wchodzący w skład popytu reprezentatywnego jest bardziej zróżnicowany i nowoczesny, co dodatkowo wzmacnia wymianę handlową między krajami. Uzyskane wyniki pozwalają zatem na weryfikację hipotezy H3, mówiącej o dodatniej zależności pomiędzy poziomem rozwoju gospodarczego krajów członkowskich Unii Europejskiej a wielkością ich wzajemnej wymiany handlowej.

Niewielkie różnice między *PKB per capita* partnerów handlowych mogą informować o zbliżonych preferencjach konsumpcyjnych nabywców w tych krajach. Taka interpretacja nawiązuje do stworzonej przez Lindera (1961) koncepcji podobieństwa preferencji, zgodnie z którą intensywność i struktura handlu zależą głównie od stopnia podobieństwa krajów. W wyniku estymacji otrzymano ujemną ocenę parametru β_{10}, który okazał się statystycznie istotny. Parametr ten odzwierciedla wpływ różnic w poziomie rozwoju gospodarek na wymianę handlową. Otrzymany wynik pozwolił na weryfikację hipotezy badawczej H7, w której założono, że znaczne różnice w PKB *per capita* partnerów handlowych istotnie osłabiają wzajemną wymianę handlową.

Bezpośrednie inwestycje zagraniczne należą do grupy determinant handlu, które mogą mieć różny wpływ na rozwój obrotów handlowych pomiędzy krajami. Z jednej strony napływ kapitału w postaci bezpośrednich inwestycji zagranicznych może doprowadzić do technologicznego unowocześnienia gospodarki, które wiąże się z rozwojem przemysłu i produkcji dóbr przetworzonych, co z kolei sprzyja rozwojowi handlu. Z drugiej strony, bezpośrednie inwestycje zagraniczne, mogą być motywowane chęcią obsługi rynku kraju przyjmującego kapitał, wówczas stają się substytutem handlu (Amiti, Greenaway, Wakelin 2000). W przypadku bezpośrednich inwestycji zagranicznych parametr β_5 okazał się statystycznie istotny, a parametr β_6 statystycznie nieistotny. Dodatnia ocena parametru β_5 wskazuje na dodatni wpływ bezpośrednich inwestycji zagranicznych *per capita* na wzrost wartości eksportu. Otrzymany wynik pozwala więc na weryfikację postawionej w pracy hipotezy badawczej H4, mówiącej o tym, że bezpośrednie inwestycje zagraniczne poprawiają przede wszystkim potencjał eksportowy krajów w ilościowym, jak i w jakościowym wymiarze. Nieistotny statystycznie parametr β_6 świadczy o braku istotnego wpływu bezpośrednich inwestycji zagranicznych *per capita* na wielkość importu.

Jednym z najważniejszych czynników ograniczających rozwój wymiany handlowej jest odległość geograficzna. Jej wpływ jest w głównej mierze związany ze

wzrostem kosztów transportu dóbr podlegających wymianie. Parametr γ, mierzący wpływ odległości pomiędzy poszczególnymi krajami Unii Europejskiej na wielkość ich bilateralnej wymiany handlowej, okazał się statystycznie istotny. Ujemna ocena parametru zgodna jest z przewidywaniami teorii i wskazuje na zmniejszanie się wielkości handlu wraz ze wzrostem odległości geograficznej między krajami. Uzyskany wynik pozwolił zatem na weryfikację hipotezy H8.

5. PODSUMOWANIE

Jednym z przejawów współpracy krajów jest tworzenie regionalnych ugrupowań integracyjnych. Współpraca w ramach ugrupowania przekłada się na wzrost wzajemnych obrotów handlowych krajów członkowskich. Rzeczywisty rozwój wymiany handlowej pomiędzy krajami jest istotnym argumentem przemawiającym za tworzeniem regionalnych ugrupowań integracyjnych oraz ich rozszerzaniem. W artykule przeprowadzono analizę wpływu czynników determinujących bilateralną wymianę handlową krajów będących członkami Unii Europejskiej.

W wyniku przeprowadzonej estymacji parametrów modelu grawitacji dokonano identyfikacji czynników istotnie determinujących poziom obrotów handlowych pomiędzy krajami Unii Europejskiej. Stwierdzono istotny wpływ wielkości gospodarek krajów członkowskich (mierzonej wielkością PKB), poziomu ich rozwoju gospodarczego (mierzonego PKB *per capita*) oraz znacznych różnic w poziomie rozwoju gospodarczego pomiędzy partnerami handlowymi na poziom ich wzajemnej wymiany handlowej. Ważnym czynnikiem, sprzyjającym rozwojowi obrotów handlowych między członkami Wspólnoty, okazały się bezpośrednie inwestycje zagraniczne oraz poziom tzw. wolności handlowej krajów. W przypadku bezpośrednich inwestycji zagranicznych stwierdzono, iż wpływają one na poprawę potencjału eksportowego krajów członkowskich. Potwierdzono także istnienie ujemnej zależności między odległością geograficzną krajów a wielkością ich wzajemnej wymiany. Zrealizowane badanie pozwoliło również na wyciągnięcie wniosku, że po rozszerzeniu Unii Europejskiej o nowe kraje nastąpił istotny wzrost eksportu, zarówno z krajów UE-12 do krajów UE-15, jak i odwrotnie.

Rozszerzenie Unii Europejskiej o nowe kraje miało pozytywny wpływ na rozwój obrotów handlowych pomiędzy krajami członkowskimi. Sformułowane w artykule wnioski pozwalają stwierdzić, iż z punktu widzenia możliwości zwiększania obrotów handlowych, Unia Europejska jest ugrupowaniem, do którego warto należeć. Korzyści odnoszą bowiem zarówno dotychczasowi członkowie, jak i kraje przystępujące do ugrupowania.

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

LITERATURA

Anderson J. E., (1979), A Theoretical Foundation for the Gravity Equation, *American Economic Review*, 69 (1), 106–116.

Amiti M., Greenaway D., Wakelin K., (2000), *Foreign Direct Investment and Trade: Substitutes or Complements?*, http://dev3.cepr.org/meets/wkcn/2/2290/papers/amiti.pdf.

Baldwin R. E., (1994), *Towards an Integrated Europe*, Centre for Economic Policy Research CEPR, London.

Bergstrand J. H., (1985), The Gravity Equation in International Trade: Some Microeconomic Foundations and Empirical Evidence, *Review of Economics and Statistics*, 67 (3), 474–481.

Carrère C., (2006), Revisiting the Effects of Regional Trade Agreements on Trade Flows with Proper Specification of the Gravity Model, *European Economic Review*, 50 (2), 223–247.

Czarny E., Folfas P., (2011), *Modele grawitacji jako narzędzie analityczne w ekonomii międzynarodowej*, w: Zieliński Z. E. (red.), *Rola informatyki w naukach ekonomicznych i społecznych. Innowacje i implikacje interdyscyplinarne*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Handlowej, Kielce, t. 2, 146–156.

Drzewoszewska N., Pietrzak M. B., Wilk J., (2013), Grawitacyjny model przepływów handlowych między krajami Unii Europejskiej w dobie globalizacji, *Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych*, 30,187–202.

Egger P., (2002), An Econometric View on the Estimation of Gravity Models and the Calculation of Trade Potentials, *World Economy*, 25 (2), 297–312.

Eichengreen B., Irwin D., (1998), *The Role of History in Bilateral Flows*, w: Frankel J. A. (red.), *The Regionalization of the World Economy*, University of Chicago Press.

Fukao K., Okubo T., Stern R. M., (2003), An Econometric Analysis of Trade Diversion under NAFTA, *North American Journal of Economics and Finance*, 14 (1), 3–24.

Ghosh, S., Yamarik, S., (2004), Are Preferential Trade Agreements Trade Creating? An Application of Extreme Bounds Analysis, *Journal of International Economics*, 63, 369–395.

Gómez-Herrera E., (2013), Comparing Alternative Methods to Estimate Gravity models of Bilateral Trade, *Empirical Economics*, 44 (3), 1087–1111.

Greenaway D., Milner C., (2002), Regionalism and Gravity, *Scottish Journal of Political Economy*, 49 (5), 574–585.

Head K., (2000), *Gravity for Beginners*, http://pacific.commerce.ubc.ca/keith/gravity.pdf.

Henderson D.J., Millimet D. L., (2008), Is Gravity Linear, *Journal of Applied Econometrics*, 23 (2), 137–172.

Kalirajan K., (1999), Stochastic Varying Coefficients Gravity Model: An Application in Trade Analysis, *Journal of Applied Statistics*, 26 (2), 185–193.

Kandogan Y., (2005), *Evidence for the Natural Trade Partners Theory from the Euro-Mediterranean Region*, Working Paper Series No. 2005-01, University of Michigan-Flint School of Management.

Linder S. B., (1961), *An Essay on Trade and Transformation*, John Wiley&Sons Ltd, Stockholm.

Linneman H., (1966), *An Econometric Study of International Trade Flows*, North-Holland, Amsterdam.

Nilsson L., (2000), Trade Integration and the EU Economic Membership Criteria, *European Journal of Political Economy*, 16, 807–827.

Ok S. T., (2010), What Determines Intra-EU Trade? The Gravity Model Revisited, *International Research Journal of Finance and Economics*, 39, 245–250.

Pietrzak M. B., (2010a), Dwuetapowa procedura budowy przestrzennej macierzy wag z uwzględnieniem odległości ekonomicznej, *Oeconomia Copernicana*, nr 1, 65–78.

Pietrzak M. B., (2010b), Wykorzystanie odległości ekonomicznej w przestrzennej analizie stopy bezrobocia dla Polski, *Oeconomia Copernicana*, nr 1, 79–98.

Pietrzak M. B., (2012), *Wykorzystanie odległości ekonomicznej w przestrzennych analizach procesów ekonomicznych*, w: Pawełek B., (red.), *Modelowanie i prognozowanie zjawisk społeczno-gospodarczych. Aktualny stan i perspektywy rozwoju*, Wyd. UE w Krakowie, Kraków, 96–106.

Rahman, M. M., (2009) *Australia's global trade potential: evidence from the gravity model analysis.* w: 2009 Oxford Business and Economics Conference, 24–26.06.2009, Oxford.

Roberts B. A., (2004), A Gravity Study of the Proposed China-ASEAN Free Trade Area, *The International Trade Journal*, 18 (4), 335–353.

Serlenga L., Shin Y., (2004), *Gravity Models of the Intra-EU Trade: Application of the Hausman-Taylor Estimation in Heterogeneous Panels with Common Time-specific Factors*, http://www.dse.uniba.it/Convegni/incontro_cnr_2004/Serlenga_gravity.pdf.

Szczygielski K., Grabowski W., (2012), Are Unit Export Values Correct Measures of Quality, *Economic Modeling*, 28, 1189–1196.

Tinbergen J., (1962), *Shaping the World Economy: Suggestions for an International Economic Policy*, The Twentieth Century Fund, New York.

Tzouvelekas V., (2007), Accounting for Pairwise Heterogeneity in Bilateral Trade Flows: Stochastic Varying Coefficient Gravity Model, *Applied Economics Letters*, 14 (12), 927–930.

ZASTOSOWANIE MODELU GRAWITACJI DO IDENTYFIKACJI CZYNNIKÓW DETERMINUJĄCYCH PRZEPŁYWY HANDLOWE W UNII EUROPEJSKIEJ

Streszczenie

W artykule dokonano identyfikacji czynników determinujących poziom obrotów handlowych pomiędzy krajami Unii Europejskiej. Zastosowano w tym celu model grawitacji dla danych panelowych. Badanie pozwoliło stwierdzić, że istotny wpływ na poziom wzajemnych obrotów handlowych pomiędzy krajami Unii Europejskiej mają: wielkości gospodarek krajów członkowskich, poziom rozwoju gospodarczego krajów, bezpośrednie inwestycje zagraniczne, poziom tzw. wolności handlowej krajów oraz znaczne relatywne różnice w poziomie rozwoju gospodarczego pomiędzy partnerami handlowymi. Potwierdzono także istnienie ujemnej zależności między odległością geograficzną krajów a wielkością ich wzajemnej wymiany. Stwierdzono również, że po rozszerzeniu Unii Europejskiej o nowe kraje nastąpił istotny wzrost eksportu, zarówno z krajów EU-12 do krajów UE-15, jak i odwrotnie

Słowa kluczowe: handel międzynarodowy, Unia Europejska, model grawitacji

THE USE OF GRAVITY MODELS IN THE IDENTIFICATION OF THE FACTORS DETERMINIG TRADE FLOWS IN THE EUROPEAN UNION

Abstract

The article analyzes the impact of potential determinants on the level of trade volume between the member states of the European Union. As a result of the use of gravity model for panel data the identification of a significant impact of the size of the economies of the member states, their level of economic development, foreign direct investment, the level of the so-called trade freedom of countries and of significant differences in the level of economic development between trading partners on the level of their bilateral trade. Also, it confirmed the existence of a negative relationship between the geographical distance and the size of the countries and their mutual exchange and a significant increase in the level of exports, both from the EU-12 to EU-15, and vice versa.

Keywords: international trade, the European Union, a gravity model

PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXI – ZESZYT 1 – 2014

AGATA ŻÓŁTASZEK

EFEKTYWNOŚĆ I KONKURENCYJNOŚĆ SYSTEMÓW OPIEKI ZDROWOTNEJ KRAJÓW UNII EUROPEJSKIEJ

1. WPROWADZENIE

Sektor ochrony zdrowia jest kluczowym działem gospodarki każdego państwa i ze względów medycznych, społecznych i ekonomicznych, wzbudza bezpośrednie zainteresowanie obywateli, instytucji publicznych i prywatnych, a także rządu. Jednocześnie jest jednym z bardziej zróżnicowanych działów gospodarki. Dywersyfikacja ta uwarunkowana jest aspektami historycznymi, kulturowymi, legislacyjnymi, technologicznymi i finansowymi kształtowania się oraz funkcjonowania systemów zdrowotnych. Prowadzone badania wskazują, że poziom rozwoju gospodarczego i umiejscowienie geograficzne nie stanowią istotnego czynnika grupującego kraje o podobnych systemach ochrony zdrowia. W rezultacie prowadzenie analiz mających za zadanie opisanie, zrozumienie i porównanie funkcjonujących rozwiązań jest bardzo trudne. Coraz częściej w badaniach wykorzystuje się informację o systemach zdrowotnych w tzw. *benchmarkingu*[1], który opiera się na zasadzie „równać do najlepszych". Idea ulepszania poprzez „podpatrywanie" konkurentów znana jest i stosowana od dawna. W przypadku tak skomplikowanych jednostek porównań jakimi są państwa i ich heterogeniczne sektory ochrony zdrowia znalezienie odpowiednich „wzorców" do naśladowania może wpłynąć na poprawę jakości usług medycznych w kraju. Badania wykazały, że właściwe zastosowanie technik porównawczych i aplikacja ich wyników, w większości wypadków, wpływa na wzrost efektywności i konkurencyjności (Bendell, Boulter 2000; Bramham 2004; Węgrzyn 2000). Kluczem do efektywnego benchmarkingu jest jednak wyznaczenie dobrego punktu odniesienia (tzw. benchmarku, wzorca, lidera), który zależy od doboru jednostek do pomiaru porównawczego oraz wyboru metody umożliwiającej ocenę funkcjonowania sektora ochrony zdrowia i wskazanie potencjalnych benchmarków (wzorców). Do takich metod należy Graniczna Analiza Danych (ang. *Data Envelopment Analysis*, DEA). Służy ona ocenie efektywności obiektów badania na podstawie analizy kluczowych

[1] „Benchmarking to ustalenie z pomocą rygorystycznego i systematycznego pomiaru pewnego punktu odniesienia, który służy do mierzenia efektywności" – definicja według Oxford English Dictionary, 1994.

nakładów i efektów ich funkcjonowania. W zależności od konstrukcji badania metodą DEA można analizować efektywność:

- alokacyjną, która oznacza właściwe rozdysponowanie posiadanych, ograniczonych zasobów pomiędzy jednostki tak, by przyznać największe ich ilości tym produktom i usługom, które są najbardziej pożądane przez klientów;
- techniczną, która skupia się na relacji wielkości nakładów i wyników poprzez optymalizację technologii produkcji możliwej do osiągnięcia przez instytucję w danych warunkach;
- ekonomiczną, która dąży do maksymalizacji zysku lub minimalizacji kosztów, uwzględniając ceny rynkowe nakładów i efektów;

poprzez minimalizacje nakładów przy danym poziomie efektów lub maksymalizację efektów przy określonych nakładach (Żółtaszek, 2008).

Metoda DEA to podejście nieparametryczne nie wymagające kwantyfikacji postaci zależności pomiędzy zmiennymi nakładów i wyników, w którym każdy z obiektów poddawany jest oddzielnej analizie. Pozwala ona na badanie efektywności technicznej N obiektów, zwanych również DMU (ang. *Decision Making Unit*), pod względem M nakładów i S efektów. W rezultacie wyznaczane są (1) współczynniki efektywności pozwalające sklasyfikować wszystkie obiekty jako relatywnie (w odniesieniu do innych jednostek badania) efektywne lub nie, i (2) źródła nieefektywności. Ponadto metoda DEA nie stawia ograniczeń co do charakteru zmiennych, zatem nakłady i wyniki mogą być wyrażone na skali pomiarowej porządkowej, przedziałowej lub ilorazowej oraz mieć charakter absolutny lub względny, wyrażony w dowolnych jednostkach.

Celem artykułu jest analiza efektywności technicznej oraz pośrednio także konkurencyjności systemów opieki zdrowotnej w krajach Unii Europejskiej. Do badania zastosowano optymalizacyjną metodę Granicznej Analizy Danych (DEA). W prowadzonym badaniu uwzględnione zostały zmienne dwóch nakładów (liczba lekarzy, wydatki publiczne na opiekę zdrowotną) oraz dwóch wyników (odsetek populacji, której popyt na badania specjalistyczne i usługi medyczne został zaspokojony, oczekiwana dalsza długość trwania życia). Uzyskane rezultaty powinny okazać się skuteczne w ocenie efektywności i konkurencyjności zróżnicowanych systemów opieki zdrowotnej w krajach Unii Europejskiej oraz wskazać potencjalne możliwości poprawy sytuacji w państwach o nieefektywnym i niekonkurencyjnym sektorze ochrony zdrowia.

2. SYSTEMY OCHRONY ZDROWIA W PAŃSTWACH UE

W rozumieniu Światowej Organizacji Zdrowia (ang. *World Health Organization*, WHO) zdrowie to całkowity brak choroby i kalectwa oraz stan dobrostanu fizycznego, umysłowego i społecznego. Jest ono dobrem bezcennym dla każdego człowieka, jednak związane z nim świadczenia mają wartość rynkową. System ochrony zdrowia to ogół zorganizowanych działań zapewniających społeczeństwu opiekę zdrowotną ludności. Świadczenia profilaktyczno-lecznicze i rehabilitacyjne realizowane są z wyko-

rzystaniem zasobów finansowych, materialnych i norm prawnych (Nojszewska, 2011; Suchecka, 1998). Bardzo istotnym elementem istniejących systemów jest sposób finasowania opieki zdrowotnej. Usługi medyczne mogą być pokrywane z dwóch podstawowych źródeł: publicznych i prywatnych. Finansowanie publiczne pochodzi głównie z podatków krajowych i lokalnych oraz z obowiązkowych ubezpieczeń zdrowotnych, czasami zarządzanych przez prywatne firmy ubezpieczeniowe. Zazwyczaj przepisy określają, które usługi medyczne opłacane są z funduszy publicznych. W odczuciu obywateli zakres opieki zdrowotnej finansowanej publicznie jest darmowy. Finansowanie prywatne pokrywane jest przez podmioty prywatne, tzn. gospodarstwa domowe i przedsiębiorstwa, w postaci wydatków: pośrednich i bezpośrednich. Finansowanie pośrednie oparte jest na dobrowolnych ubezpieczeniach zdrowotnych, opłacanych przez gospodarstwa lub pracodawców, często za pośrednictwem prywatnych firm ubezpieczeniowych. Finansowanie bezpośrednie dokonywane jest przez gospodarstwa domowe bez pośredników „z kieszeni". Dotyczy to opłat za usługi, lekarstwa, ale często również nieoficjalnych (np. „wyrazów wdzięczności"). Takie formy finansowania są najsilniej odczuwalne przez płatników i wpływają na ich sytuację gospodarczą. Wydatki bezpośrednie nie mają pozoru „darmowości", ponadto, w przeciwieństwie do form pośrednich, nie zawsze są regularne i łatwe do przewidzenia (Suchecka, Żółtaszek, 2011; Żółtaszek, Jewczak, 2011).

Państwa członkowskie Unii Europejskiej mimo bliskości geograficznej i ekonomicznej oraz podobieństw historycznych i prawnych są silnie zróżnicowane pod względem funkcjonowania i finansowania systemów ochrony zdrowia. W Holandii w ostatnich latach przeprowadzono reformę służby zdrowia i obecny system uznawany jest przez ekspertów za jeden z najlepszych na świecie. Po wprowadzeniu zmian w 2006 r., holenderski system jest dualny i finansowany ze źródeł prywatnych pośrednich. Koszyk podstawowych świadczeń opłacany jest z obowiązkowych ubezpieczeń zdrowotnych, zarządzanych przez prywatne firmy ubezpieczeniowe. Osoby, których nie stać na ubezpieczenie, otrzymują dodatkowe fundusze na opłaty. Niestety system ten nie jest idealny. Brak finansowania publicznego uniemożliwia kontrolowanie i regulowanie wysokości składek ubezpieczeniowych wykazujących się tendencją wzrostową. Oznacza to często niemożność zarządzania kosztami oraz straty finansowe firm ubezpieczeniowych (www.minvws.nl; Wynand van de Ven, Schut, 2008, Euro Health, 2013).

W przeciwieństwie do holenderskiego w Grecji system zdrowotny jest silnie scentralizowany i podlega Ministerstwu Zdrowia. Finansowany jest ze źródeł publicznych i pośrednich prywatnych (ok. 40%), a składki są obowiązkowe. Szpitale są utrzymywane głównie przez państwo, a opieka ambulatoryjna z wydatków prywatnych pośrednich. Opieka specjalistyczna i szpitalna, zapewniana przez Narodową Służbę Zdrowia, jest dosyć słabo rozwinięta, częściowo ze względu na niskie płace oraz ograniczony dostęp do szkoleń. Finansowanie bezpośrednie istnieje w Grecji, ale stanowi niewielki udział w ogólnym poziomie wydatkowania (Health Care Systems in Transition, Greece 1996). Jednak w ostatnich latach całkowite wydatki per capita

na ochronę zdrowia drastycznie zmalały (o 28% w 2011 w porównaniu do 2009), pomimo największej w Europie liczby lekarzy (Euro Health, 2013).

W Polsce i krajach ościennych, jak Czechy, Słowacja, system zdrowotny opiera się na finansowaniu publicznym, pochodzącym z obowiązkowych ubezpieczeń. Dopiero kilka lat temu na rynku pojawiła się oferta ubezpieczeń dodatkowych, głównie opłacanych przez pracodawców. Wydatki prywatne pośrednie nie przekraczają jednak kilku procent ogółu wydatków na ochronę zdrowia. Stosunkowo wysoki udział stanowi finansowanie bezpośrednie, ok. 24%. Prowadzone badania wskazują, że 30% ogółu wydatków na ochronę zdrowia pochodzi od gospodarstw domowych. Udział ten jest jednym z wyższych w Europie. Jednocześnie dostępność i jakość usług medycznych w wielu placówkach pozostawia wiele do życzenia, co świadczy o niskiej efektywności sektora ochrony zdrowia (RAPORT Finansowanie ochrony, 2008, Golinowska, 2012).

Analiza systemów ochrony zdrowia w krajach członkowskich UE nie wskakuje na istnienie jednoznacznego klucza grupującego. Kraje wysoko-, średnio- i niskorozwinięte mogą tworzyć najróżniejsze rozwiązania, oparte na współfinansowaniu i prywatnych ubezpieczeniach zdrowotnych, a jednocześnie pozostawać nieefektywne, podobnie jak systemy opłacane z budżetów państw. Prowadzenie precyzyjnych porównań sektorów zdrowia jest utrudnione ze względu na zróżnicowanie polityczne, ideologiczne, prawne, społeczne i ekonomiczne. Równocześnie mnogość funkcjonujących rozwiązań może okazać się bardzo przydatna w ocenie efektywności i konkurencyjności systemów ochrony zdrowia oraz wskazaniu potencjalnych benchmarków dla ewentualnych reform.

3. METODA GRANICZNEJ ANALIZY DANYCH DEA

Nieparametryczna Metoda Granicznej Analizy Danych (DEA) ukierunkowana jest na pomiar efektywności jednostek decyzyjnych DMU (Decision Making Unit), a w dalszej kolejności do oceny efektów skali i zakresu produkcji. Koncepcja tej metody uwzględnia występowanie wielu nakładów, które służą wyprodukowaniu wielu wyników. Podstawą metody DEA stały się badania brytyjskiego ekonomisty Farrell'a. Wskazał on na duże znaczenie analizy efektywności w gospodarce oraz zaproponował koncepcję *best practice frontier*, tzn. granicy opartej na jednostkach „zachowujących" się najlepiej. Granica ta, zwana także granicą efektywności lub produkcji, stanowi technologiczną granicę możliwości produkcyjnych danego obiektu badania. Pozwala ona wyznaczyć spośród wszystkich badanych jednostek te, które osiągają maksymalny, możliwy dla nich, poziom produkcji oraz tych, dla których proces produkcyjny jest nieefektywny (Farrell, 1957). Uogólnienie analizy jednonakładowej i jednoefektowej Farrell'a na podejście wielonakładowe i wielowynikowe, zaprezentowano w modelu CCR (Charnes, Cooper, Rhodes) wykorzystującym metody optymalizacyjne programowania matematycznego (Charnes, Cooper, Rhodes, 1978).

Badanie metodą DEA podzielić można na trzy podstawowe etapy:

- Etap 1: *zdefiniowanie i dobór jednostek decyzyjnych*- polega na określeniu homogenicznych jednostek decyzyjnych, co do rodzaju i liczby, mających analogiczne nakłady i wyniki oraz podobny cel;
- Etap 2: *wybór zmiennych*- opiera się na stworzeniu listy kluczowych czynników związanych z efektywnością jednostek;
- Etap 3: w*ybór modelu, obliczenia i interpretacja*- stanowi istotę metody DEA.

Głównym kryterium doboru właściwego modelu (etap 3) jest orientacja, która określa funkcję celu i ograniczenia zadania optymalizacyjnego. W modelu zorientowanym na nakłady celem jest minimalizacja nakładów przy zadanym poziomie wyników, zaś w przypadku orientacji na wyniki – maksymalizacja rezultatów przy określonym poziomie nakładów. Wybór kierunku optymalizacji zależy zazwyczaj od celów jednostek DMU oraz możliwości bezpośredniego kontrolowania wielkości ich nakładów i wyników (Schefczyk, 1996). Kiedy sytuacja obiektów badania nie jest jednoznaczna można zastosować modele niezorientowane, które nie dają jednak równie szerokiego pola do interpretacji rezultatów badania. Wybór orientacji w znacznym stopniu determinuje określenie źródeł nieefektywności, które mogą posłużyć do poprawienia efektywności oraz do wykorzystania w pomiarze porównawczym (Gospodarowicz, 2000; Golany, Roll, 1989).

Metoda DEA pozwala analizować efektywność N obiektów, zwanych jednostkami decyzyjnymi (DMU), pod względem M nakładów i S efektów. Zatem:

DMU_k – k-ta jednostka decyzyjna (DMU), $k = 1, \ldots, N$,

y_{rk} – r-ty wynik dla k-tej jednostki, $r = 1, \ldots, S$,

x_{ik} – i-ty nakład dla k-tej jednostki, $i = 1, \ldots, M$.

Model metody DEA pokazuje jak wektor nakładów ($\mathbf{x}_k$) zostaje zamieniony na wektor efektów ($\mathbf{y}_k$). Przy czym zakłada się, że wielkości nakładów i efektów są nieujemne i przynajmniej jeden efekt i jeden nakład danej DMU są dodatnie (Gospodarowicz, 2002). Dla każdego z N obiektów konstruuje się zadanie optymalizacyjne, którego celem jest wyznaczenie maksymalnej wartości efektywności ze względu na parametry μ_{rk}, ϑ_{rk} (1) przy zbiorze ograniczeń (2 i 3) dla każdej z DMU osobno tzn.:

$$\max_{\mu,\vartheta} \frac{\sum_1^S \mu_{rk} \cdot y_{rk}}{\sum_1^M \vartheta_{ik} \cdot x_{ik}}, \tag{1}$$

$$\frac{\sum_1^S \mu_{rk} \cdot y_{rj}}{\sum_1^M \vartheta_{ik} \cdot x_{ij}} \leq 1, \tag{2}$$

$$\mu_{rk} \geq 0, \quad \vartheta_{ik}, \geq 0, \tag{3}$$

$$j,k = 1, \ldots, N; \;\; r = 1, \ldots, S; \;\; i = 1, \ldots, M, \tag{4}$$

μ_{rk}, ϑ_{rk} – parametry (wagi, mnożniki) wyznaczane są dla każdej DMU tak, by maksymalizować jej efektywność.

Następnie zaś zbiór wszystkich DMU zostaje podzielony na podzbiór efektywnych i nieefektywnych jednostek. Podzbiór jednostek efektywnych, wraz z kombinacjami liniowymi ich nakładów i efektów, tworzy krzywą nazywaną granicą efektywności badanego zbioru. Jednostki nieefektywne znajdują się poniżej tak wyznaczonej krzywej. Warto zauważyć, że jednostki efektywne są także paretooptymalne. Wyniki N zadań optymalizacyjnych zwracają dla każdej DMU współczynnik efektywności (Θ) oraz wektory zmiennych swobodnych wszystkich nakładów (s^-) i efektów (s^+). Współczynnik Θ dla modeli zorientowanych na nakłady przyjmuje wartości z przedziału [0;1] i informuje, w jakim stopniu nakłady zostają przetworzone na wyniki oraz sugeruje, jaka proporcjonalna redukcja nakładów jest konieczna do osiągnięcia wzrostu efektywności. W przypadku kiedy $\Theta = 1$, badana DMU jest efektywna, nakłady są w 100% zamieniane na wyniki, a zatem redukcja ich nie jest potrzebna. Kiedy współczynnik efektywności jest mniejszy od 1, jednostka nie należy do podzbioru jednostek efektywnych. Oznacza to, że tylko $\Theta \cdot 100\%$ nakładów przekłada się na wyniki, zaś $(1-\Theta) \cdot 100\%$ zostaje zmarnowana. Analogicznie w modelach zorientowanych na wyniki współczynnik efektywności przyjmuje wartość z przedziału $[1;+\infty)$. Kiedy $\Theta = 1$, badana DMU jest efektywna, osiągane 100% wyników przy zadanych nakładach. Jeżeli $\Theta > 1$, to $(\Theta-1) \cdot 100\%$ możliwych efektów nie jest generowanych i można je podnieść proporcjonalnie. Zmienne swobodne, niezależnie od orientacji modelu, oznaczają, że poza proporcjonalną zmianą wszystkich nakładów lub efektów konieczne jest dodatkowe obniżenie poszczególnych nakładów i podwyższenie wyników. W rezultacie optymalny punkt na granicy efektywności będący projekcją dowolnej DMU ma postać:

$$\text{dla modeli zorientowanych na nakład } (\Theta \cdot \mathbf{x}_k - \mathbf{s}^-;\ \mathbf{y}_k + \mathbf{s}^+), \tag{5}$$

$$\text{dla modeli zorientowanych na wynik } (\mathbf{x}_k - \mathbf{s}^-;\ \Theta \cdot \mathbf{y}_k + \mathbf{s}^+). \tag{6}$$

4. BADANIE EFEKTYWNOŚCI TECHNICZNEJ SYSTEMÓW OCHRONY ZDROWIA W PAŃSTWACH UE METODĄ DEA

4.1 NAKŁADY I EFEKTY BADANIA EFEKTYWNOŚCI

Do analizy efektywności technicznej i konkurencyjności systemów ochrony zdrowia państw członkowskich Unii Europejskiej w 2010 r.[2] zaimplementowano 2 nakłady i 2 efekty. Wszystkie zmienne mają charakter relatywny, co niweluje wpływ wielkości oraz poziomu rozwoju gospodarczego krajów. Nakładami w badaniu

[2] Nowsze dane nie są jeszcze dostępne na stronie Eurostat.

są: liczba lekarzy na 100 000 mieszkańców oraz udział wydatków publicznych na ochronę zdrowia w PKB kraju. Dobór tych cech podyktowany był ich powszechnym wykorzystaniem w badaniach efektywności, jakości i sposobu funkcjonowania systemów ochrony zdrowia, zarówno na poziomie krajowym jak i regionalnym. Liczba lekarzy jest silnie skorelowana z liczbą pracowników opieki zdrowotnej, liczbą szpitali, a także liczbą łóżek, co odzwierciedla materialne i osobowe zasoby systemu. Wielkość wydatków publicznych reprezentuje nakłady finansowe na ochronę zdrowia w badanych państwach. Efektami są: odsetek populacji, której (w subiektywnej ocenie) popyt na badania specjalistyczne i usługi medyczne został zaspokojony[3] oraz oczekiwana dalsza długość trwania życia. Zmienne te mają charakter społeczno-demograficzny i służą ocenie stanu zdrowia oraz jakości życia obywateli badanych krajów.

Głównym źródłem danych o krajach UE był bank informacji Eurostat (*Eurostat Database by theme*, 2013) łączący zasoby urzędów statystycznych poszczególnych państw członkowskich. Niestety w bazie wystąpiło wiele braków danych, które spowodowałyby konieczność usunięcia z badania kilkunastu krajów członkowskich, co uniemożliwiłoby przeprowadzenie analizy. Dlatego podjęto próbę uzupełnienie brakujących informacji. W przypadku, gdy dostępne były dane z kilku poprzednich lat, wyznaczono średnie tempo zmian i założono, że pozostanie ono bez zmian do roku 2010. Jeżeli zamieszczona w bazie była pojedyncza informacja z roku poprzedniego, przyjęto wartość z 2009r. jako aktualną. Gdy baza Eurostat nie zawierała żadnych danych historycznych, skorzystano z banku danych Organizacji Współpracy Gospodarczej i Rozwoju OECD (*OECD Data by theme*, 2013). Wyznaczono brakujące wartości liczby lekarzy na 100 000 mieszkańców w oparciu o zmienne: liczba lekarzy i populacja 2010 r. (lub 2009 r. jeśli nowsze dane nie były osiągalne). Udział wydatków publicznych na ochronę zdrowia w PKB obliczono według wydatków publicznych na ochronę zdrowia (lub bieżących publicznych wydatków na ochronę zdrowia) i produktu krajowego brutto 2010 r. (lub 2009 r. jeśli nowsze dane nie były osiągalne) oraz kursu walut dolar – euro z dn. 8.04.2013 r. Dane dotyczące liczby lekarzy na Słowacji zaczerpnięto z bazy danych słowackiego urzędu statystycznego (Statistical Office of the SR, 2013). Jedynie dla Malty nie udało się zgromadzić wszystkich informacji, więc została ona pominięta w analizach. Analizowane w badaniu zmienne charakteryzują się zróżnicowanymi rozkładami przestrzennymi (tabela 1).

[3] Obliczone jako 100% pomniejszony o odsetek populacji, dla którego nie zaspokojono popytu na opiekę zdrowotną.

Tabela 1.

Miary statystyczne rozkładu nakładów i wyników badania metodą DEA dla krajów Unii Europejskiej w 2010 r.

Miary statystyczne	Nakłady		Efekty	
	Liczba lekarzy na 100 000 mieszkańców [os.]	Udział wydatków publicznych na ochronę zdrowia w PKB [%]	Oczekiwana dalsza długość trwania życia [lata]	Udział populacji o zaspokojonych potrzebach medycznych [%]
Min	217,9	1,6	72,8	86,5
Max	611,8	12,4	81,8	100
Średnia arytmetyczna	337,2	6,5	78,2	97,6
Odchylenie standardowe	81,0	2,4	3,0	3,6
Współczynnik zmienności	24%	37%	4%	4%

Źródło: opracowanie własne w pakiecie MS Excel.

Można zauważyć, że w każdym z krajów UE zatrudnionych było w 2010 r. średnio 337 lekarzy na 100 000 mieszkańców. Najmniej lekarzy było w Polsce (218 os.) a najwięcej, prawie trzykrotnie więcej niż w RP, w Grecji (612 os.). Zróżnicowanie mierzone współczynnikiem zmienności opartym na odchyleniu standardowym wyniosło 24%. W państwach UE publiczne wydatki na ochronę zdrowia stanowią średnio 6,5% PKB, najmniejszy udział 1,6% wystąpił w Irlandii, a największy 12,4% w Grecji. Zróżnicowanie tej cechy było większe niż pozostałych – odchylenie stanowiło 37% średniej. Średnia oczekiwana dalsza długość trwania życia obywateli państw Unii to 78 lat. Przewiduje się, że najkrócej będą żyć Luksemburczycy – 73 lata, a najdłużej Łotysze – 82 lata. Zróżnicowanie wartości tej zmiennej jest niewielkie, jedynie 4%. Średnio w krajach Unii Europejskiej 98% populacji uważa, że ich potrzeby medyczne dotyczące badań i leczenia zostały zaspokojone. Najwięcej niezadowolonych 13% odnotowano na Łotwie, a w Wielkiej Brytanii popyt na usługi medyczne wszystkich obywateli został zaspokojony. Zróżnicowanie w państwach UE było nieznaczne – 4%.

4.2. ANALIZA EFEKTYWNOŚCI TECHNICZNEJ SYSTEMÓW OCHRONY ZDROWIA W KRAJACH UE

Do badania zastosowano model DEA zorientowany na nakłady o zmiennych efektach skali – model BCC-I (Charnes, Cooper, Rhodes, 1978), a obliczenia wykonano w programie STATA. Wyniki zaprezentowano w tabeli 2.

Tabela 2.

Współczynnik efektywności, zmienne swobodne, efekty skali w roku 2010 dla krajów Unii Europejskiej na podstawie wyników analizy DEA

Kraj	Współczynnik efektywności [%]	Zmienne swobodne zmiennych				Efekty skali R-rosnące, S-stałe, M-malejące
		Nakłady		Efekty		
		Liczba lekarzy na 100 000 mieszkańców [os.]	Udział wydatków publicznych na ochronę zdrowia w PKB [%]	Oczekiwana dalsza długość trwania życia [lata]	Udział populacji o zaspokojonych potrzebach medycznych [%]	
Austria	62	15,5	0	0,01	0	M
Belgia	89	0	0	0	0,2	M
Bułgaria	76	0	0	5,3	8,3	R
Cypr	100	0	0	0	0	M
Czechy	94	69,8	0	2,8	0	M
Dania	68	0	0	0,2	0	M
Estonia	86	0	0	4,6	0	M
Finlandia	93	2,4	0	0	0	M
Francja	99	0	1,0	0	0	M
Grecja	44	0	0	0	2,9	M
Hiszpania	100	0	0	0	0	M
Holandia	100	0	0	0	0	M
Irlandia	100	0	0	0	0	S
Litwa	85	26,2	0	7,4	0	M
Luksemburg	100	0	0	0	0	M
Łotwa	88	0	0	4,45	10,8	R
Niemcy	72	0	0	0	0,3	M
Polska	100	0	0	0	0	S
Portugalia	67	0	0	0	0	M
Rumunia	99	0	0	3,1	8	R
Słowacja	79	3,1	0	5,1	0	M
Słowenia	100	0	0	0	0	M
Szwecja	86	0	0	0	0	M
Węgry	91	0	0	4,8	0	M
Wlk. Brytania	100	0	0	0	0	M
Włochy	100	0	0	0	0	M

Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników programu STATA.

Wyniki badania metodą DEA wskazały, że 9 z 26 krajów (Cypr, Hiszpania, Holandia Irlandia, Luksemburg, Polska, Słowenia, Wielka Brytania i Włochy) ma technicznie efektywne systemy opieki zdrowotnej, a zatem w pełni wykorzystuje posiadana nakłady. W przypadku pozostałych 17 państw konieczna jest proporcjonalna redukcja obu nakładów (liczby lekarzy i wydatków publicznych) od 1% dla Francji i Rumunii do 56% w Grecji. W Czechach, Finlandii, Francji, Rumunii i na Węgrzech nieefektywność techniczna nie przekracza 10%, zatem nieznaczny udział nakładów jest niewykorzystywany. Dodatkowo w Austrii, Czechach, Finlandii, na Litwie i Słowacji niezbędne jest dodatkowe zmniejszenie liczby lekarzy od 2 do 70 na 100 000 mieszkańców, zaś we Francji obniżenie obciążenia wydatków publicznych o 1% w stosunku do PKB kraju. Ponadto można sądzić, że nawet po obniżeniu nakładów do wskazanych poziomów w Austrii, Bułgarii, Czechach, Danii, Estonii, Litwie, Rumunii, na Łotwie, Słowacji i Węgrzech oczekiwana dalsza długość trwania życia powinna być wyższa od 0,01 roku do 5,3 lat. Udział populacji o zaspokojonych potrzebach także mógłby być wyższy, od 0,2% do 11%, dla Belgii, Bułgarii, Grecji, Łotwy, Niemiec i Rumunii. Wyniki badania metodą DEA wskazały także na występowanie w większości krajów, niezależnie od poziomu efektywności systemu ochrony zdrowia, malejących efektów skali. Oznacza to, że zwiększanie nakładów powoduje mniej niż proporcjonalne wzrosty efektów. Utrudnia to osiągnięcie i utrzymanie efektywności technicznej sektora zdrowia. Wyjątkiem są Irlandia i Polska o stałych efektach oraz Bułgaria, Łotwa i Rumunia o rosnących efektach skali. Można podejrzewać, że w tych krajach poziom dostępności i jakości opieki zdrowotnej jest niski, w porównaniu z innymi krajami, a co za tym idzie nieznaczny przyrost nakładów przekłada się na proporcjonalnie większy wzrost efektów.

Przeprowadzone badanie nie tylko określiło, które kraje mają efektywne technicznie, a zatem konkurencyjne systemy ochrony zdrowia, a które są nieefektywne i niekonkurencyjne, ale wskazało także liderów i uczniów (ang. *follower*). Liderami są efektywne jednostki decyzyjne znajdujące się na granicy efektywności, a uczniami jednostki nieefektywne poniżej tej granicy. Granicę efektywności tworzą wektory w przestrzeni R^4 opisujące nakłady i efekty krajów o efektywnych sektorach oraz liniowe kombinacje tych wektorów. W tab. 3 zaprezentowano współczynniki kombinacji liniowej wektorów dla państw o niekonkurencyjnych sektorach, które umożliwiają najszybsze osiągnięcie efektywności. Parametry te opierają się na podobieństwie poziomów nakładów i efektów systemów opieki zdrowotnej.

Irlandia i Słowenia zostały wybrane jako najczęstsi liderzy. Odpowiednio 10 i 9 z nieefektywnych krajów powinno „uczyć się" od tych systemów ochrony zdrowia. Oznacza to, że są one jednymi z niewielu efektywnych krajów w grupie państw o podobnych, ze względu na strukturę nakładów i wyników, systemach opieki zdrowia. Jednak Luksemburg należy do najsilniejszych liderów. Jest on silnym wzorcem[4] dla 4 krajów: Austrii, która w 93% powinna upodobnić swój system do luksembur-

[4] Za silne wzorce uznano te kraje, dla których współczynniki kombinacji liniowej przekraczają 0,5.

skiego, Czech – w 67%, Litwy – w 69% i Słowacji – w 77%. Ponadto Bułgaria powinna wzorować się na Irlandii w 67%, Szwecja na Hiszpanii w 53% , Belgia na Wielkiej Brytanii w 51%, Łotwa w 60%, a Rumunia w 82% na Polsce, Dania w 94% i Finlandia w 66% na Słowenii. Estonia, Francja, Grecja, Niemcy, Portugalia i Węgry nie mają silnych wzorców, a ich liderzy są rozproszeni. Wskazuje to na duże zróżnicowanie funkcjonujących w krajach Unii Europejskiej systemów ochrony zdrowia.

Tabela 3.

Kraje o nieefektywnych systemach ochrony zdrowia (uczniowie) i współczynniki kombinacji liniowej przesunięcia ich na granice efektywności w odniesieniu do krajów efektywnych (liderów)

	Liderzy										
Uczniowie	Kraj	Cypr	Hiszpania	Holandia	Irlandia	Luksemburg	Polska	Słowenia	Wlk. Brytania	Włochy	suma
	Austria	0	0	0	0,08	0,93	0	0	0	0	1
	Belgia	0,05	0	0	0	0	0	0,44	0,51	0	1
	Bułgaria	0	0	0	0,67	0	0,33	0	0	0	1
	Czechy	0	0	0	0	0,67	0	0,33	0	0	1
	Dania	0	0	0	0	0	0,06	0,94	0	0	1
	Estonia	0	0	0	0,38	0,28	0	0,34	0	0	1
	Finlandia	0	0,02	0	0	0,33	0	0,65	0	0	1
	Francja	0	0,12	0,44	0	0	0	0	0	0,44	1
	Grecja	0,34	0	0	0	0	0	0,37	0,29	0	1
	Litwa	0	0	0	0,31	0,69	0	0	0	0	1
	Łotwa	0	0	0	0,4	0	0,6	0	0	0	1
	Niemcy	0,2	0	0	0	0	0	0,36	0,44	0	1
	Portugalia	0,24	0	0	0,11	0	0,18	0,47	0	0	1
	Rumunia	0	0	0	0,18	0	0,82	0	0	0	1
	Słowacja	0	0	0	0,23	0,77	0	0	0	0	1
	Szwecja	0,04	0,53	0,14	0	0,29	0	0	0	0	1
	Węgry	0	0	0	0,33	0	0,18	0,49	0	0	1
Liczba uczniów		5	3	2	10	7	6	9	3	1	

Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników programu STATA.

5. EFEKTYWNOŚĆ TECHNICZNA SYSTEMÓW OCHRONY ZDROWIA KRAJÓW UE A JAKOŚĆ OPIEKI ZDROWOTNEJ

Analizując konkurencyjność systemów ochrony zdrowia w krajach Unii Europejskiej metodą DEA podzielono państwa według efektywności technicznej sektora zdrowia na:

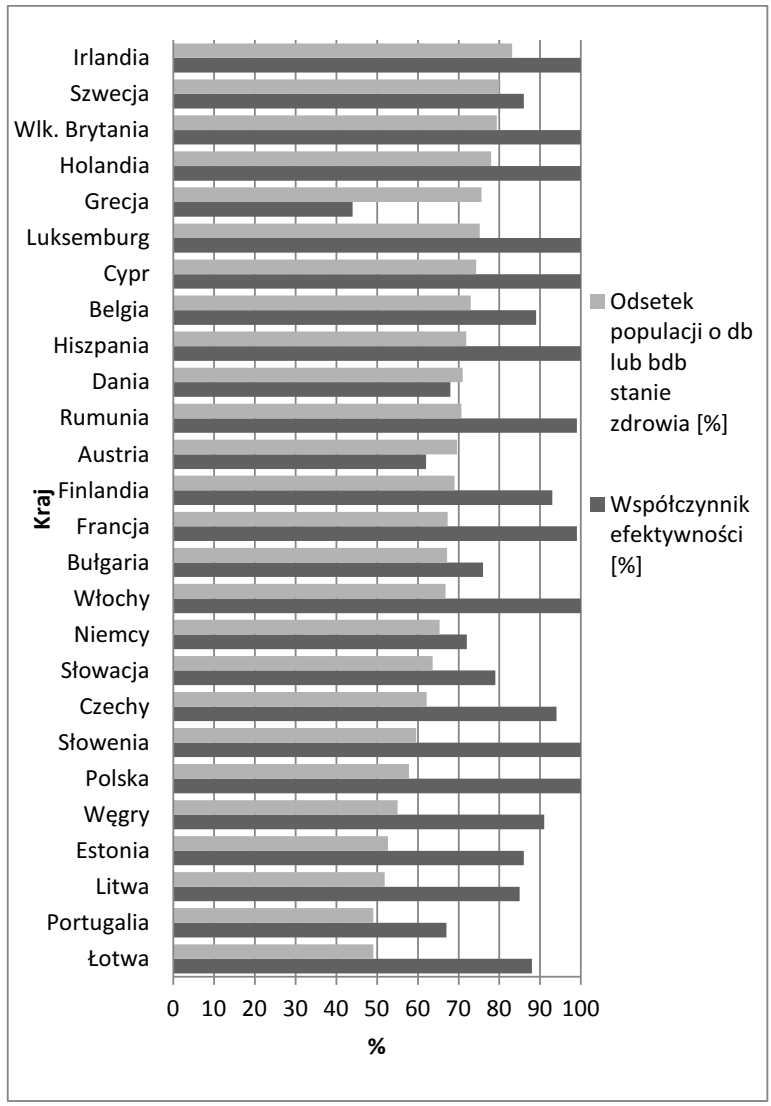
- efektywne ponieważ ich nakłady są w 100% wykorzystane i zamieniane na wyniki,
- nieefektywne o „niepotrzebnie" zawyżonych nakładach lub niewystarczających wynikach.

Należy jednak pamiętać, że ze względu na relatywny charakter metoda DEA faworyzuje DMU o najniższych nakładach (Polska i Irlandia) oraz najwyższych wynikach (Łotwa i Wielka Brytania). Redundancja (nadmiarowość) rozwiązań stanowi niewątpliwie wadę metody DEA, jednak można to zaakceptować uzasadniając to ekonomicznie (Guzik, 2009). Najniższe nakłady muszą być maksymalnie wykorzystane, aby zapewnić funkcjonowanie systemu na poziomie zbliżonym do pozostałych krajów. Podobnie uzyskiwanie najwyższych efektów, niezależnie od poziomu nakładów, wskazuje, że poprawność procesu generowania tych wyników, a zatem sektor zdrowia musi być efektywny technicznie.

Jednak efektywność techniczna nie musi oznaczać, że jakość oferowanych usług medycznych jest wysoka. Do weryfikacji wniosków o konkurencyjności systemów ochrony zdrowia na podstawie badania metodą DEA zastosowano zmienne z bazy danych Eurostat dotyczące odsetka populacji określającego swój stan zdrowia jako dobry lub bardzo dobry na podstawie reprezentatywnej ankiety *The European Union Statistics on Income and Living Conditions* – EU-SILC. Następnie zsumowano je konstruując cechę informującą o udziale osób o stanie zdrowia co najmniej dobrym.

Analizując poziom efektywności opisany współczynnikiem efektywności (tabela 2) oraz frakcje osób o przynajmniej dobrym stanie zdrowia stwierdzono, na podstawie współczynnika korelacji Pearsona (0,13) i wykresu rozproszenia, brak korelacji pomiędzy cechami. Wśród 10 krajów o najgorszym stanie zdrowia publicznego według wyników ankiety EU-SILC (49%–65% osób o co najmniej dobrym stanie zdrowia) znajdują się 2 kraje uznane w badaniu DEA za technicznie efektywne ze względu na system ochrony zdrowia – Polska i Słowenia. Analizując 10 krajów o najlepszym stanie zdrowia publicznego – frakcja osób o dobrym lub bardzo dobrym stanie zdrowia wynosi 71%–83% – można zauważyć, że poza 6 krajami efektywnymi technicznie znajduje się także Grecja o najniższym współczynniku efektywności (rysunek 1).

Rozbieżności w efektywności sektora zdrowia i poziomie zdrowia publicznego sugerują, że optymalizacja techniczna, alokacyjna czy ekonomiczna nie zawsze oznacza wysoką jakość opieki zdrowotnej. Analizując przykład Polski można zauważyć, że chociaż system zdrowia uznano za konkurencyjny, to jednocześnie 42% Polaków deklaruje mniej niż dobry stan zdrowia. Głównym powodem uzyskania efektywności była bardzo niska w porównaniu z innymi członkami UE liczba lekarzy. Wyniki



Rysunek 1. Współczynnik efektywności systemów ochrony zdrowia i frakcja populacji o co najmniej dobrym stanie zdrowia w krajach Unii Europejskiej w 2010 r.

Źródło: opracowanie własne w pakiecie MS Excel.

zadania optymalizacyjnego wskazały, że aby uzyskać stosunkowo wysokie wyniki (odsetek populacji, której popyt na badania specjalistyczne i usługi medyczne został zaspokojony oraz oczekiwana dalsza długość trwania życia) pracownicy służby zdrowia musieli funkcjonować efektywniej niż w krajach o wyższej liczbie lekarzy. Z punktu widzenia całego systemu stanowi to zaletę. Jednak na poziomie mikro wiąże

się to z niedoborem lekarzy pierwszego kontaktu, specjalistów oraz innych pracowników medycznych, co pokazują prowadzone w ostatnich miesiącach badania (*NIK zbada…*, 2013; *Funkcjonowanie systemu…* NIK, 2013; *Pediatrzy nie mają…*, 2013). Dla pacjentów oznacza to długi okres oczekiwania na wizyty, badania i procedury medyczne, dla lekarzy pracę na wielu etatach.

6. PODSUMOWANIE

Systemy ochrony zdrowia stanowią ważny sektor gospodarek wszystkich krajów Unii Europejskiej. Chociaż zróżnicowanie historyczne, legislacyjne, polityczne i finansowe utrudnia prowadzenie bezpośrednich analiz porównawczych, możliwe jest porównanie relatywnej efektywności np. technicznej funkcjonowania systemów, czego przykładem jest przeprowadzone badanie w oparciu o nieklasyczną metodę DEA. Graniczna Analiza Danych pozwala na implementacje metodologii benchmarkingu i poprawę konkurencyjności obiektów, w tym przypadku systemów ochrony zdrowia krajów UE, poprzez uczenie się i „równanie do najlepszych". Uzyskanie i utrzymanie efektywności technicznej w sektorze zdrowia poprzez optymalne dopasowanie nakładów materialnych (rzeczowych i osobowych) oraz finansowych jest kluczowe dla zarządzania systemem na poziomie centralnym i regionalnym. Powinno przyczynić się do redukcji zadłużenia placówek medycznych i planowania przyszłego zapotrzebowania na nakłady.

Efektywność techniczna nie powinna stanowić jednak jedynego kryterium zarządzania w sektorze ochrony zdrowia. Nie gwarantuje ona ani optymalnej, ze względu na oczekiwania pacjentów, ani nawet dostatecznej jakości usług medycznych, czy dostępności do lekarzy specjalistów, badań i zabiegów medycznych, ani warunków pracy lekarzy. W rezultacie należy brać także pod uwagę czynniki istotne nie tylko na poziomie centralnym, ale także w skali mikro. Łączenie analiz efektywności, np. z zastosowaniem metody DEA, z badaniami oceniającymi jakość usług medycznych, może przyczynić się do poprawy funkcjonowania systemów ochrony zdrowia nie tylko w krajach o niskim współczynniku efektywności, ale także tych relatywnie efektywnych jak Polska, w których ilość nie zawsze idzie w parze z jakością.

Uniwersytet Łódzki

LITERATURA

Bendell T., Boulter L., (2000), *BENCHMARKING. Jak uzyskać przewagę nad konkurencją*, Kraków.

Bramham J., (2004), *Benchmarking w zarządzaniu zasobami ludzkimi*, Kraków.

Charnes A., Cooper W., Rhodes A., (1978), Measuring the Efficiency of Decision Making Units, *European Journal of Operations Research*, 2 (6), 429–444.

Euro Health Consumer Index, Health Consumer Powerhouse, (2013), http://www.healthpowerhouse.com/index.php?Itemid=55 (3.02.2014).

Eurostat Statistics by Theme http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/statistics/search_database (11.04.2013 r.).

Farrell M. J., (1957), Measurement of Productive Efficiency, *Journal of Royal Statistical Society*, 120, 253–281.

Funkcjonowanie systemu ratownictwa medycznego, http://www.nik.gov.pl/kontrole/wyniki-kontroli-nik/kontrole,10324.html (13.04.2013r.).

Golany B., Roll Y., (1989), *An Application Procedure for DEA, OMEGA Heft* Vol. 17.

Golinowska S., (2012), *Zarys systemu ochrony zdrowia w Polsce*, Wydawnictwo WHO.

Gospodarowicz M., (2000), Procedury analizy i oceny banków, *Materiały i studia NBP zeszyt nr 103*, Narodowy Bank Polski Departament Analiz i Badań, Warszawa.

Gospodarowicz A., (2002), *Analiza i ocean banków oraz ich oddziałów*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego, Wrocław.

Guzik B., (2009), *Propozycja metody szacowania efektywności instytucji non profit*, http://www.kpsw.edu.pl/menu/pobierz/RE2/4Guzik.pdf (3.02.2014).

Health Care Systems in Transition. Greece, (1996), (http://www.who.it/document/e72454.pdf (12.05.2010 r.).

Ministry of Health, Welfare and Sport, (http://www.minvws.nl/en/themes/health-insurance-system/) (2.03.2010 r.).

NIK zbada, jak działa w Polsce nocna opieka medyczna, (http://prawo.rp.pl/artykul/987375.html) (13.04.2013 r.).

Nojszewska E., (2011), *System ochrony zdrowia w Polsce*, LEX a Wolters Kluwer Business, Warszawa.

OECD Data by Theme, (http://stats.oecd.org/) (11.04.2013 r.).

Oxford English Dictionary, 1994.

Pediatrzy nie mają siły, by pracować w nocy, (http://www.mp.pl/kurier/index.php?aid=83530&_tc=327020FD4E46DB46D0D16AC44DFA7D50) (13.04.2013 r.).

RAPORT *Finansowanie ochrony zdrowia w Polsce. Zielona Księga II*, wersja trzecia, Ministerstwo Zdrowia, Warszawa, 29 sierpnia 2008 r.

Schefczyk M., (1996), *Data Envelopment Analysis*. DBW, nr 56.

Statistical Office of the Slovak Republic, (http://portal.statistics.sk/showdoc.do?docid=359) (10.04.2013 r.).

Suchecka J., (1998), *Ekonometria ochrony zdrowia*, Wydawnictwo Absolwent, Łódź.

Suchecka J., Żółtaszek A., (2011), Zastosowanie panelowego modelu przesunięć udziałów Berzega w analizie wydatków na ochronę zdrowia, w: Rycia K., Skrzypczak Z., (red.), *Ochrona zdrowia na świecie*, Wolters Kluwer Polska Sp. z o.o.

Węgrzyn A., (2000), *Benchmarking: nowoczesna metoda doskonalenia przedsiębiorstwa*, Kluczbork–Wrocław.

Wynand van de Ven P. M. M., Schut F. T., (2008), Universal Mandatory Health Insurance In The Netherlands: A Model For The United States?, *Health Affairs* 2008, 27 (3), May/June.

Żółtaszek A., (2008), Benchmarking i metoda DEA jako narzędzia wspomagające sprawne działanie miasta, w: Przygodzki Z., Sokołowicz M. E., (red.), *Nowoczesne miasto. Badania, instrumenty, analizy*, Wydawnictwo Biblioteka, Łódź.

Żółtaszek A., Jewczak M., (2011), Spatial and Dynamic Analysis of Health Care Expenditures in OECD Countries, w: Suchecki, B. (red.), *Spatial Econometrics and Regional Economic Analysis*, *Folia Oeconomica*, 252, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

EFEKTYWNOŚĆ I KONKURENCYJNOŚĆ SYSTEMÓW OPIEKI ZDROWOTNEJ KRAJÓW UNII EUROPEJSKIEJ

Streszczenie

Sektor ochrony zdrowia jest kluczowym działem gospodarki każdego państwa. Wzbudza bezpośrednie zainteresowanie obywateli, zarówno w aspektach medycznym i społecznym, jak i ekonomicznym. Jednocześnie jest jednym z bardziej zróżnicowanych sektorów na świecie, szczególnie pod względem struktury źródeł jego finansowania oraz efektywności systemu opieki zdrowotnej.

Celem artykułu jest analiza efektywności technicznej oraz pośrednio także konkurencyjności systemów opieki zdrowotnej w krajach Unii Europejskiej. Do badania zastosowano optymalizacyjną metodę Granicznej Analizy Danych DEA (ang. *Data Envelopment Analysis*). Umożliwia ona ocenę relatywnej efektywności krajów pod względem wybranych nakładów i wyników opieki zdrowotnej, jednocześnie wskazując na przyczyny ewentualnej niekonkurencyjności.

Słowa kluczowe: system opieki zdrowotnej, efektywność techniczna, Unia Europejska, DEA, Graniczna Analiza Danych

EFFECTIVENESS AND COMPETIVENESS OF HEALTHCARE SYSTEMS IN EUROPEAN UNION STATES

Abstract

Healthcare system is a key sector of every economy, as it is of direct medical and socioeconomic interest to citizens. Simultaneously it is one of the most diverse sectors across countries, especially concerning its financing and effectiveness.

The aim of this paper is to analyze the technical effectiveness and indirectly the competiveness of healthcare systems in European Union states. The research has been performed by utilizing an optimization method DEA (Data Envelopment Analysis). It enables the validation of the relative effectiveness of countries based on inputs and outputs of healthcare systems, as well as distinguishing the causes of possible uncompetitiveness.

Keywords: healthcare system, technical effectiveness, European Union, DEA, Data Envelopment Analysis

PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXI – ZESZYT 1 – 2014

SPRAWOZDANIA

MARTA MAŁECKA, ARTUR MIKULEC

SPRAWOZDANIE Z XXXII MIĘDZYNARODOWEJ KONFERENCJI NAUKOWEJ WIELOWYMIAROWA ANALIZA STATYSTYCZNA (WAS 2013)

XXXII edycja międzynarodowej konferencji naukowej Wielowymiarowa Analiza Statystyczna, WAS 2013 (*32nd International Conference on Multivariate Statistical Analysis, MSA 2013*) odbyła się w dniach od 18 do 20 listopada 2013 r. w Łodzi w Centrum Szkoleniowo-Konferencyjnym Uniwersytetu Łódzkiego. Konferencja została zorganizowana przez: Instytut Statystyki i Demografii UŁ, Katedrę Metod Statystycznych UŁ, Polskie Towarzystwo Statystyczne (PTS) oraz Komitet Statystyki i Ekonometrii Polskiej Akademii Nauk. Funkcję Przewodniczącego Komitetu Organizacyjnego pełnił prof. dr hab. Czesław Domański, a obowiązki sekretarzy naukowych konferencji sprawowali mgr Marta Małecka oraz dr Artur Mikulec. XXXII Konferencja Wielowymiarowa Analiza Statystyczna WAS 2013 objęta została honorowym patronatem Prezydenta Miasta Łodzi – Hanny Zdanowskiej. Jej organizacja została dofinansowana przez Narodowy Bank Polski w ramach projektu edukacyjnego wpisującego się w priorytetowe obszary edukacji ekonomicznej NBP, Komitet Statystyki i Ekonometrii Polskiej Akademii Nauk oraz Urząd Miasta Łodzi – w ramach konkursu ofert na realizację zadania „Współpraca z wyższymi uczelniami" w zakresie promocji Łodzi jako ośrodka naukowego i akademickiego, ŁÓDŹ AKADEMICKA 2013. Partnerami konferencji były także: firma StatSoft Polska Sp. z o.o. oraz portal BazaKonferencji.pl – polska baza konferencji naukowych. Konferencja wpisywała się w obchody Międzynarodowego Roku Statystyki (*Statistics 2013*).

Głównymi celami XXXII edycji Konferencji Wielowymiarowa Analiza Statystyczna były: prezentacja najnowszych osiągnieć z zakresu wielowymiarowej analizy statystycznej oraz wymiana doświadczeń, będących wynikiem jej stosowania. Tematyka konferencji obejmowała szeroki zakres zagadnień statystyki matematycznej i metod statystyki wielowymiarowej m.in.: rozkłady wielowymiarowe, testy statystyczne, metody nieparametryczne, analizę czynnikową, analizę skupień, analizę dyskryminacyjną, analizę wariancji i regresji, metody bayesowskie, analizy Monte Carlo, data mining, procedury odporne, analizę danych cenzurowanych, rozpoznawa-

nie obrazów, analizy stochastyczne, oraz ich innowacyjne aplikacje w naukach ekonomicznych, finansach, ubezpieczeniach, rynku kapitałowym, zarządzaniu ryzykiem, zarządzaniu jakością, w medycynie i opiece zdrowotnej.

Podczas pierwszej sesji plenarnej uczestnicy konferencji wysłuchali 2 wykładów zaproszonych: *Metody statystyczne analizy danych dla wielozmiennych danych funkcjonalnych* (Mirosław Krzyśko, Łukasz Waszak), *O zadłużeniu suwerennym i statystyce* (Eugeniusz Gatnar).

Druga sesja plenarna, historyczna poświęcona została wybitnym przedstawicielom polskiej myśli statystycznej: Kazimierzowi Zającowi oraz Andrzejowi Iwasiewiczowi – wybitnym statystykom krakowskim (Józef Pociecha), Witoldowi Kloneckiemu (Tadeusz Bednarski), Ryszardowi Zielińskiemu (Wojciech Zieliński). Przypomniano także sylwetki: Juliana Perkala – prekursora nowych metod statystycznych w naukach przyrodniczych oraz Tadeusza Czackiego – statystyka społecznego (Czesław Domański).

Oprócz 2 wykładów zaproszonych oraz 4 referatów w sesji jubileuszowo-historycznej uczestnicy konferencji wygłosili 52 referaty – poniżej przedstawiono ich tytuły (w kolejności alfabetycznej według nazwisk autorów):

- Bartosz Bartniczak (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu) – *Jakość życia na pograniczu polsko-niemieckim w świetle wyników badań ankietowych*,
- Tomasz Bąk (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach) – *Optymalizacja liczby warstw na przykładzie badania lasów*,
- Tadeusz Bednarski, Filip Borowicz (Uniwersytet Wrocławski) – *Testowanie przyczynowości ubytku respondentów dla paneli rotacyjnych w przypadku modelu Coxa – część I poświęcona teoretycznym aspektom analizy przyczynowości*,
- Tadeusz Bednarski, Filip Borowicz (Uniwersytet Wrocławski) – *Testowanie przyczynowości ubytku respondentów dla paneli rotacyjnych w przypadku modelu Coxa – część II poświęcona analizie przyczynowości dla danych BAEL*,
- Mirosław Bełej (Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie) – *Dynamika lokalnych cen nieruchomości badana na gruncie teorii katastrof*,
- Jacek Białek (Uniwersytet Łódzki) – *Zastosowanie indeksów superlatywnych do oszacowania obciążenia wskaźnika cen towarów i usług konsumpcyjnych*,
- Beata Bieszk-Stolorz, Iwona Markowicz (Uniwersytet Szczeciński) – *Zależność czasu poszukiwania pracy od czasu pobierania zasiłku. Teoria poszukiwań na rynku pracy*,
- Justyna Brzezińska (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach) – *Porządkowe modele logarytmiczno-liniowe dla tablic kontyngencji*,
- Katarzyna Budny (Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie) – *Estymacja momentów centralnych wektora losowego opartych na definicji potęgi wektora*,
- Bronisław Ceranka, Małgorzata Graczyk (Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu) – *O pewnych A-optymalnych układach wagowych z biasem*,
- Bronisław Ceranka, Małgorzata Graczyk (Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu) – *Regularne D-optymalne układy wagowe: konstrukcje*,

- Katarzyna Cheba (Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie) – *Metody prognozowania zmian wytwarzania odpadów komunalnych*,
- Magdalena Chmielińska (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach) – *Wykorzystanie rozkładów stabilnych do monitorowanie procesu o nieznanym rozkładzie*,
- Artur Czech (Politechnika Białostocka) – *Zastosowanie wybranych formuł normalizacyjnych w procesie budowy miernika syntetycznego w badaniach konsumpcji w ujęciu pośrednim*,
- Grażyna Dehnel (Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu) – *Estymacja pośrednia dla małych domen w statystyce gospodarczej na przykładzie badania podmiotów gospodarczych DG-1*,
- Czesław Domański (Uniwersytet Łódzki) – *Uwagi o weryfikacji hipotez dla modeli symulacyjnych*,
- Andrzej Dudek (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu) – *Dynamiczna klasyfikacja punktów geograficznych na mapach Google*,
- Łukasz Feldman, Radosław Pietrzyk, Paweł Rokita (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu) – *Wielokryterialna optymalizacja finansowania celów gospodarstwa domowego wieloma programami inwestycyjnymi*,
- Wojciech Gamrot (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach) – *O losowaniu prób przy zróżnicowanych jednostkowych kosztach pozyskania obserwacji cechy*,
- Tadeusz Gerstenkorn (Uniwersytet Łódzki) – *Praktyczny i prosty sposób oceny metod naprawy wadliwych stanów ekonomicznych w oparciu o teorię zbiorów rozmytych*,
- Hanna Gruchociak (Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu) – *Problemy obliczeniowe przy doborze zmiennych do modeli wielopoziomowych przy pomocy regresji krokowej*,
- Bartłomiej Jefmański, Małgorzata Markowska, Marta Kusterka-Jefmańska (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu) – *Polski indeks różnorodności – wybrane aspekty metodologiczne*,
- Maciej Jewczak (Uniwersytet Łódzki) – *Przestrzenne zróżnicowanie poziomów gotowości do płacenia za świadczenia zdrowotne gospodarstw domowych w Polsce*,
- Grzegorz Kończak (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach) – *O estymacji parametrów metodą repróbkowania dla małych prób*,
- Jerzy Korzeniewski (Uniwersytet Łódzki) – Ocena porównawcza metod OCLUS *i genRandomClust generowania struktur skupień*,
- Daniel Kosiorowski, Małgorzata Snarska (Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie), Dominik Mielczarek, Jerzy Rydlewski (studenci Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie) – *Metody uwypuklające istotność statystyczną dopasowania w analizie wielkich wielowymiarowych rzadkich danych ekonomicznych*,
- Krzysztof Kowal, Michał Szymczak (Bosch and Siemens Home Appliances) – *Ocena systemów pomiarowych wysokiej precyzji z wykorzystaniem regresji liniowej i analizy wariancji*,

- Marcin Kozak (Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania w Rzeszowie) – *Zastosowanie metody poszukiwań losowych w warstwowaniu wielowymiarowych populacji*,
- Mariusz Kubus (Politechnika Opolska) – *Dyskryminacyjna procedura krokowa*,
- Małgorzata Markowska, Danuta Strahl (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), Marek Sobolewski (Politechnika Rzeszowska), Andrzej Sokołowski (Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie) – *Testy związku wyników grupowania powiatów z podziałem Polski na województwa*,
- Vadym Masliy (Ternopil National Economic University, Ukraina) – *The Evaluation of Stability of the Process of Foreign Investment in the Cross-section of the Types of Economic Activity* (*Ocena stabilności procesu inwestycji zagranicznych w przekroju rodzajów działalności gospodarczej*),
- Tomasz Michalski, Adam Śliwiński (Szkoła Główna Handlowa w Warszawie) – *Ocena rozwoju rynku ubezpieczeniowego przy wykorzystaniu SAW – badanie empiryczne*,
- Małgorzata Misztal (Uniwersytet Łódzki) – *O wybranych metodach oceny modeli klasyfikacyjnych*,
- Piotr Namieciński (Uniwersytet Łódzki) – *Wykorzystanie wielowymiarowych metod statystycznych do identyfikacji źródeł oraz minimalizacji ryzyka inwestycyjnego przy budowie portfela akcji na GPW*,
- Dariusz Parys (Uniwersytet Łódzki) – *Uogólnione podejście do stóp błędu w testowaniu wielokrotnym*,
- Dorota Pekasiewicz (Uniwersytet Łódzki) – *Modyfikacje kwantylowej metody najmniejszych kwadratów i ich zastosowania*,
- Margus Pihlak (Tallinn University of Technology, Estonia) – *Modelling the Skewness Measure Distribution* (*Modelowanie rozkładu miary skośności*),
- Dominika Polko, Grzegorz Kończak (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach) – *O pewnej metodzie porównywania struktur tablic wielodzielczych*,
- Agnieszka Przybylska-Mazur (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach) – *Wybrane metody weryfikacji dokładności prognoz*,
- Michał Ptak (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu) – *Jakość życia w obszarze przygranicznym*,
- Dorota Rozmus (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach) – *Czy metoda propagacji podobieństwa może być pomocna w wyborze liczby grup?*,
- Kashif Saleem (Lappeenranta School of Business, Lappeenranta University of Technology, Finlandia) – *Modeling Temporal Dependencies in the Polish Stock Market* (*Modelowanie czasowych zależności na polskim rynku akcji*),
- Agnieszka Sompolska-Rzechuła (Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie) – *Krzywe ROC w ocenie jakości modelu logitowego*,
- Jacek Stelmach (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach) – *O generowaniu wielowymiarowych prób za pomocą kopul Archimedesa*,

- Małgorzata Szerszunowicz (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach) – *O nieparametrycznej metodzie estymacji funkcji powierzchni odpowiedzi*,
- Anna Szymańska (Uniwersytet Łódzki) – *Rozkład liczby szkód w ubezpieczeniach odpowiedzialności cywilnej posiadaczy pojazdów mechanicznych*,
- Grażyna Trzpiot (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach) – *Wykorzystanie koherentnych transformujących miar ryzyka w analizie portfelowej*,
- Justyna Wilk (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu) – *Pomiar odległości ekonomicznej na podstawie danych symbolicznych*,
- Justyna Wilk (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), Michał Bernard Pietrzak (Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu) – *Analiza zjawiska starzenia ludności Polski w ujęciu przestrzennym*,
- Artur Zaborski, Marcin Pełka – *Miary odległości w agregacji danych preferencji. Analiza porównawcza*,
- Wojciech Zieliński (Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie) – *Przedziały ufności dla wskaźnika struktury w populacjach skończonych: minimalna liczność próby*,
- Tomasz Żądło (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach) – *O pewnych testach efektów stałych dla liniowych modeli mieszanych*.

Kolejna, XXXIII edycja międzynarodowej konferencji naukowej Wielowymiarowa Analiza Statystyczna, WAS 2014 (*33rd International Conference on Multivariate Statistical Analysis, MSA 2014*) odbędzie się w Łodzi w dniach od 17 do 19 listopada 2014 r. Przewodnictwo Komitetu Organizacyjnego przyszłorocznej edycji objął prof. dr hab. Czesław Domański a sekretarzami naukowymi zostały mgr Elżbieta Zalewska i mgr Marta Małecka.

Marta Małecka, Artur Mikulec – Uniwersytet Łódzki