PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXIII – ZESZYT 2 – 2016

PRZEMYSŁAW JAŚKO[1], DANIEL KOSIOROWSKI[2]

PROGNOZOWANIE KOWARIANCJI WARUNKOWEJ Z WYKORZYSTANIEM ODPORNYCH ESTYMATORÓW ROZRZUTU MCD I PCS W ANALIZIE PORTFELOWEJ[3]

1. WSTĘP

Zasadniczy cel statystyki odpornej (ang. *robust statistics*) sprowadza się do wskazania na podstawie próby wzorca w populacji, który odzwierciedla większość masy probabilistycznej. Dysponując takim wzorcem, definiuje się jednostki odstające (ang. *outliers*) jako odbiegające[4] od niego w sensie pewnej miary bliskości oraz jednostki bliskie większości danych (ang. *inliers*) jednak sztucznie zawyżające „wielomodalność” populacji. W statystyce odpornej staramy się wskazać procedury statystyczne posiadające dobre własności zarówno w sytuacji, gdy dane generuje zakładany model jak też, gdy prawdziwy model znajduje się w pewnym sąsiedztwie zakładanego modelu. Na poziomie próby staramy się odkryć, co wskazuje większość danych. Odporna procedura decyzyjna, to taka, która pomimo niedoskonałości danych z próby, nie prowadzi do szczególnych strat decydenta, który z niej korzysta. Straty można wiązać z niewłaściwym wskazaniem położenia centrum populacji, błędnym określeniem struktury zależności w populacji itd.

W ekonomii decyzje podejmowane są bardzo często na podstawie szacowanych na podstawie danych empirycznych wielowymiarowych miar rozrzutu. Mamy tutaj m.in. na uwadze empiryczne finanse, a w ich obrębie m.in. analizę portfelową (por. Pfaff, 2013). W niniejszej pracy porównujemy dwa odporne macierzowe estymatory wielowymiarowego rozrzutu tzn. estymator uzyskany poprzez minimalizację wyznacznika macierzy kowariancji (MCD, ang. *minimum covariance determinant estimator* – por. Rousseeuw, 1984) z nową obiecującą propozycją PCS (ang. *projection congruent*

[1] Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Wydział Zarządzania, Katedra Systemów Obliczeniowych, ul. Rakowicka 27, 31-510 Kraków, Polska, autor prowadzący korespondencję – e-mail: jaskop@uek.krakow.pl.

[2] Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Wydział Zarządzania, Katedra Statystyki, ul. Rakowicka 27, 31-510 Kraków, Polska.

[3] Autorzy uprzejmie dziękują za wsparcie finansowe ze strony UEK w Krakowie w postaci środków na utrzymanie potencjału badawczego 2015 i 2016.

[4] Jednostki odstające definiuje się z perspektywy przyjętego modelu. Tym samym określone jednostki w jednym modelu mogą być uznane za odstające, podczas gdy w innym już nimi nie będą.

subset estimator). Estymatory te zestawiamy z klasycznym estymatorem macierzy kowariancji, starając się odpowiedzieć na pytanie czy stosowanie bardziej złożonych pod względem obliczeniowym estymatorów odpornych w ekonomii ma praktyczne uzasadnienie. Należy zaznaczyć, że stosowanie metod statystyki odpornej w praktyce i badaniach ekonomicznych jest stosunkowo rzadkie (por. Pfaff, 2013; Kosiorowski, Zawadzki, 2014; Kosiorowski, 2015, 2016; Kosiorowska i inni, 2015). Dalsze części pracy przedstawiają się następująco: w kolejnym podrozdziale skrótowo przedstawiono teoretyczne tło związane ze współczesnymi badaniami odpornych estymatorów rozrzutu, następnie omawiamy idee leżące u podłoża estymatorów MCD i PCS. Pracę zamykają część empiryczna dotycząca konstrukcji portfeli o minimalnej zmienności, portfeli ERC (ang. *equal risk contribution*) oraz podsumowanie.

2. ODPORNOŚĆ MACIERZOWEGO ESTYMATORA ROZRZUTU

Niech $\mathbf{X}^n = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subset \Re^p$, oznacza próbę n obserwacji, $n > p + 1 > 2$, niech $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}^n)$ będzie wielowymiarowym estymatorem parametrów $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, wyznaczonym na podstawie $\mathbf{X}^n$. W naszym przypadku $\boldsymbol{\Theta} = PDS(p)$ jest pewną przestrzenią symetrycznych, dodatnio określonych macierzy $\boldsymbol{\Sigma}$ o wymiarach $p \times p$. Ponadto niech Y_m będzie rodziną wszystkich prób $\mathbf{Y}^m = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ złożonych z n wektorów, które to próby mają $n - m$ elementów ($0 \le m \le n$) wspólnych z próbą $\mathbf{X}^n$: $\mathrm{Y}_m = \{\mathbf{Y}^m : \#(\mathbf{Y}_m) = m, \#(\mathbf{X}^n \cap \mathbf{Y}^m) = n - m\}$, gdzie $0 \le m \le n$. Punkt załamania próby skończonej (BP, ang. *finite sample breakdown point*) estymatora $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ to maksymalna frakcja obserwacji odstających w próbie $\mathbf{X}^n$, która nie powoduje, że estymator staje się bezużyteczny np. wskutek wielkiego przyrostu jego obciążenia lub rozrzutu, bądź nieograniczoności straty związanej z decyzją podejmowaną na podstawie jego wartości itd. (por. Maronna i inni, 2006). Dla p-wymiarowego wektora losowego o charakterystyce położenia i rozrzutu $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, rozważmy estymatory $\hat{\boldsymbol{\mu}}_n(\mathbf{Y}_m)$ i $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_n(\mathbf{Y}_m)$ tych charakterystyk wyznaczone w oparciu o próbę być może zawierającą obserwacje odstające. W ostatnich dekadach poszukiwano afinicznie ekwiwariantnych estymatorów rozrzutu o wysokim BP (por. Marona i inni, 2006).

3. AFINICZNIE EKWIWARIANTNE ESTYMATORY WIELOWYMIAROWEGO ROZRZUTU Z WYSOKIM PUNKTEM ZAŁAMANIA

3.1. ESTYMATOR MINIMALNEGO WYZNACZNIKA MACIERZY KOWARIANCJI MCD

MCD zaproponowany w pracy (Rousseeuw, 1984) definiujemy jako rozwiązanie zagadnienia:

$$(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}) = \operatorname{argmin}_{(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \in (\Re^p, PDS(p))} |\boldsymbol{\Sigma}|, \tag{1}$$

przy warunku

$$\frac{1}{hp}\sum_{i=1}^{h} d^2_{\text{MD},(i)} = \frac{1}{hp}\sum_{i=1}^{h} (\mathbf{x}_{(i)} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_{(i)} - \boldsymbol{\mu}) = 1, \tag{2}$$

gdzie $d^2_{\text{MD},(i)}$ oznacza *i*-tą statystykę porządkową dla kwadratu odległości Mahalonobisa, a $\mathbf{x}_{(i)}$ to obserwacja wykorzystana przy obliczaniu $d^2_{\text{MD},(i)}$. Ograniczenie (2) mówi, że wartość MCD jest równa próbkowej macierzy kowariancji wyznaczonej dla określonego *h*-elementowego podzbioru $\mathbf{X}^n$. Zagadnienia zdefiniowanego przez (1) i (2) nie da się rozwiązać analitycznie, zaproponowano zatem odpowiednią procedurę iteracyjną. W danej *l*-tej iteracji podstawą wyznaczania wartości $\left(\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(l)}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(l)}\right)$ jest *h* obserwacji z $\mathbf{X}^n$ o najmniejszych odległościach Mahalonobisa dla wartości $\left(\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(l-1)}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(l-1)}\right)$ wyznaczonych w poprzednim kroku. Niech $H^{(l)}$ oznacza zbiór indeksów obserwacji wykorzystywanych przy obliczaniu $\left(\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(l)}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(l)}\right)$, w *l*-tej iteracji obliczamy wektor średnich oraz macierz kowariancji dla *h* elementów zbioru $\mathbf{X}^n$ o indeksach w zbiorze $H^{(l)}$: $\left(\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(l)}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(l)}\right) = \left(ave_{i\in H^{(l)}}\mathbf{x}_i, cov_{i\in H^{(l)}}\mathbf{x}_i\right)$. Rousseeuw, Driessen (1999) wykazali, że takie postępowanie prowadzi do uzyskiwania w kolejnych iteracjach macierzy kowariancji o niewiększych wyznacznikach, niż te uzyskane dla poprzedniej iteracji, tzn. $\left|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(l)}\right| \le \left|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(l-1)}\right|$. Powyższe iteracje wykonuje się, aż do momentu uzyskania zbieżności. Warunkiem koniecznym istnienia minimum globalnego $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ funkcji kryterium estymatora MCD dla próby $\mathbf{X}^n$, w punkcie $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(L)}$ jest $\left|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(L)}\right| = \left|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(L-1)}\right|$, nie jest to jednak warunek wystarczający. W związku z tym procedurę rozpoczyna się z różnych punktów startowych i prowadzi się w każdym przypadku, aż do osiągnięcia zbieżności. Jako wartość estymatora MCD przyjmuje się tą spośród wartości końcowych procedury, dla której wyznacznik macierzy kowariancji jest najmniejszy. Dla estymatora MCD, w przypadku $\mathbf{X}^n$ znajdującego się w położeniu ogólnym (ang. *general position*) w $\Re^p$ (tzn. przy $\#\mathbf{X}^n = n \ge p+1$, żadne z $p + 1$ punktów należących do $\mathbf{X}^n$ nie należy do hiperpłaszczyzny o wymiarze niższym niż *p*), BP przyjmuje maksymalną możliwą wartość dla estymatorów afinicznie ekwiwariantnych przy $h = \left\lfloor \frac{n+p+1}{2} \right\rfloor$. Zakładając wielowymiarowy rozkład normalny $\mathbf{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, w przypadku braku mechanizmu zakłócającego[5], MCD nie jest zgodny (por. Butler i inni, 1993; Croux, Haesbroeck, 1999) dla wielowymiarowego rozrzutu. W związku z tym w celu osiągnięcia asymptotycznej zgodności i wobec faktu, że $d^2_{MD}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \sim \chi^2(p)$, stosuje się poprawkę (Maronna, 2006) w postaci mnożnika $\hat{c}$ dla $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$:

$$\hat{c} = \frac{med\{d^2_{MD}(\mathbf{x}_1, \hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}), \ldots, d^2_{MD}(\mathbf{x}_n, \hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}})\}}{\chi^2_{0{,}5,p}}, \tag{3}$$

[5] W statystyce odpornej najczęściej zakłada się, że dane generuje mieszanka dwóch rozkładów. W oparciu o próbę staramy się odkryć własności jednego z nich, traktując ten drugi jako tzw. rozkład zakłócający.

gdzie *med* jest empiryczną medianą kwadratów odległości Mahalanobisa przy wartościach $(\hat{\boldsymbol{\mu}},\hat{\boldsymbol{\Sigma}})$ estymatora, a $\chi^2_{0,5,p}$ jest medianą rozkładu chi-kwadrat z p stopniami swobody, $\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n$, to elementy próby $\mathbf{X}^n$ wygenerowanej z p-wymiarowego rozkładu normalnego $\mathbf{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$. MCD pomimo zastosowania poprawki (3) jest dla przypadku skończonej próby estymatorem obciążonym, dlatego też stosuje się dodatkową poprawkę na nieobciążoność (por. Pison, Willems, 2002).

3.2. ESTYMATOR MINIMALNEJ INKONGRUENCJI PCS

Inaczej niż w przypadku MCD, który definiuje się jako rozwiązanie problemu optymalizacyjnego bezpośrednio względem $(\hat{\boldsymbol{\mu}},\hat{\boldsymbol{\Sigma}})$, w celu wyznaczenia wartości estymatora PCS poszukuje się h-elementowego podzbioru próby $\mathbf{X}^n$, który charakteryzuje się maksymalną wartością kryterium inkongruencji zaproponowanego w pracy (Vakili, Schmitt, 2014). Mierzymy wielkość kongruencji podzbioru próby z innym jej podzbiorem poprzez wielkość nakładania się projekcji tych podzbiorów wzdłuż pewnego kierunku projekcji. Aby uniezależnić się od konkretnego kierunku projekcji dla każdego podzbioru rozpatruje się pewną liczbę projekcji a następnie wyniki się uśrednia. Dla podzbioru próby $\mathbf{X}^n$ o h elementach, minimalizującego kryterium inkongruencji wyznaczamy wartości PCS, jako wektor średnich oraz macierz kowariancji dla tego podzbioru. Dla próby $\mathbf{X}^n \subset \Re^p$ oznaczając przez $\mathbf{A}_{mk}$ macierz uformowaną przez p obserwacji, przez $\mathbf{a}_{mk}$ hiperpłaszczyzny $\{a_{mk} : \mathbf{A}_{mk}a_{mk} = 1_p\}$ oraz przez $d^2_{P,i}(a_{mk})$ kwadrat odległości ortogonalnej obserwacji $\mathbf{x}_i \in X^n$ do a_{mk}, (której to odległości odpowiada długość rzutu ortogonalnego wektora $\mathbf{x}_i$ na kierunek wektora $\mathbf{x}'$ ortogonalnego do hiperpłaszczyzny $\mathbf{a}_{mk}$), której kwadrat wyrażony jest przez:

$$d^2_{P,i}(\mathbf{a}_{mk}) = (\mathbf{x}_i{}'\mathbf{a}_{mk} - 1)^2 / \| \mathbf{a}_{mk} \|^2, \tag{4}$$

gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę Euklidesową.

Niech H_m oznacza podzbiór indeksów h obserwacji z $\mathbf{X}^n$, spośród których p punktów rozpina hiperpłaszczyznę o wektorze normalnym $\mathbf{a}_{mk}$: $H_m \subset \{1,\ldots,n\}$, $\# H_m = h \geq \left\lfloor \frac{n+p+1}{2} \right\rfloor$, $m = 1,\ldots,M$ to subskrypt h-elementowego podzbioru indeksów obserwacji z $\mathbf{X}^n$, przy czym $M = \binom{n}{h}$, H_m to podzbiór indeksów h obserwacji z $\mathbf{X}^n$, o najmniejszych kwadratach odległości od hiperpłaszczyzny z wektorem normalnym $\mathbf{a}_{mk}$: $H_{mk} = \left\{ i \in \{1,\ldots,n\} : d^2_{P,i}(\mathbf{a}_{mk}) \leq d^2_{P,(h)}(\mathbf{a}_{mk}) \right\}$, gdzie $d^2_{P,(h)}$ jest h-tą statystyką porządkową kwadratu odległości od hiperpłaszczyzny z wektorem normalnym $\mathbf{a}_{mk}$, dla wszystkich obserwacji $\mathbf{x}_i$, $i = 1,\ldots,n$ ze zbioru $\mathbf{X}^n$. Wskaźnik inkongruencji H_m wzdłuż kierunku $\mathbf{a}_{mk}$ (ang. *H_m incongruence index along* $\mathbf{a}_{mk}$) definiujemy jako:

$$I(H_m, \mathbf{a}_{mk}) = \log \left(\frac{ave_{i \in H_m} d^2_{P,i}(\mathbf{a}_{mk})}{ave_{i \in H_{mk}} d^2_{P,i}(\mathbf{a}_{mk})} \right). \tag{5}$$

Wskaźnik $I(H_m, \mathbf{a}_{mk})$ zawsze przyjmuje wartości nieujemne. Jeżeli rzuty punktów o indeksach ze zbioru H_m na kierunek $\mathbf{a}_{mk}$ (przy czym punkt początkowy $\mathbf{a}_{mk}$ należy do hiperpłaszczyzny), w dużej części pokrywają się z rzutami punktów ze zbioru H_{mk} na ten kierunek, wartości indeksu będą niskie. Innymi słowy, wskaźnik inkongruencji $I(H_m, \mathbf{a}_{mk})$ przyjmuje niskie wartości, gdy h punktów o indeksach w zbiorze H_m skupia się w pobliżu hiperpłaszczyzny z wektorem normalnym $\mathbf{a}_{mk}$ (rozpinanej przez podzbiór p punktów, spośród h o indeksach w H_m), czyli ich odległość od tej hiperpłaszczyzny[6] jest mniejsza w porównaniu z odległościami pozostałych punktów z $\mathbf{X}^n$, o indeksach nie należących do H_m. Wartość $I(H_m, \mathbf{a}_{mk})$ wskaźnika inkongruencji H_m wzdłuż kierunku $\mathbf{a}_{mk}$, można także rozważać jako miarę stopnia, w jakim pokrywają się zbiory H_m (zawierający indeksy rozważanej h-elementowej podpróby $\mathbf{X}^n$) oraz H_{mk} (zawierający indeksy h punktów z całego zbioru $\mathbf{X}^n$ położonych najbliżej hiperpłaszczyzny z wektorem normalnym $\mathbf{a}_{mk}$), uwzględniającą równocześnie położenie względem rozważanej hiperpłaszczyzny punktów odnoszących się do zestawianych podzbiorów. Punkty położone najbliżej hiperpłaszczyzny z wektorem normalnym $\mathbf{a}_{mk}$, nie związane ze zbiorem H_m, czyli te o indeksach w zbiorze $H_{mk} - H_m$, wpływają (poprzez swoje odległości) na obniżenie w $I(H_m, \mathbf{a}_{mk})$ wartości mianownika ułamka pod logarytmem, nie mając jednocześnie wpływu na wartość jego licznika. W przypadku, gdy zbiór indeksów H_m odnosi się minimalizującego kryterium inkongruencji h-elementowego podzbioru punktów z $\mathbf{X}^n$, punkty o indeksach w H_m koncentrują się w pobliżu hiperpłaszczyzn (związanych z wektorami normalnymi $\mathbf{a}_{mk}$), rozpinanych przez kombinacje p punktów z tego h-elementowego podzbioru, co znajduje odzwierciedlenie w niskich wartościach wskaźnika inkongruencji.

Natomiast w sytuacji, gdy indeksy w H_m odnoszą się do h obiektów z niespójnej podpróby, zawierającej oprócz obserwacji pochodzących z głównego rozkładu, także obserwacje odstające, zbiór H_m będzie miał mniej liczną część wspólną ze zbiorem H_m indeksów h punktów, położonych najbliżej hiperpłaszczyzny rozpinanej przez kombinacje p-elementowe punktów z niespójnego podzbioru. Sytuacja taka prowadzi do wyższych wartości wskaźnika inkongruencji dla takich podzbiorów. W celu usunięcia wpływu konkretnego kierunku $\mathbf{a}_{mk}$ na wartość indeksu inkongruencji wyznaczanego dla zbioru H_m, rozważa się średnią względem wielu kierunków. Wskaźnik inkongruencji dla H_m definiuje się wówczas:

$$I(H_m) = ave_{\mathbf{a}_{mk} \in B(H_m)} I(H_m, \mathbf{a}_{mk}), \tag{6}$$

gdzie $B(H_m)$ jest zbiorem wszystkich kierunków $\mathbf{a}_{mk}$ ortogonalnych do hiperpłaszczyzn rozpinanych przez różne kombinacje p punktów (obserwacji) należących do h-elementowego podzbioru punktów (obserwacji) o indeksach w H_m. W praktyce w celu ograniczenia liczby wykonywanych operacji nie rozpatruje się wszystkich $\#B(H_m)$ kie-

[6] Odległość p punktów rozpinających hiperpłaszczyznę jest zerowa, gdyż punkty te przynależą do niej.

runków $\mathbf{a}_{mk}$, ale ich losowo wybrany K-elemetowy podzbiór $\tilde{B}(H_m)$. Dla podzbioru H^* o minimalnej wartości $I(H_m)$ (ang. *projection congruent subset*):

$$H^* = \arg\min_{\{H_m\}_{m=1}^{M}} I(H_m). \tag{7}$$

obliczamy wartość estymatora PCS wielowymiarowego położenia i rozrzutu jako wektor średnich arytmetycznych oraz macierz kowariancji, wyznaczone na podstawie obserwacji o indeksach ze zbioru H^*:

$$(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}) = \left(ave_{i \in H^*} \mathbf{x}_i, \operatorname{cov}_{i \in H^*} \mathbf{x}_i \right). \tag{8}$$

Dowód afinicznej ekwiwariantności estymatora PCS przedstawiono w pracy (Schmitt i inni, 2014). W tej samej pracy wykazano, że BP dla PCS, w przypadku, gdy $n > p + 1 > 2$ oraz $\mathbf{X}^n$ znajduje się w położeniu ogólnym wynosi $\mathrm{BP}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}, \mathbf{X}^n) = \frac{n-h+1}{n}$ i równy jest maksymalnej możliwej wartości dla estymatorów afinicznie ekwiwariantnych, gdy $h = \left\lfloor \frac{n+p+1}{2} \right\rfloor$. Oceny stopnia obciążenia estymatora PCS wielowymiarowego rozrzutu, dla przypadku próby wygenerowanej przez z rozkładu głównego F z rozkładem G zakłócającym o udziale ε (rozważamy mieszankę dwóch rozkładów), dokonano za pomocą symulacji. Dla próby z mieszanki rozkładów F i G obciążenie estymatora PCS, zależy od wymiaru przestrzeni danych, stopnia zanieczyszczenia ε próby oraz wzajemnego położenia punktów odstających. W pracy (Vakili, Schmitt, 2014) m.in. wskazano sytuacje dla estymatorów afinicznie ekwiwariantnych wielowymiarowego rozrzutu prowadzące do najwyższego możliwego poziomu obciążenia.

Punktem wyjścia dla procedur wyznaczania wartości estymatorów MCD i PCS, jest określenie wstępnych podzbiorów obserwacji, które dodatkowo w procedurze wyznaczania wartości MCD są podstawą do wyznaczenia początkowych przybliżeń wartości estymatora, por. FastMCD (Rousseeuw, Driessen, 1999). W zaproponowanych przez ich autorów algorytmach FastMCD oraz FastPCS (por. Vakili, Schmitt, 2014), jako podpróby początkowe rozpatruje się p + 1-elementowe podzbiory n-elementowego zbioru $\mathbf{X}^n$. W przypadku dużych zbiorów danych analiza wszystkich podzbiorów jest wysoce czasochłonna, dlatego też przyjęto dobierać losowo mniejszą ich liczbę.

Wraz ze wzrostem liczności próby, n, wzrasta czas wykonywania obliczeń, w szczególności w wyniku konieczności wyznaczenia w każdym kroku algorytmu n odległości Mahalanobisa dla elementów $\mathbf{X}^n$. W wariancie algorytmu FastMCD (Rousseeuw, Driessen, 1999) dla przypadku, gdy wielkość próby wynosi $n > 600$ obserwacji, w celu skrócenia czasu wykonywania obliczeń, dokonuje się podziału całości próby na co najwyżej 5 możliwie równolicznych, rozłącznych podprób, dla których osobno wykonywane są wstępne dwa kroki algorytmu. Dla każdej z 5 podprób zachowuje się 10 najlepszych rozwiązań, po czym łączy się podpróby, a 50 zachowanych rozwiązań służy jako rozwiązania początkowe. Następnie na podstawie rozwiązań początkowych oraz połączonej próby dokonuje się po dwa kroki algorytmu oraz zachowuje się 10 najlepszych rozwiązań i te stanowią rozwiązania początkowe w kolejnym etapie. Dla całości próby wychodząc od rozwiązań początkowych dokonuje się kroków koncentracji, aż do osiągnięcia zbieżności. Jako, że przedstawiona procedura iteracyjna wyznaczania MCD jest algorytmem o lokalnej zbieżności do minimum globalnego, uzyskana wartość estymatora MCD zależy od przyjętej wartości początkowej, dobieranej tutaj w sposób losowy. W celu uniezależnienia wyników od losowego doboru punktów początkowych, w modyfikacji estymatora MCD nazwanej detMCD (*deterministic MCD*, Hubert i inni, 2012) wartości początkowe wyznacza się w na podstawie wartości kilku wariantów estymatorów wielowymiarowego rozrzutu (przyjmujących dla danego zbioru zawsze te same wartości).

Algorytm FastPCS przedstawiony w (Vakili, Schmitt, 2014), odróżnia od FastMCD w szczególności kryterium przyjęte do oceny jednorodności próby. W przypadku FastPCS jest ono oparte na (ortogonalnej) odległości punktów reprezentujących obserwacje od odpowiedniej hiperpłaszczyzny, natomiast w FastMCD wykorzystywane są odległości Mahalanobisa. Dodatkowo, inaczej niż w przypadku algorytmu FastMCD, który już w pierwszym kroku koncentracji przechodzi od p + 1-elementowego pozbioru $H_m^{(0)}$ do h-elementowego podzbioru $H_m^{(1)}$, w FastPCS zastosowano zabieg stopniowego zwiększania liczebności podzbiorów $H_m^{(l)}$. Zabieg ten umożliwia zwiększenie odporności procedury, w przypadku, gdy obserwacje odstające znajdują się w pobliżu „głównej części danych".

Porównanie własności MCD i PCS przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1.

Sumaryczne porównanie estymatorów MCD i PCS

Aspekt	Estymator MCD	Estymator PCS
Wyrażenie problemu optymalizacyjnego definiującego wartość estymatora dla zbioru $\mathbf{X}^n$	Minimalizacja z ograniczeniami funkcji kryterium $\lvert \mathbf{\Sigma} \rvert$, zależnej bezpośrednio od parametru $\mathbf{\Sigma}$	Poszukiwanie najbardziej jednorodnego podzbioru zbioru $\mathbf{X}^n$, bez obs. odstających, o minimalnym indeksie inkongruencji, który nie jest wyrażony poprzez bezpośrednią zależność od parametru $\mathbf{\Sigma}$
Zgodność estymatora w przypadku wielowymiarowego rozkładu normalnego bez mechanizmu zakłócającego	niezgodny asymptotycznie – wprowadza się korektę poprzez mnożnik c dla $\hat{\mathbf{\Sigma}}$, niezgodny w sensie Fishera – wprowadza się korektę poprzez mnożnik[1] c_γ (por. Butler i inni, 1993; Croux, Haesbroeck, 1999)	

[1] Stosuje się także korekty dla rozkładów eliptycznie symetrycznych, innych niż wielowymiarowy rozkład normalny.

Tabela 1. (cd.)

Aspekt	Estymator MCD	Estymator PCS
Nazwa algorytmu poszukiwania wartości estymatora	FastMCD (Rousseeuw, Driessen, 1999)	FastPCS (Vakili, Schmitt, 2014)
Pakiet R /funkcja/ z implementacją procedury wyznaczania wartości estymatora	`robustbase` /`covMcd`/ (Rousseeuw i inni, 2015) `rrcov` /`CovMcd`/ (Todorov, Filzmoser, 2009)	`FastPCS` /`FastPCS`/ (Vakili, Schmitt, 2014)
Miara odległości dla elementów zbioru $\mathbf{X}^n$, wykorzystywana w ramach algorytmu	kwadrat odległość Mahalanobisa $d^2_{MD,i}$	kwadrat odległość punktu od hiperpłaszczyzny $d^2_{P,i}$
Podzbiór zbioru $\mathbf{X}^n$, będący podstawą wyznaczania wartości estymatora	*h*-elementowy podzbiór, dla którego próbkowa macierz kowariancji ma minimalny wyznacznik: $\lvert \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \rvert$	*h*-elementowy podzbiór dla którego wartość wskaźnika inkongruencji jest minimalna: $I(H^*)$
Punkt załamania próby skończonej dla estymatora	$\frac{n-h+1}{n} \leq \frac{1}{n}\left\lfloor \frac{n-p+1}{2} \right\rfloor$ gdzie: n – liczebność próby, p – wymiar przestrzeni	$\frac{n-h+1}{n} \leq \frac{1}{n}\left\lfloor \frac{n-p+1}{2} \right\rfloor$ gdzie: n – liczebność próby, p – wymiar przestrzeni
Złożoność obliczeniowa algorytmu	FastMCD: $O(p^3 + np^2)$	FastPCS: $O(p^3 + np)$
Możliwość ponownego ważenia (*reweighting*)	system wag jako funkcja kwadratów odległości Mahalanobisa, przy wartościach oszacowań „wyjściowego" estymatora	system wag jako funkcja kwadratów odległości Mahalanobisa, przy wartościach oszacowań „wyjściowego" estymatora
Inne		mniejszy wpływ koncentracji obs. odstających, na wynik algorytmu

Źródło: opracowanie własne.

4. PRZYKŁAD EMPIRYCZNY ZASTOSOWANIA ODPORNYCH ESTYMATORÓW ROZRZUTU MCD I PCS – ODPORNA ANALIZA PORTFELOWA

W analizie portfelowej powszechnie wykorzystuje się oszacowania parametrów rozkładu stóp zwrotu (por. np. Fiszeder, 2009). W ramach odpornej analizy portfelowej postuluje się zastąpienie klasycznych estymatorów parametrów ich odpornymi odpowiednikami. Za parametry funkcji kryterium, optymalizowanej w ramach analizy portfelowej podstawiane są punktowe oszacowania parametrów wartości oczekiwanych stóp zwrotu oraz ich macierzy kowariancji. Nawet niewielkie odchylenia oszacowań od nieznanych prawdziwych parametrów mogą skutkować niewłaściwymi rozwiązaniami problemów optymalizacyjnych. Ponieważ wpływ na wyniki optymalizacji (uzyskaną strukturę wag portfela) w przypadku oszacowań wektora oczekiwanych stóp zwrotu jest większy niż ma to miejsce w przypadku oszacowań macierzy kowariancji (por. Pfaff, 2013, s. 160), w ramach odpornych technik analizy portfelowej, przyjęło się, żeby bezpośrednio uwzględniać błędy oszacowań wektora wartości oczekiwanych, przy jednoczesnym traktowaniu parametru kowariancji jako ustalonego na poziomie oszacowania punktowego. Problem optymalizacyjny w ramach poszukiwania portfela o minimalnej zmienności, nie wykorzystuje w swej konstrukcji parametrów oczekiwanej stopy zwrotu, a jedynie parametry składowe macierzy kowariancji. Umożliwia to bezpośrednią ocenę wpływu przyjętego estymatora macierzy kowariancji na wyniki analizy portfelowej. W przypadku problemu poszukiwania portfela o minimalnej zmienności, warunkowej[7] minimalizacji podlega następująca funkcja kryterium:

$$\min_{\mathbf{w}\in\Re^p} \sigma_P = \sigma(\mathbf{w}) = \sqrt{\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}} \text{ przy warunku } \mathbf{1}'\mathbf{w} = 1 \wedge \mathbf{w} \geq 0, \tag{9}$$

Przy czym **w** jest poszukiwanym p-wymiarowym wektorem kolumnowym wag, **Σ** jest macierzą kowariancji stóp zwrotu składowych portfela, **1** jest p-wymiarowym wektorem kolumnowym złożonym z jedynek.

Innym przykładem problemu optymalizacyjnego analizy portfelowej, który wykorzystuje w funkcji celu wyłącznie parametry z macierzy kowariancji jest portfel ERC (ang. *equal risk contribution*). W portfelu ERC strukturę wag określa się w taki sposób, aby krańcowy udział w ryzyku portfela (mierzonego jego zmiennością $\sigma_P = \sqrt{\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}}$) dla każdego instrumentu składowego portfela był równy. Krańcowy wkład i-tej składowej portfela w jego łączne ryzyko wyraża się jako $\sigma_i(\mathbf{w}) = w_i \cdot \frac{\partial\sigma(\mathbf{w})}{\partial w_i}$, gdzie $\frac{\partial\sigma(\mathbf{w})}{\partial w_i} = \frac{w_i\sigma_i^2 + \sum_{j\neq i} w_j\sigma_{ij}}{\sigma(\mathbf{w})}$ oraz σ_i^2 jest i-tym elementem diagonalnym macierzy kowariancji stóp zwrotu, natomiast σ_{ij} to element na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny tej macierzy. Jako, że funkcja $\sigma(\mathbf{w})$ wyrażająca ryzyko portfela σ_P, jest funkcją jednorodną w stopniu 1, stąd na mocy twierdzenia Eulera $\sigma_P = \sigma(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{p}\sigma_i(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{p} w_i \cdot \frac{\partial\sigma(\mathbf{w})}{\partial w_i}$, czyli łączne ryzyko portfela można wyrazić jako sumę iloczynów pochodnych cząstkowych względem kolejnych zmiennych $\frac{\partial\sigma(\mathbf{w})}{\partial w_i}$ i wartości tych zmiennych w_i, co odpowiada sumie krańcowych wkładów poszczególnych instrumentów składowych portfela w jego zmienność. W przypadku portfela ERC jednym z możliwych sposobów wyrażenia zagadnienia optymalizacyjnego z warunkami ograniczającymi (założenie braku możliwości zajmowania pozycji krótkich na aktywach portfela) jest:

$$\min_{\mathbf{w}\in\Re^p} \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{\sigma_i(\mathbf{w})}{\sigma(\mathbf{w})} - \frac{1}{p}\right)^2 \text{ przy warunku } \mathbf{1}'\mathbf{w} = 1 \wedge \mathbf{w} \geq 0. \tag{10}$$

[7] Założenie braku dźwigni finansowej oraz braku możliwości zajmowania krótkich pozycji na instrumentach składowych portfela.

W ramach analizy portfelowej warto uwzględnić wpływ na rozkład stóp zwrotu, ich realizacji w najbliższej przeszłości. Prowadzi to do *dynamicznej analizy portfelowej*. Szczególnie istotnym elementem dynamicznej analizy portfelowej zakładającej codzienny *rebalancing*[8], jest trafne oszacowanie i prognozowanie warunkowej kowariancji (por np. Fleming i inni, 2001; Pooter i inni, 2008). W przypadku wykorzystania danych dziennych wskazuje się następującą konstrukcję ruchomego estymatora kowariancji warunkowej względem przeszłości procesu:

$$\mathbf{S}_t = \exp(-\alpha)\mathbf{S}_{t-1} + \alpha\exp(-\alpha)\mathbf{r}_{t-1}\mathbf{r}_{t-1}^{'}, \tag{11}$$

gdzie $\mathbf{S}_t$ to oszacowanie dziennej warunkowej kowariancji w dniu sesyjnym t, α to parametr zanikania (ang. *decay rate*), natomiast $\mathbf{r}_t$ to dzienna stopa zwrotu w dniu sesyjnym t, rozumiana jako przyrost logarytmów cen na zamknięcie w dniach t oraz $t-1$.

Analizy (por. Barndorff-Nielsen, Shephard, 2004) pokazują, że bardziej efektywne prognozy warunkowej kowariancji stóp zwrotu uzyskuje się, wykorzystując w ich konstrukcji macierz zrealizowanych kowariancji wyznaczoną z wykorzystaniem wewnątrzdziennych stóp zwrotu:

$$\mathbf{S}_t = \exp(-\alpha)\mathbf{S}_{t-1} + \alpha\exp(-\alpha)(\mathbf{V}_{t-1} + \boldsymbol{\eta}_{t-1}\boldsymbol{\eta}_{t-1}^{'}), \tag{12}$$

gdzie $\mathbf{V}_t$ to macierz zrealizowanej kowariancji (*ex post*) w dniu sesyjnym t, z kolei $\boldsymbol{\eta}_t$ to tzw. nocna stopa zwrotu (ang. *overnight*), definiowana jako przyrost pomiędzy logarytmem ceny na otwarcie w dniu t a logarytmem ceny na zamknięcie w dniu $t-1$, natomiast pozostałe symbole rozumiane są jak wyżej. Wartość parametru zanikania α można dobrać arbitralnie bądź też można dokonać jego estymacji za pomocą metody quasi-MNW, przy założeniu $\mathbf{r}_t = \mathbf{S}_t\,\boldsymbol{\varepsilon}_t$, $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\} \sim iid(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$.

Przyjmując, że przedział [0,1] odpowiada przedziałowi czasowemu dla pierwszego rozważanego dnia sesyjnego, dla t-tego dnia sesyjnego jest to odpowiednio przedział $[t-1,t]$, macierz zrealizowanej kowariancji $\mathrm{RCov}_{t,\Delta}$ definiuje się z wykorzystaniem wewnątrzdziennych stóp zwrotu za podokresy o długości Δ, przy czym $\Delta < 1$, stąd każdy t-ty dzień sesyjny obejmuje $\lfloor 1/\Delta \rfloor$ podokresów oraz związanych z nimi wewnątrzdziennych stóp zwrotu. Oszacowanie kowariancji zrealizowanej (ang. *realized covariation*) wyraża się następująco:

$$\mathrm{RCov}_{t,\Delta} = \sum_{i=(t-1)\cdot\lfloor 1/\Delta \rfloor+1}^{t\cdot\lfloor 1/\Delta \rfloor} \mathbf{r}_{i,\Delta}\mathbf{r}_{i,\Delta}^{'}, \tag{13}$$

gdzie $\mathrm{RCov}_{t,\Delta}$ to zrealizowana kowariancja w dniu sesyjnym t, natomiast $r_{i,\Delta}$ to wewnątrzdzienna logarytmiczna stopa zwrotu za i-ty okres o długości Δ, gdzie

[8] Wybór optymalnych wag portfela na podstawie parametrów rozkładu warunkowego względem przeszłości, w każdym kolejnym dniu sesyjnym.

$i=(t-1)\cdot\lfloor 1/\Delta\rfloor+1,\dots,t\cdot\lfloor 1/\Delta\rfloor$, przebiega indeksy wewnątrzdziennych stóp zwrotu w ramach *t*-tego dnia sesyjnego.

Zauważmy, że miara $\mathrm{RCov}_{t,\Delta}$ nie jest odporna na występowanie addytywnych skoków nakładających się na proces generujący ceny rozważanych aktywów. Zauważmy też, że logarytmiczne stopy zwrotu za okres Δ, można rozważać jako dyskretne przyrosty w ramach przyjętego *p*-wymiarowego procesu z czasem ciągłym $\{\mathbf{p}(s)\}_{s\geq 0}$, generującego logarytmy cen[9]:

$$\mathbf{r}_{i,\Delta}=\mathbf{p}(i\Delta)-\mathbf{p}\big((i-1)\Delta\big). \tag{14}$$

Boudt i inni (2011) zaproponowali odporny na występowanie skoków estymator kowariancji zrealizowanej ROWCov (ang. *realized outlyingness weighted covariation*). ROWCov wykorzystuje w swej pierwotnej konstrukcji odporny estymator wielowymiarowego rozrzutu MCD, niemniej jednak jako jego alternatywę można zastosować estymator PCS. Wartość oszacowania ROWCov wyznacza się jako sumę ważoną wewnątrzdziennych logarytmicznych stóp zwrotu, dla których wagi przypisywane są z wykorzystaniem odległości Mahalanobisa (będącej miernikiem stopnia odstawania obserwacji), wykorzystującej odporne oszacowanie rozrzutu okresowych (wewnątrzdziennych) stóp zwrotu w ramach tzw. lokalnego okna.

W ramach procedury obliczania ROWCov dokonuje się podziału okresu badania na lokalne okna o długości λ (przy czym $\lambda \leq 1$ oraz $\lambda > \Delta$), w ramach których to przedziałów czasowych dla przyjętego dla logarytmów cen procesu $\{\mathbf{p}(s)\}_{s\geq 0}$ z czasem ciągłym, w przypadku braku skoków, zakłada się stały poziom kowariancji chwilowej dla momentu *s*, tzn. $\mathbf{\Sigma}(s)=\mathbf{\Sigma}((l-1)\lambda)$, dla $s\in\big[(l-1)\lambda,l\lambda\big)$, $l \in Z$, stąd też dla tego przedziału, dla uproszczenia przyjmuje się oznaczenie $\mathbf{\Sigma}_l=\mathbf{\Sigma}((l-1)\lambda)$. W ramach lokalnego okna można wyróżnić $\lfloor\lambda/\Delta\rfloor$ podokresów o długości Δ. Zbiór indeksów stóp zwrotu z okresów o długości Δ, należących do tego samego okna lokalnego co stopa zwrotu $\mathbf{r}_{t,\Delta}$ wyraża się jako $N_i=\big\{j=(l-1)\lfloor\lambda/\Delta\rfloor+1,\dots,l\lfloor\lambda/\Delta\rfloor:\ l=\lceil i\lambda/\Delta\rceil\big\}$. I tak wartość MCD albo PCS $\hat{\mathbf{\Sigma}}_l$, będącą oszacowaniem chwilowej macierzy kowariancji w *l*-tym lokalnym oknie, które obejmuje stopę $\mathbf{r}_{t,\Delta}$, czyli $l=\lceil i\lambda/\Delta\rceil$, wyznacza się w oparciu o standaryzowane ze względu na długość okresu Δ stopy zwrotu $\mathbf{r}_{j,\Delta}\cdot\Delta^{-\frac{1}{2}}$, $j \in N_i$. Przy określaniu odległości Mahalanobisa względem *p*-wymiarowego wektora zer dla stopy zwrotu $r_{i,\Delta}$, wykorzystuje się wartość odpornego estymatora rozrzutu, dla lokalnego okna $l=\lceil i\Delta/\lambda\rceil$, do którego przynależy *i*-ta okresowa stopa zwrotu: $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{i,\Delta}\Delta\equiv\hat{\mathbf{\Sigma}}_l\Delta$. Kwadrat odległości Mahalanobisa pomiędzy $\mathbf{r}_{i,\Delta}$ a wektorem zerowym,

9 Przykładem może być tutaj *p*-wymiarowy proces dyfuzyjny ze skokami o skończonej aktywności BSMFAJ (ang. *Brownian Semimartingale with Finite Activity Jumps*), będący rozszerzeniem procesu BSM (ang. *Brownian Semimartingale*) o składową opisującą dynamikę występowania skoków. Praca (Boudt i inni, 2011) zawiera opis procesów w kontekście wyznaczania macierzy zrealizowanej kowariancji oraz (odpornego na występowanie skoków) wnioskowania na temat parametrów związanych z procesem (tzw. kowariancji zintegrowanej ICov dla dnia sesyjnego).

przy macierzy kowariancji stóp zwrotu za okres Δ, wyrażonej przez $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{i,\Delta}\Delta$, dany jest następująco:

$$d^2_{i,\Delta} = \frac{\mathbf{r}'_{i,\Delta}\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}_{i,\Delta}\mathbf{r}_{i,\Delta}}{\Delta}. \tag{15}$$

Tak zdefiniowane kwadraty odległości $d^2_{i,\Delta}$ pełnią rolę argumentu dla funkcji wag. Jako funkcję wag $w:\Re_+ \to \Re_+$ przyjmuje się funkcję ciągłą, dla której wartości $w(z)z$ są ograniczone. Przykładem takiej funkcji jest funkcja wagowa *Hard Rejection* (HR): $w_{HR}(\mathrm{z}) = I(z \le k)$, gdzie I jest funkcją wskaźnikową oraz funkcja wagowa *Soft Rejection* (SR): $w_{SR}(z) = \min\left\{1, \frac{k}{z}\right\}$, gdzie $0 < k < \infty$ jest ustalonym parametrem[10]. Po wyborze funkcji wagowej wartość miernika ROWCov$_{t,\Delta}$ dla t-tego dnia sesyjnego, wyznacza się następująco:

$$\mathrm{ROWCov}_{t,\Delta} = c_w \sum_{i=(t-1)\cdot\lfloor 1/\Delta \rfloor+1}^{t\cdot\lfloor 1/\Delta \rfloor} w(d^2_{i,\Delta})\mathbf{r}_{i,\Delta}\mathbf{r}'_{i,\Delta}, \tag{16}$$

gdzie $\mathbf{r}_{i,\Delta}$ to wewnątrzdzienna logarytmiczna stopa zwrotu za i-ty okres o długości Δ, z kolei $w(d^2_{i,\Delta})$ to waga odpowiadająca i-tej stopie zwrotu, której wartość wyznaczana jest w oparciu o kwadrat odległości Mahalanobisa wektora, natomiast $c_w = \frac{p}{E[w(z)z]}$ to poprawka na zgodność ROWCov jako estymatora zintegrowanej kowariancji ICov (por. Boudt i inni, 2011) dla t-tego dnia sesyjnego w przypadku procesu BSMFAJ, a z jest zmienną losową o rozkładzie chi-kwadrat z p stopniami swobody.

Należy zaznaczyć, że ROWCov jest afinicznie ekwiwariantny (por. Boudt i inni, 2011).

Do odpornej dynamicznej analizy portfelowej wybrano akcje trzech spółek notowanych na GPW: KGHM, PEKAO oraz PKOBP, które charakteryzowały się wysoką płynnością (mierzoną przeciętnym czasem pomiędzy kolejnymi transakcjami). Jako okres badania przyjęto przedział od 2.07.2014 do 5.11.2015, co odpowiada $t \in \{0,1,\ldots,T = 340\}$ (próba objęła 341 dni sesyjne, w związku z brakiem danych dla nocnej stopy zwrotu dla daty 4.07.2014). Dane dzienne oraz dane transakcyjne dotyczące notowań przywołanych spółek pobrano z repozytorium Domu Maklerskiego BOŚ SA.

W badaniach często przyjmuje się długość lokalnego okna odpowiadającą pojedynczemu dniu sesyjnemu, tzn. $\lambda = 1$ oraz długości okresów Δ odpowiadających 1-, 5-, 10- lub 15-minutowym okresom. Biorąc pod uwagę płynność badanych akcji, zdecydowano się przyjąć $\Delta = 1/32$. Podjęto się budowy portfela o minimalnej zmienności z codziennym *rebalancingiem*, tzn. w celu określenia struktury wag dla każdego

[10] Przy założeniu, że logarytmy cen instrumentów generowane są przez p-wymiarowy proces BSM, $d^2_{i,\Delta}$ ma rozkład chi-kwadrat z p stopniami swobody, wtedy za wartość k, przyjmuje się wartość kwantyla 1-β (częstym wyborem jest $\beta = 0{,}001$ albo 0,005) wspomnianego rozkładu.

kolejnego dnia sesyjnego $t = 1,\ldots, T$, w minimalizowanej funkcji kryterium za macierz kowariancji przyjmuje się dla t-tego dnia sesyjnego, prognozę dotyczącą macierzy kowariancji warunkowej względem przeszłości procesu. Do oszacowania i prognozowania warunkowej względem przeszłości procesu macierzy kowariancji $\mathbf{S}_t$, przyjęto podejście nieparametryczne wykorzystujące ruchomy estymator zadany wzorem (12), przyjmując za $\mathbf{V}_t$, oparte na 15-minutowych stopach zwrotu[11] ($\Delta = 1/32$) oszacowania kowariancji zrealizowanej $\text{RCov}_{t,\Delta}$ oraz $\text{ROWCov}_{t,\Delta}$, bazujące na MCD i PCS, przyjmując lokalne okno $\lambda = 1$ (dla wykorzystywanych miar przyjęto symbole $\text{ROWCov}_{t,\Delta}^{MCD}$ oraz $\text{ROWCov}_{t,\Delta}^{PCS}$). Im wyższa wartość parametru zanikania α tym wyższy udział w $\mathbf{S}_t$ ostatnich poziomów mierników zrealizowanej kowariancji i mniej gładki przebieg w czasie wartości oszacowań warunkowej macierzy kowariancji. W pracy Pooter i inni (2008) proponuje się rozważenie wartości parametru zanikania $\alpha = 0{,}05$; 0,1 oraz 0,2.

Jako rozwiązania problemu optymalizacyjnego uzyskuje się wagi portfela dla każdego kolejnego t-tego dnia sesyjnego, w zależności od przyjętego za $\mathbf{V}_{t-1}$ miernika zrealizowanej kowariancji $\text{RCov}_{t-1,\Delta}$, $\text{ROWCov}_{t-1,\Delta}^{MCD}$ oraz $\text{ROWCov}_{t-1,\Delta}^{PCS}$, które oznaczane będą odpowiednio symbolami: $\mathbf{w}_t^{\text{RCov}}$, $\mathbf{w}_t^{\text{ROWCov, MCD}}$ oraz $\mathbf{w}_t^{\text{ROWCov, PCS}}$. Wektory wag pochodzące z sekwencji rozwiązań problemów optymalizacyjnych utworzą odpowiednie szeregi czasowe.

Stopę zwrotu portfela w t-tym dniu sesyjnym wyznacza się jako:

$$R_{P,t}{}^{m} = \mathbf{w}_t^{m}{}'\mathbf{R}_t, \tag{17}$$

gdzie $R_{P,t}{}^{m}$ to dzienna prosta stopa zwrotu w t-tym dniu sesyjnym dla portfela o strukturze wag w_t^m (dla danego portfela m zastępuje się odpowiednio RCov, ROWCov-MCD albo ROWCov-PCS), natomiast $\mathbf{R}_t$ to wektor dziennych prostych stóp zwrotu aktywów portfela w dniu sesyjnym t.

W celu oceny poziomu zmienności portfeli w ramach tzw. *backtestingu* wyznacza się wartości odchylenia standardowego stóp zwrotu rozważanych portfeli $R_{P,t}^{\text{RCov}}$, $R_{P,t}^{\text{ROWCov- MCD}}$ oraz $R_{P,t}^{\text{ROWCov-PCS}}$, w przywołanym wcześniej przedziale czasowym, z pominięciem pierwszych 30 dni sesyjnych, tzn. analiza objęła dni sesyjne $t = 31,\ldots,340$. Ponadto wyznacza się wartości pozostałych statystyk opisowych dla stóp zwrotu rozważanych portfeli.

W celu porównania zachowania się portfeli wykorzystujących w konstrukcji prognoz odporne oszacowania zrealizowanej kowariancji ROWCov (bazujące na MCD oraz PCS) z portfelem wykorzystującym w tym miejscu oszacowanie RCov, wyznacza się dla kolejnych dni sesyjnych nadwyżki stóp zwrotu dwóch pierwszych portfeli nad

---

[11] Empiryczne rozkłady rozważanych wewnątrzdziennych stóp zwrotu odzwierciedlają stylizowane fakty przedstawione m.in. w pracach Boudt i inni, 2011 i Hautsch, 2011, wskazujące na występowanie w dynamice wewnątrzdziennych stóp zwrotu (w szczególności tych dla krótkich interwałów czasowych) tzw. skoków (nie wynikających z działania głównego mechanizmu por. proces BSMFAJ), które mają charakter stosunkowo rzadko występujących obserwacji odstających, skutkujących sztucznym zwiększeniem zmienności.

stopą zwrotu portfela ostatniego (odpowiadają one stopom zwrotu z inwestycji polegającej na zajęciu pozycji długiej na porównywanym portfelu oraz pozycji krótkiej na portfelu z wagami $\mathbf{w}_t^{\mathrm{RCov}}$). Dodatkowo w celu oceny trafności przewidywań dotyczących warunkowej kowariancji oraz jej wpływu na zmienność portfela), wyznacza się dla każdego *t*-tego dnia sesyjnego, zmienność portfeli wykorzystując ocenę *ex post* zrealizowanej kowariancji:

$$\mathrm{sd}_{P,t}^{m} = \sqrt{\mathbf{w}_t^{m}{}'\mathbf{V}_t\mathbf{w}_t^{m}}\,. \tag{18}$$

Dla każdego *t*-tego dnia sesyjnego dla każdego z trzech rozważanych portfeli (tzn. o strukturach wag $\mathbf{w}_t^{\mathrm{RCov}}$, $\mathbf{w}_t^{\mathrm{ROWCov\text{-}MCD}}$ oraz $\mathbf{w}_t^{\mathrm{ROWCov\text{-}PCS}}$), dokonuje się pomiaru zmienności sd_t^m z wykorzystaniem macierzy kowariancji zrealizowanej *ex post* przyjmując za $\mathbf{V}_t$ trzy jej warianty $\mathrm{RCov}_{t,\Delta}$, $\mathrm{ROWCov}_{t,\Delta}^{MCD}$ oraz $\mathrm{ROWCov}_{t,\Delta}^{PCS}$, niezależnie od tego która miara została wykorzystana przy tworzeniu prognoz macierzy kowariancji warunkowej, będącej podstawą wyznaczania wag. We wszystkich powyżej wskazanych porównaniach zestawia się dodatkowo wyniki dla portfela z równymi wagami dla wszystkich instrumentów: $\mathbf{w}_t^{eq} = [1/3, 1/3, 1/3]'$. Dla stóp zwrotu portfela z równymi wagami przyjęto symbol $R_{P,t}^{\mathrm{eq}}$.

PORTFEL O MINIMALNEJ ZMIENNOŚCI

Sekwencyjną analizę dla portfela o minimalnej zmienności, wykonano dla trzech wartości parametru α = 0,05, 0,1 oraz 0,2, dla ruchomego oszacowania macierzy kowariancji warunkowej. W każdej z powyższych prób, dla wykorzystywanych w konstrukcji ROWCov estymatorów odpornych MCD i PCS, przyjmując, że parametr $h = \lfloor \gamma \cdot (\# N_i) \rfloor$, gdzie $\# N_i$ jest licznością zbioru N_i (obejmującego indeksy okresowych stóp zwrotu w tym samym oknie lokalnym co $\mathbf{r}_{i,\Delta}$), rozważono dwa poziomy γ = 0,5 oraz γ = 0,75. Jako funkcję wagową używaną przy określaniu wartości ROWCov przyjęto funkcję typu HR (ang. *hard rejection*), a parametr *k* ustalono, jako wartość kwantyla 1 – β rozkładu chi-kwadrat z p = 3 stopniami swobody, przyjmując β = 0,001.

Tworząc kod w języka R umożliwiający implementację procedury budowy portfeli korzystano z funkcji następujących pakietów: `xts` – Ryan i inni, 2013, `highfrequency` (funkcje `rCov`, `rOWCov`) – Boudt i inni, 2014, `fPortfolio` (funkcja `minvariancePortfolio`) – Wuertz i inni, 2009. Dla każdej z trzech rozważanych wartości parametru zanikania α, wyniki dotyczące portfela minimalnej zmienności uzyskane dla ruchomego oszacowania warunkowej kowariancji były bardzo zbliżone. Nieznacznie lepsze wyniki uzyskiwano wykorzystując ROWCov, wyznaczany przy wartości parametru $h = \lfloor 0{,}75 \cdot (\# N_i) \rfloor$ dla estymatora MCD oraz PCS. W związku z powyższymi ustaleniami, zgodnie z arbitralną decyzją, zaprezentowane zostaną wyniki dla konfiguracji α = 0,05 i $h = \lfloor 0{,}75 \cdot (\# N_i) \rfloor$, odnoszące się do stóp zwrotu portfela wyrażonych w punktach procentowych oraz zmienności portfela.

W celu oceny jakości konstruowanych sekwencyjnie portfeli, dla których warunkowej minimalizacji ze względu na wartości wag podlega funkcja opisująca zmienność stóp zwrotu portfela, jednym z głównych aspektów jest zbadanie poziomu zmienności stóp zwrotu w próbie w ramach *backtestingu*. Dokonuje się tego poprzez wyznaczenie odchylenia standardowego dla stóp zwrotu portfela zaobserwowanych w próbie obejmującej zakres czasowy *backtestingu*.

W *backtestingu* dla dni sesyjnych $t = 31,\dots,340$ odchylenie standardowe stóp zwrotu portfeli, dla których przyjęto szeregi wag $\mathbf{w}_t^{\mathrm{RCov}}$, $\mathbf{w}_t^{\mathrm{ROWCov\text{-}MCD}}$, $\mathbf{w}_t^{\mathrm{ROWCov\text{-}PCS}}$ oraz $\mathbf{w}_t^{eq}$, przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2.

Odchylenie standardowe stóp zwrotu portfeli minimalnej zmienności

m	RCov	ROWCov-MCD	ROWCov-PCS	Eq
odchylenie standardowe dla próby $R_{P,t}^{\;m}$, $t = 31,\dots,340$	1,3914	1,3893	1,3849	1,4350

Źródło: opracowanie własne.

Wartości odchylenia standardowego wyznaczone w próbie dla stóp zwrotu portfeli (powstałych poprzez optymalizację wag w ramach problemu portfela o minimalnej zmienności), były zbliżone niezależnie od tego czy w konstrukcji prognozy warunkowej kowariancji wykorzystano miarę RCov (odchylenie standardowe portfela wyniosło 1,3914), czy jej odporne odpowiedniki ROWCov-MCD i ROWCov-PCS (odchylenie standardowe odpowiednio 1,3893 i 1,3849). Biorąc pod uwagę wyniki *backtestingu*, wpływ wspomnianych odpornych odpowiedników na zmniejszenie poziomu zmienności wartości portfela można uznać za marginalny, jednocześnie zaobserwowany poziom zmienności portfeli minimalnego ryzyka był zauważalnie niższy od tego dla portfela z równymi wagami.

Pozostałe statystyki opisowe dla stóp zwrotu portfeli z wagami $\mathbf{w}_t^{\mathrm{RCov}}$, $\mathbf{w}_t^{\mathrm{ROWCov\text{-}MCD}}$, $\mathbf{w}_t^{\mathrm{ROWCov\text{-}PCS}}$ oraz $\mathbf{w}_t^{eq}$ ($t = 31,\dots,340$), przedstawiono w tabeli 3.

Tabela 3.

Statystyki opisowe stóp zwrotu portfeli minimalnej zmienności

m	$R_{P,t}^{\;m}$ średnia arytm.	$R_{P,t}^{\;m}$ mediana	$R_{P,t}^{\;m}$ Q1	$R_{P,t}^{\;m}$ Q3	$R_{P,t}^{\;m}$ min	$R_{P,t}^{\;m}$ max	$R_{P,t}^{\;m}$ rozstęp
RCov	-0,0890	-0,0863	-0,8530	0,7852	-6,2455	3,9933	10,2388
ROWCov-MCD	-0,0931	-0,0882	-0,8519	0,7462	-6,4611	3,9850	10,4461
ROWCov-PCS	-0,0908	-0,0904	-0,8616	0,7601	-6,0896	3,9753	10,0649
eq	-0,0660	-0,0248	-0,8601	0,7891	-6,6375	4,7572	11,3947

Źródło: opracowanie własne.

W rozważanym przypadku maksymalizacja oczekiwanej stopy zwrotu portfela nie jest zadana w ramach problemu optymalizacyjnego, co odzwierciedliło się w umiarkowanie niższych poziomach średnich stóp zwrotu portfeli z wagami $\mathbf{w}_t^{\mathrm{ROWCov\text{-}MCD}}$, $\mathbf{w}_t^{\mathrm{ROWCov\text{-}PCS}}$ oraz $\mathbf{w}_t^{\mathrm{RCov}}$ (średnia wartość stopy zwrotu portfeli odpowiednio na poziomie -0,0931, -0,0908 oraz -0,0890), względem portfela o równych wagach $\mathbf{w}_t^{eq}$ (średnia: -0,0660). Wartość minimalna stopy zwrotu $R_{P,t}^{\mathrm{ROWCov\text{-}PCS}}$ dla portfela wykorzystującego w konstrukcji prognoz ROWCov-PCS, jest wyższa od odpowiedników w pozostałych portfelach, w tym zauważalnie wyższa w relacji do minimum $R_{P,t}^{\mathrm{eq}}$. Najniższy rozstęp stóp zwrotu zaobserwowano dla portfela z prognozami skonstruowanymi z wykorzystaniem ROWCov-PCS.

Zmienność portfela w ujęciu dziennym nie jest bezpośrednio obserwowalna, tym samym poziom zmienności zrealizowanej $\mathrm{sd}_{P,t}^m$ indukowany przez wagi portfela oraz wartości oszacowania kowariancji zrealizowanej dla kolejnych dni sesyjnych, umożliwia badanie jego zmian w ujęciu dynamicznym. Sumaryczną informację o zmienności portfela $\mathrm{sd}_{P,t}^m$ można uzyskać poprzez wyznaczenie dla niej statystyk opisowych w ramach przyjętego przedziału czasowego (domyślnie takiego samego jak w ramach *backtestingu*).

Statystyki dotyczące mierników zrealizowanej zmienności portfela $\mathrm{sd}_{P,t}^m$ (mierniki te wyznaczono z wykorzystaniem trzech mierników zrealizowanej kowariancji $\mathbf{V}_t$: $\mathrm{RCov}_{t,\Delta}$, $\mathrm{ROWCov}_{t,\Delta}^{MCD}$, $\mathrm{ROWCov}_{t,\Delta}^{PCS}$), dla t = 31,…,340 zostały przedstawione w tabeli 4.

Tabela 4.

Mierniki zrealizowanej zmienności portfeli minimalnej zmienności

$\mathbf{V}_t$ Miara zreealizowanej kowariancji	m	$\mathrm{sd}_{P,t}^m$ średnia arytm.	$\mathrm{sd}_{P,t}^m$ mediana	$\mathrm{sd}_{P,t}^m$ Q1	$\mathrm{sd}_{P,t}^m$ Q3	$\mathrm{sd}_{P,t}^m$ min	$\mathrm{sd}_{P,t}^m$ max	$\mathrm{sd}_{P,t}^m$ rozstęp
$\mathrm{RCov}_{t,\Delta}$	RCov	1,0382	0,9734	0,7714	1,1865	0,3465	3,7506	3,4041
	ROWCov-MCD	1,0369	0,9717	0,7773	1,1946	0,3471	3,8488	3,5017
	ROWCov-PCS	1,0392	0,9696	0,7755	1,1984	0,3468	3,6829	3,3361
	eq	1,0363	0,9791	0,7752	1,2082	0,3516	3,9078	3,5562
$\mathrm{ROWCov}_{t,\Delta}^{MCD}$	RCov	0,9928	0,9446	0,7390	1,1509	0,3474	3,5836	3,2362
	ROWCov-MCD	0,9921	0,9450	0,7342	1,1550	0,3480	3,6617	3,3137
	ROWCov-PCS	0,9936	0,9499	0,7335	1,1547	0,3477	3,5285	3,1808
	eq	0,9899	0,9286	0,7415	1,1528	0,3526	3,7292	3,3766

$\mathbf{V}_t$ Miara zrealizowanej kowariancji	m	$\mathrm{sd}^m_{P,t}$ średnia arytm.	$\mathrm{sd}^m_{P,t}$ mediana	$\mathrm{sd}^m_{P,t}$ Q1	$\mathrm{sd}^m_{P,t}$ Q3	$\mathrm{sd}^m_{P,t}$ min	$\mathrm{sd}^m_{P,t}$ max	$\mathrm{sd}^m_{P,t}$ rozstęp
$\mathrm{ROWCov}^{PCS}_{t,\Delta}$	RCov	1,0044	0,9508	0,7558	1,1656	0,3474	3,7602	3,4128
	ROWCov-MCD	1,0037	0,9540	0,7553	1,1631	0,3480	3,8586	3,5106
	ROWCov-PCS	1,0053	0,9551	0,7489	1,1739	0,3477	3,6924	3,3447
	eq	1,0024	0,9400	0,7522	1,1805	0,3526	3,9180	3,5654

Źródło: opracowanie własne.

Przeciętne poziomy zrealizowanej zmienności *ex post* zbudowanych portfeli (bez względu na podstawę określenia struktury wag: $\mathbf{w}_t^{\mathrm{RCov}}$, $\mathbf{w}_t^{\mathrm{ROWCov\text{-}MCD}}$, $\mathbf{w}_t^{\mathrm{ROWCov\text{-}PCS}}$ oraz $\mathbf{w}_t^{eq}$), były wyższe (1,03–1,04), gdy podstawą wyznaczania miernika zmienności portfela była macierz RCov, niż miało to miejsce w przypadku zastosowania jej odpornych odpowiedników ROWCov-MCD (0,99) oraz ROWCov-PCS (1,00–1,01).

Różnice w przeciętnych poziomach zmienności zrealizowanej *ex post* – niezależnie od rozważanej miary, są dla portfeli o różnych strukturach wag bardzo niewielkie. Niekorzystnym wydaje się być fakt, iż przeciętny poziom zrealizowanej zmienności portfeli *ex post*, które w problemie optymalizacyjnym zakładały minimalizację ryzyka portfela (mierzonego w oparciu o prognozy warunkowej względem przeszłości kowariancji stóp zwrotu) nie był znaczący niższy niż ten dla portfeli o równych wagach. Tylko w przypadku stosowania ROWCov-MCD, najniższym średnim jej poziomem charakteryzował się portfel o strukturze wag $\mathbf{w}_t^{\mathrm{ROWCov\text{-}MCD}}$, dla którego prognozy warunkowej kowariancji wykorzystywały w swej konstrukcji tę samą miarę zrealizowanej kowariancji. Także w tym przypadku różnica w rozważanym poziomie zmienności względem pozostałych portfeli była znikoma.

Statystyki dotyczące nadwyżki stopy zwrotu $R_{P,t}^{\ m}$ zestawianego portfela nad stopą zwrotu portfela o strukturze wag $\mathbf{w}_t^{\mathrm{RCov}}$, t = 31,…,340, przedstawiono w tabeli 5.

Tabela 5.

Statystyki nadwyżek stóp zwrotu „odpornych” portfeli minimalnej zmienności

m \ $R_{P,t}^{\ m} - R_{P,t}^{\mathrm{RCov}}$	średnia arytm.	mediana	odch. stand.	Q1	Q3	min	max
ROWCov-MCD	-0,0040	0,0017	0,0602	-0,0209	0,0213	-0,6301	0,2122
ROWCov-PCS	-0,0017	0,0002	0,0440	-0,0203	0,0208	-0,2654	0,1559
eq	0,0230	0,0029	0,2491	-0,0608	0,0764	-0,9943	1,1772

Źródło: opracowanie własne.

Statystyki dotyczące kształtowania się wskaźnika Giniego mierzącego koncentrację (nierównomierność) rozkładu wag portfela, w przedziale czasowym t = 31,…,340, przedstawiono w tabeli 6.

Tabela 6.

Wskaźniki koncentracji rozkładu wag portfeli minimalnej zmienności

Struktura wag portfela	Gini – wagi średnia arytm.	Gini – wagi mediana	Gini – wagi odch. stand.	Gini – wagi Q1	Gini – wagi Q3	Gini – wagi min	Gini – wagi max
$\mathbf{w}_t^{\mathrm{RCov}}$	0,1056	0,0820	0,0670	0,0561	0,1398	0,0049	0,2709
$\mathbf{w}_t^{\mathrm{ROWCov\text{-}MCD}}$	0,1039	0,0826	0,0701	0,0516	0,1657	0,0047	0,2608
$\mathbf{w}_t^{\mathrm{ROWCov\text{-}PCS}}$	0,1081	0,0913	0,0705	0,0504	0,1564	0,0015	0,2638
$\mathbf{w}_t^{eq}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Źródło: opracowanie własne.

Przeciętny poziom koncentracji (nierównomierności) wag był dla portfeli o strukturze $\mathbf{w}_t^{\mathrm{RCov}}$, $\mathbf{w}_t^{\mathrm{ROWCov\text{-}MCD}}$, $\mathbf{w}_t^{\mathrm{ROWCov\text{-}PCS}}$ zbliżony i niewielki, zawierał się w przedziale 0,10–0,11 (mediany: 0,08–0,09). W przypadku portfela z równymi wagami $\mathbf{w}_t^{eq}$, w związku z definicją wskaźnika Giniego, poziom nierówności jest niezmiennie zerowy.

Statystyki dotyczące kształtowania się poziomu koncentracji mierzonej wskaźnikiem Giniego, dotyczącej krańcowego wkładu poszczególnych aktywów w łączne ryzyko portfela, wyrażane przez $\mathrm{sd}_{P,t}^{m} = \sqrt{\mathbf{w}_t^{m}\,'\mathbf{V}_t\mathbf{w}_t^{m}}$ (za macierz zrealizowanej kowariancji *ex post* $\mathbf{V}_t$ przyjęto $\mathrm{RCov}_{t,\Delta}$ – ze względu na podobieństwo wyników pomija się prezentację wyników dla $\mathbf{V}_t$ równego $\mathrm{ROWCov}_{t,\Delta}^{MCD}$, oraz $\mathrm{ROWCov}_{t,\Delta}^{PCS}$), w przedziale czasowym t = 31,…,340, przedstawiono w tabeli 7.

Tabela 7.

Wskaźniki koncentracji wkładów aktywów w łączne ryzyko portfeli minimalnej

Struktura wag portfela	Gini – wkład w ryzyko średnia arytm.	Gini – wkład w ryzyko mediana	Gini – wkład w ryzyko odch. stand.	Gini – wkład w ryzyko Q1	Gini – wkład w ryzyko Q3	Gini – wkład w ryzyko min	Gini – wkład w ryzyko max
$\mathbf{w}_t^{\mathrm{RCov}}$	0,1955	0,1856	0,0971	0,1222	0,2552	0,0176	0,5718
$\mathbf{w}_t^{\mathrm{ROWCov\text{-}MCD}}$	0,1950	0,1903	0,0970	0,1216	0,2583	0,0095	0,5744
$\mathbf{w}_t^{\mathrm{ROWCov\text{-}PCS}}$	0,1991	0,1953	0,0991	0,1294	0,2650	0,0066	0,5756
$\mathbf{w}_t^{eq}$	0,1442	0,1313	0,0802	0,0895	0,1883	0,0145	0,5758

Źródło: opracowanie własne.

Przeciętny poziom koncentracji krańcowych wkładów aktywów w ryzyko portfela (indukowane przez wagi portfela oraz zrealizowaną macierz kowariancji $\text{RCov}_{t,\Delta}$), był zbliżony dla portfeli optymalizowanych w kierunku minimalnej zmienności (tzn. o strukturze wag $\mathbf{w}_t^{\text{RCov}}$, $\mathbf{w}_t^{\text{ROWCov-MCD}}$, $\mathbf{w}_t^{\text{ROWCov-PCS}}$) i należał do przedziału 0,19–0,20. Średni poziom koncentracji ryzyka tych portfeli był wyższy w porównaniu do portfela o równych wagach $\mathbf{w}_t^{eq}$, dla którego wyniósł 0,14.

W przypadku sekwencyjnej konstrukcji portfeli ERC problem optymalizacyjny sprowadza się do określenia wag, przy odpowiednich ograniczeniach, aby krańcowy udział każdej składowej portfela w jego ryzyku był równy. Ryzyko portfela określone jest przez $\sigma_P = \sigma(\mathbf{w}) = \sqrt{\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}}$, przy krańcowym wkładzie *i*-tej składowej portfela definiowanej przez $\sigma_i(\mathbf{w}) = w_i \cdot \dfrac{\partial\sigma(\mathbf{w})}{\partial w_i}$, dla każdego dnia sesyjnego parametr kowariancji zastępuje się prognozą $\mathbf{S}_t$ dotycząca warunkowej względem przeszłości macierzy kowariancji. W celu dokonania porównania wyników z tymi prezentowanymi wcześniej dla portfela o minimalnej wariancji, przyjęto jako podstawę prognoz ten sam co w poprzednim przypadku model warunkowej kowariancji.

Tworząc kod R przyjętej procedury budowy portfeli ERC poza wcześniej wymienianymi pakietami wykorzystano funkcję `PERC` pakietu `FRAPO` – Pfaff, 2011.

Badając jakości tworzonych portfeli ERC, ciężar przenosi się z oceny poziomu ich ryzyka $\text{sd}_{P,t}^{m}$, na pomiar równomierności krańcowych wkładów składowych portfela w to ryzyko. Zarówno ryzyko portfela jak i krańcowy wkład w nie, dla kolejnych dni sesyjnych wyznacza się z wykorzystaniem wyznaczonej *ex post* (w oparciu o wewnątrzdzienne stopy zwrotu aktywów) macierzy zrealizowanej kowariancji (w wariancie RCov, ROWCov-MCD, ROWCov-PCS).

Pomiaru stopnia koncentracji (nierówności) krańcowych wkładów w ryzyko portfeli, dla kolejnych dni sesyjnych dokonuje się z wykorzystaniem wskaźnika Giniego. Analizowano tak jak w poprzednim przypadku przedział czasowy $t = 31,\ldots,340$. Dodatkowo policzono podstawowe statystyki opisowe stóp zwrotu portfeli w ramach *backtestingu*.

W *backtestingu* dla dni sesyjnych $t = 3l,\ldots,340$ odchylenie standardowe stóp zwrotu portfeli ERC, dla których przyjęto szeregi wag $\mathbf{w}_t^{\text{RCov}}$, $\mathbf{w}_t^{\text{ROWCov-MCD}}$, $\mathbf{w}_t^{\text{ROWCov-PCS}}$ oraz $\mathbf{w}_t^{eq}$, przedstawiono w tabeli 8.

Tabela 8.

Odchylenie standardowe stóp zwrotu portfeli ERC

m	RCov	ROWCov-MCD	ROWCov-PCS	eq
odchylenie standardowe dla próby $R_{P,t}^{m}$, $t = 31,\ldots,340$	1,4162	1,4171	1,4136	1,4350

Źródło: opracowanie własne.

Wartość odchylenia standardowego wyznaczona dla stóp zwrotu portfeli ERC w przedziale czasowym objętym *backtestingiem*, kształtowała się na zbliżonym poziomie, powyżej 1,41, który był wyższy niż w przypadku portfeli minimalnej zmienności – 1,38–1,39 (w przypadku portfeli ERC problem optymalizacyjny nie obejmuje minimalizacji ich zmienności), a tym samym niższy niż w przypadku portfeli o równych wagach – 1,44. Statystyki dotyczące kształtowania się wskaźnika Giniego mierzącego koncentrację (nierównomierność) rozkładu wag portfeli ERC, w przedziale czasowym t = 31,…,340, przedstawiono w tabeli 9.

Tabela 9.

Wskaźniki koncentracji rozkładu wag portfeli ERC

Struktura wag portfela	Gini – wagi średnia arytm.	Gini – wagi mediana	Gini – wagi odch. stand.	Gini – wagi Q1	Gini – wagi Q3	Gini – wagi min	Gini – wagi max
$\mathbf{w}_t^{\mathrm{RCov}}$	0,0327	0,0267	0,0212	0,0182	0,0407	0,0017	0,0900
$\mathbf{w}_t^{\mathrm{ROWCov\text{-}MCD}}$	0,0307	0,0262	0,0202	0,0164	0,0420	0,0017	0,0826
$\mathbf{w}_t^{\mathrm{ROWCov\text{-}PCS}}$	0,0330	0,0299	0,0218	0,0162	0,0432	0,0004	0,0867
$\mathbf{w}_t^{eq}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Źródło: opracowanie własne.

Przeciętny poziom nierównomierności rozkładu wag dla portfeli ERC był bardzo niewielki, wartość wskaźnika Giniego równa 0,03. Oznacza to, że przeciętnie struktura portfela ERC była zbliżona do portfela z równymi wagami. Nawet maksymalna odnotowana wartość wskaźnika Giniego dla wag była niewielka i wynosiła 0,08–0,09.

Głównym kryterium oceny jakości zbudowanych portfeli ERC jest stopień równomierności krańcowych wpływów składowych portfela na jego łączne ryzyko, które to mierniki wyznaczane są *ex post* dla kolejnych dni sesyjnych, w oparciu o trzy warianty kowariancji zrealizowanej: RCov, ROWCov-MCD, ROWCov-PCS. Jego oceny dokonuje się w oparciu o szeregi czasowe wartości wskaźników Giniego. Statystyki dotyczące kształtowania się poziomu koncentracji, dotyczącej krańcowego wkładu poszczególnych aktywów w łączne ryzyko portfeli ERC, wyrażane przez $\mathrm{sd}_{P,t}^{m} = \sqrt{\mathbf{w}_t^{m}{}'\mathbf{V}_t\mathbf{w}_t^{m}}$ w przedziale czasowym t = 31,…,340 zestawiono w tabeli 10.

Tabela 10.

Wskaźniki koncentracji wkładów aktywów w łączne ryzyko portfeli ERC

Struktura wag portfela	Gini – wkład w ryzyko średnia arytm.	Gini – wkład w ryzyko mediana	Gini – wkład w ryzyko odch. stand.	Gini – wkład w ryzyko Q1	Gini – wkład w ryzyko Q3	Gini – wkład w ryzyko min	Gini – wkład w ryzyko max
$\mathbf{w}_t^{\mathrm{RCov}}$	0,1423	0,1319	0,0819	0,0865	0,1843	0,0050	0,5745
$\mathbf{w}_t^{\mathrm{ROWCov\text{-}MCD}}$	0,1418	0,1310	0,0806	0,0861	0,1875	0,0029	0,5753
$\mathbf{w}_t^{\mathrm{ROWCov\text{-}PCS}}$	0,1428	0,1314	0,0813	0,0881	0,1868	0,0067	0,5757
$\mathbf{w}_t^{eq}$	0,1442	0,1313	0,0802	0,0895	0,1883	0,0145	0,5758

Źródło: opracowanie własne.

Dla portfeli ERC przeciętny stopień nierównomierności wkładów w ryzyko aktywów wyrażający się wartością wskaźnika Giniego 0,14 wydaje się być wysoki, tym bardziej, że dla tych portfeli problem optymalizacyjny, wykorzystujący w swej konstrukcji prognozy warunkowej kowariancji, zakłada minimalizację odstępstw pomiędzy indywidualnymi udziałami w łącznym ryzyku portfela. Wspomniany poziom jest prawie identyczny z tym dla portfeli o równych wagach, co ma związek z ogólną tendencją do równomiernego rozkładu wag w skonstruowanych portfelach ERC. Maksymalna wartość wskaźnika Giniego dla wkładów w ryzyko portfeli ERC, była bardzo wysoka i wynosiła 0,57–0,58, przy górnym kwartylu na poziomie 0,18–0,19. Co prawda przeciętny poziom nierównomierności krańcowych wkładów w ryzyko portfeli ERC był niższy niż w przypadku portfeli minimalnej zmienności – przeciętna wartość wskaźnika Giniego na poziomie 0,19–0,20. Wyniki dla portfeli ERC wydają się być niezadowalające, bez względu na to, które miary zrealizowanej kowariancji wykorzystano w ramach konstrukcji prognoz warunkowej kowariancji, klasyczny ROWCov, czy też odporne ROWCov-MCD i ROWCov-PCS.

5. PODSUMOWANIE

Biorąc pod uwagę wyniki przedstawionych analiz empirycznych, wpływ zastosowania odpornych oszacowań zrealizowanej kowariancji zamiast klasycznego oszacowania ROWCov na poprawę wyników konstruowanych portfeli okazał się być niewielki. Zarówno w przypadku portfeli, dla których celem jest uzyskanie minimalnej zmienności stóp zwrotu portfela w ramach *backtestingu* oraz poziomu jego zrealizowanej zmienności – ryzyka, jak też portfeli ERC, w których dąży się do uzyskania identycznego wpływu poszczególnych aktywów na łączne ryzyko, zastosowanie podejścia odpornego nie dało znaczącej poprawy wartości najważniejszych kryteriów oceny w danej kategorii portfeli. W przypadku badań symulacyjnych, gdzie generowano szeregi czasowe zawierające różnego rodzaju obserwacje odstające obserwowano zysk związany z zastępowaniem estymatora klasycznego jego odpornym odpowiednikiem. W kontekście prowadzenia badań na podstawie tzw. wielkich zbiorów danych warto podkreślić, że estymator klasyczny można obliczać rekurencyjnie tzn. oszacowanie z chwili *t* można wykorzystać w chwili *t* + 1. Jak do tej pory estymatory odporne nie posiadają tej ważnej cechy wpływającej na jego złożoność obliczeniową.

LITERATURA

Barndorff-Nielsen O. E., Shephard N., (2004), Econometric Analysis of Realised Covariation: High Frequency Covariance, Regression and Correlation in Financial Economics, *Econometrica*, 72, 885–925.

Boudt K., Cornelissen J., Payseur S., (2014), Highfrequency: Toolkit for the Analysis of Highfrequency Financial Data in R, URL: http://cran.r-project.org/web/packages/highfrequency/vignettes/highfrequency.pdf.

Boudt K., Croux C., Laurent S., (2011), Outlyingness Weighted Covariation, *Journal of Financial Econometrics*, 9 (4), 657–684.

Butler R. W., Davies P. L., Jhun M., (1993), Asymptotics for the Minimum Covariance Determinant Estimator, *The Annals of Statistics*, 1385–1400.

Croux C., Haesbroeck G., (1999), Influence Function and Efficiency of the Minimum Covariance Determinant Scatter Matrix Estimator, *Journal of Multivariate Analysis*, 71 (2), 161–190.

Davies P. L., (1987), Asymptotic Behaviour of S-estimates of Multivariate Location Parameters and Dispersion Matrices, *The Annals of Statistics*, 1269–1292.

Fiszeder P., (2009), *Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych*, UMK, Toruń

Fleming J., Kirby C., Ostdiek B., (2001), The Economic Value of Volatility Timing, *The Journal of Finance*, 56 (1), 329–352.

Fleming J., Kirby C., Ostdiek B., (2003), The Economic Value of Volatility Timing Using “Realized” Volatility, *Journal of Financial Economics* 67, 473–509.

Hautsch N., (2011), *Econometrics of Financial High-frequency Data*, Springer Science & Business Media.

Hubert M., Rousseeuw P. J., Verdonck T., (2012), A Deterministic Algorithm for Robust Location and Scatter, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 21 (3), 618–637.

Kosiorowski D., Zawadzki Z., (2014), Selected Issues Related to Online Calculation of Multivariate Robust Measures of Location and Scatter, w: Papież M., Śmiech S., (red.), Proceedings of 8th A. Zeliaś International Conference, Zakopane 2014, 87–96.

Kosiorowski D., (2016), Dilemmas of Robust Analysis of Economic Data Streams, *Journal of Mathematical Sciences* (Springer), 218 (2), 167–181.

Kosiorowski D., (2015), Two Procedures for Robust Monitoring of Probability Distributions of Economic Data Streams, *Operational Research and Decisions*, 1, 57–79.

Kosiorowska E., Kosiorowski D. Zawadzki Z., (2015), Evaluation of the Fourth Millenium Development Goal Realisation Using Robust and Nonparametric Tools Offered by a Data Depth Concept, *Folia Oeconomica Stietiniensia*, 15 (1), 34–52.

Maronna R. A., Martin D., Yohai V., (2006), *Robust Statistics*, John Wiley & Sons, Chichester.

Pfaff B., (2013), *Financial Risk Modelling and Portfolio Optimisation with R*, John Wiley & Sons Ltd, London.

Pison G., Van Aelst S., Willems G., (2002), Small Sample Corrections for LTS and MCD, *Metrika*, 55 (1-2), 111–123.

Pooter M. D., Martens M., Dijk D. V., (2008), Predicting the Daily Covariance Matrix for S&P 100 Stocks Using Intraday Data-but which frequency to use?, *Econometric Reviews*, *27* (1–3), 199–229.

Schmitt E., Öllerer V., Vakili K., (2014), The Finite Sample Breakdown Point of PCS, *Statistics & Probability Letters*, *94*, 214–220.

Rousseeuw P. J., (1984), Least Median of Squares Regression, *Journal of the American Statistical Association*, 79, 871–880.

Rousseeuw P. J., Driessen K. V., (1999), A Fast Algorithm for the Minimum Covariance Determinant Estimator, *Technometrics*, 41 (3), 212–223.

Rousseeuw P., Croux C., Todorov V., Ruckstuhl A., Salibian-Barrera M., Verbeke T., Maechler M., (2015), robustbase: Basic Robust Statistics. R package version 0.92-5. URL http://CRAN.R-project.org/package=robustbase.

Ryan J. A., Ulrich J. M., (2011), xts: Extensible Time Series. R package version *0.8-2*.

Todorov V., Filzmoser P., (2009), An Object-Oriented Framework for Robust Multivariate Analysis, *Journal of Statistical Software*, 32 (3), 1-47. URL http://www.jstatsoft.org/v32/i03/.

Vakili K., Schmitt E., (2014), Finding Multivariate Outliers with FastPCS, *Computational Statistics & Data Analysis*, 69, 54–66.

Wuertz D., Chalabi Y., Chen W., Ellis A., (2009), *Portfolio Optimization with R/Rmetrics*, Rmetrics eBook, Rmetrics Association and Finance Online, Zurich.

PROGNOZOWANIE WARUNKOWEJ KOWARIANCJI Z WYKORZYSTANIEM ODPORNYCH ESTYMATORÓW ROZRZUTU MCD I PCS W ANALIZIE PORTFELOWEJ

Streszczenie

W artykule porównujemy dwa macierzowe estymatory wielowymiarowego rozrzutu – estymator minimalnego wyznacznika macierzy kowariancji MCD z nową propozycją estymatora minimalizującego kryterium inkongruencji PCS w kontekście ich zastosowań w finansach. Przedstawiamy zasadnicze idee leżące u podłoża rozpatrywanych estymatorów. Analizujemy je za pomocą symulacji oraz za pomocą przykładów empirycznych dotyczących konstruowania portfeli inwestycyjnych.

Słowa kluczowe: odporny estymator rozrzutu, MCD, PCS, odporna analiza portfelowa, zrealizowana kowariancja, portfel o minimalnym ryzyku, portfel ERC

CONDITIONAL COVARIANCE PREDICTION IN PORTFOLIO ANALYSIS USING MCD AND PCS ROBUST MULTIVARIATE SCATTER ESTIMATORS

Abstract

In this paper we compare two matrix estimators of multivariate scatter – the minimal covariance determinant estimator MCD with a new proposal an estimator minimizing an incongruence criterion PCS in a context of their applications in economics. We analyze the estimators using simulation studies and using empirical examples related to issues of portfolio building.

In a decision process we often make use of multivariate scatter estimators. Incorrect value of these estimates may result in financial losses. In this paper we compare two robust multivariate scatter estimators – MCD (minimum covariance determinant) and recently proposed PCS (projection congruent subset), which are affine equivariant and have high breakdown points. In the empirical analysis we make use of them in the procedure of weights setting for minimum variance and equal risk contribution (ERC) portfolios.

Keywords: robust estimator of multivariate scatter, MCD, PCS, robust portfolio analysis, realized covariance, minimum risk portfolio, equal risk contribution portfolio