

ŁUKASZ LENART<sup>1</sup>, MATEUSZ PIPIEŃ<sup>2</sup>KONCEPCJA WSTĘGOWEGO ZEGARA CYKLU KONIUNKTURALNEGO  
W UJĘCIU NIEPARAMETRYCZNYM<sup>3</sup>

## 1. WPROWADZENIE

Zegary cyklu koniunkturalnego są powszechnie stosowanym narzędziem w monitorowaniu i prezentacji aktualnej pozycji cyklicznej gospodarki. Narzędzie to jest z powodzeniem stosowane w wielu bankach centralnych oraz instytucjach, w których analiza aktualnej pozycji cyklu koniunkturalnego jest ważna w celu podjęcia optymalnych decyzji. Popularność zegara ma swe źródło w prostym w interpretacji sposobie wizualizacji zmian w cyklu koniunkturalnym, który odnosi się bezpośrednio do wykresu fazowego. Zegar jest stosowany między innymi przez EUROSTAT, sprawozdawczość statystyczną OECD, Statistics Netherlands, Statistisches Bundesamt Deutschland (patrz Abberger, Nierhaus, 2010) oraz wielu bankach centralnych.

Podejście, które jest wykorzystywane w konstrukcji zegara cyklu opiera się w głównej mierze na analizie dynamiki wyodrębnionych wahań, które utożsamia się z wahaniami aktywności gospodarczej. Wnioski jakie są wynikiem obserwacji dynamiki zegara są jednak bardzo często obarczone dużą niepewnością wynikającą z przyjętej metodologii wyodrębnienia komponentu cyklicznego. Mechanizm zegara cyklu koniunkturalnego oparty jest bowiem w głównej mierze na dynamice wyodrębnionych wahań utożsamianych z wahaniami aktywności gospodarczej. Wszystkie kwestie jakie dotyczą poprawnego wyodrębnienia wahań cyklicznych przenoszą się zatem automatycznie na poprawną dynamikę zegara cyklu. Jednym z kluczowych problemów podczas wyodrębniania wahań utożsamianych z wahaniami aktywności gospodarczej na podstawie wskaźników makroekonomicznych jest dobór parametrów. Jeśli metodą wyodrębniania jest filtr pasmowo-przepustowy wtedy różne wartości parametrów metody mogą wpływać znacząco na otrzymane wyniki. W przypadku

---

<sup>1</sup> Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Wydział Finansów, Katedra Matematyki, ul. Rakowicka 27, 31-510 Kraków, Polska.

<sup>2</sup> Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Wydział Zarządzania, Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych, ul. Rakowicka 27, 31-510 Kraków, Polska, autor prowadzący korespondencję – e-mail: eepipien@cyf-kr.edu.pl.

<sup>3</sup> Badania finansowane przez Narodowe Centrum Nauki w ramach grantu OPUS, numer grantu DEC-2013/09/B/HS4/01945.

filtracji filtrem zaproponowanym przez Hodricka, Prescottta (1997) (w skrócie HP) kluczowy jest dobór parametru wygładzającego  $\lambda$ .

Celem pracy jest uwzględnienie w metodzie wyodrębniania cyklu filtrem HP przedziału dla parametru  $\lambda$ , zamiast pojedynczej arbitralnej wartości. W ten sposób interpretacji podlega nie arbitralnie wyodrębniony cykl dla jednego parametru wygładzającego a znacznie szersze spektrum wahań cyklicznych. W oparciu o tak otrzymane spektrum wahań cyklicznych skonstruowano nieparametryczny zegar koniunkturalny (wahań cyklicznych) uwzględniający przedział parametrów w metodzie HP (tzw. *wstęgowy zegar koniunkturalny*). Wahania skonstruowanego zegara zdekomponowano na wahania fazy cyklu oraz wahania amplitudy cyklu. W analizie fazy wahań cyklicznych również uwzględniono przedział parametrów wygładzających, tworząc tzw. *wstęgowy wykres fazy cyklu*.

W artykule przedstawiono też metodę ilustracji dwóch charakterystyk cykliczności, to jest fazy i amplitudy w sposób odseparowany. Wyodrębnienie fazy cyklu z pominięciem jego amplitudy może bowiem dostarczyć bardziej precyzyjnego określenia stanu koniunktury, bez wnikania w szczegóły dotyczące głębokości jej wahań. Wyniki empiryczne w ramach tego problemu wyraźnie wskazują na potrzebę określenia dodatkowo odrębnej fazy cyklu, zwaną przez autorów fazą neutralną.

Rozdział 2 przedstawia ideę konstrukcji zegara cyklu koniunkturalnego opartego na jednowymiarowym realnym wskaźniku makroekonomicznym. W rozdziale 3 zaproponowano konstrukcję nieparametrycznego zegara cyklu koniunkturalnego zgodnie z równaniem modelu wprowadzonym w pracy Lenart, Pipień (2013). W części empirycznej rozdziału wskazano na wrażliwość dynamiki zegara dla PKB Polski na różne wartości parametru wygładzającego metody HP. Kolejny rozdział przedstawia metodologię odseparowania fazy od wahań cyklicznych na podstawie dynamiki wstęgowego zegara cyklu. W części empirycznej tego rozdziału proces fazy wyodrębniono dla wcześniej analizowanego wskaźnika PKB dla Polski oraz dla: Belgii, Czech, Estonii, Francji, Niemiec oraz Bułgarii, gdzie uwagę zwrócono na wrażliwość fazy na wartość parametru wygładzającego. W analizie tej rozważono okres o raczej niskiej aktywności gospodarczej (bez wyraźnych oznak poprawy lub pogorszenia koniunktury).

## 2. KONCEPCJA ZEGARA CYKLU KONIUNKTURALNEGO

Zegar cyklu ilustruje cztery możliwe stany aktywności gospodarczej, zgodnie z przyjętymi w literaturze czterema fazami cyklu koniunkturalnego, to jest fazą ekspansji, spowolnienia, recesji oraz ożywienia. Naniesione na układzie współrzędnych punkty zegara, które opisują wartości poziomu cyklu odchyłeń od trendu, oraz jego przyrostów wartości, tworzą trajektorię ruchu w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Niech dla pewnego zaobserwowanego szeregu czasowego niech  $\{C_t : t \in \mathbb{Z}\}$  będzie wyodrębnionym cyklem odchyłeń od długookresowego trendu. Zegar cyklu koniunkturalnego jest zbiorem punktów w  $\mathbb{R}^2$  postaci  $\{(C_t - C_{t-1}, C_t) : t \in \mathbb{Z}\}$ .

Przejście rozważanej trajektorii przez pierwszą ćwiartkę układu współrzędnych wskazuje na okres poprawy koniunktury, z dodatnim wyhamowywanym tempem zmian cyklu odchyłeń. Zbliżanie się trajektorii do drugiej ćwiartki układu współrzędnych wskazuje zaś na coraz słabszą dynamikę wzrostu aktywności. Prowadzi to do przejścia przez górny punkt zwrotny cyklu odchyłeń i wejście trajektorii do drugiej ćwiartki układu współrzędnych. Następuje wtedy pogorszenie koniunktury, przy ujemnej stopie wzrostu cyklu odchyłeń. Trzecia ćwiartka to kontynuacja okresu pogarszania się koniunktury, przy rosnącej stopie wzrostu cyklu odchyłeń, jednak w dalszym ciągu ujemnej. Przejście z trzeciej do czwartej ćwiartki układu współrzędnych oznacza przejście przez tak zwany dolny punkt zwrotny cyklu odchyłeń. W czwartej ćwiartce układu współrzędnych mamy do czynienia z okresem poprawy koniunktury, z dodatnią i rosnącą stopą wzrostu z cyklu odchyłeń.

W niniejszym artykule przedstawiono również podejście alternatywne, w którym, przy prezentacji pozycji cyklicznej na zegarze, wzięto pod uwagę także element trendu zjawiska. Przedstawiono zatem na osi poziomej pierwsze różnice łącznie trendu i cyklu odchyłeń, zaś na osi pionowej – wartości cyklu odchyłeń. Wariant ten uwzględnia zatem (na osi poziomej) zmiany nie tylko wahań cyklicznych, lecz łączną dynamikę trendu i wahań cyklicznych. W konsekwencji punkty zegara w drugim wariacie są przesunięte w prawo w przypadku występowania trendu rosnącego oraz odpowiednio w lewo w stosunku do ścieżki pierwszego wariantu w przypadku obecności trendu odpowiednio malejącego. Pozycję cykliczną w przypadku obydwu wariantów wygodnie jest przedstawiać w kategoriach procentowych. Wariant 1 – klasyczny – na osi poziomej przedstawia przybliżone wartości procentowych miesięcznych zmian komponentu cyklicznego (cyklu odchyłeń), czyli wielkości danej zmiennej, z pominięciem wahań sezonowych oraz trendu. W przypadku wariantu 2, na osi poziomej zaznaczono (przybliżone) procentowe zmiany miesięczne wielkości danej zmiennej, z pominięciem wahań sezonowych. Oś pionowa to (przybliżone) procentowe odchylenia wielkości danej zmiennej od linii trendu w danej chwili czasu.

Analiza zmian w koniunkturze może bazować na łącznym modelowaniu wahań cyklicznych, sezonowych i ogólnej tendencji rozwojowej obserwowanego makroekonomicznego szeregu czasowego. Takie podejście stosowali Luginbuhl, de Vos (2003) sugerując, że „*It is generally acknowledged that the growth rate of output, the seasonal pattern, and the business cycle are best estimated simultaneously.*” Jednak powszechnie przyjęta w analizach wahań cyklicznych procedura polega na wyodrębnieniu w pierwszym kroku wahań utożsamianych z wahaniami aktywności gospodarczej, poprzez eliminację wahań sezonowych metodami parametrycznymi. W drugim kroku stosuje się metody filtracji filtrami pasmowo przepustowymi. Takie podejście nie jest spójne ze względu na zastosowanie w pierwszym kroku podejścia parametrycznego, zaś w drugim kroku (w sposób niezależny od estymacji w kroku pierwszym) podejścia alternatywnego. W następnej części zaprezentowano propozycję spójnej konstrukcji zegara cyklu koniunkturalnego w podejściu nieparametrycznym.

### 3. ZASTOSOWANIE UJĘCIA NIEPARAMETRYCZNEGO W KONSTRUKCJI ZEGARA CYKLU KONIUNKTURALNEGO

W celu zdefiniowania nieparametrycznego zegara cyklu koniunkturalnego należy wprowadzić równanie nieparametrycznego modelu opisującego dynamikę jednowymiarowego procesu makroekonomicznego. Równanie to zaczerpnięto z pracy Lenart, Pipień (2013), w której autorzy zaproponowali niestandardową metodę wnioskowania statystycznego o naturze wahań cyklicznych, sezonowych i trendu z możliwością interakcji tych komponentów. Niech  $\{P_t : t \in \mathbf{Z}\}$  będzie logarytmem naturalnym obserwowanego procesu makroekonomicznego. W równaniu modelu przyjmujemy, iż dla średniej procesu  $\{P_t : t \in \mathbf{Z}\}$  (bezwartunkowej wartości oczekiwanej) zachodzi:

$$\mu_p(t) = E(P_t) = f(t, \beta) + g(t),$$

gdzie  $g(t)$  jest funkcją prawie okresową postaci:

$$g(t) = \sum_{\psi \in \Psi_p} m_p(\psi) e^{i\psi t}, \quad (1)$$

zaś  $f(t, \beta)$  jest wielomianem stopnia  $p$  o zerowym wyrazie wolnym;  $\beta \in \mathbf{R}^p$ . Nieznany zbiór  $\Psi_p = \{\psi : m(\psi) \neq 0\} \subset [0, 2\pi)$  można w naturalny sposób przedstawić jako:

$$\Psi_p = \Psi_{p,1} \cup \Psi_{p,2} \cup \Psi_{p,3}, \quad (2)$$

gdzie  $\Psi_{p,1} \cap (0, \frac{2\pi}{1.5T}) = \Psi_{p,1}$ , dla  $T$  oznaczającego liczbę obserwacji w roku dla procesu  $P_t$  (dane miesięczne lub kwartalne). Zbiór  $\Psi_{p,1}$  zawiera zatem częstotliwości odpowiadające wahaniom dłuższym niż 1,5 roku. Zbiór  $\Psi_{p,2}$  zawiera częstotliwości odpowiadające wahaniom sezonowym, tzn.  $\Psi_{p,2} \subset \{2k\pi/12 : k = 0, 1, \dots, T-1\}$ . Zbiór  $\Psi_{p,3}$  jest zbiorem pozostałych częstotliwości, które nie są obiektem zainteresowania w tym artykule (np. częstotliwości korespondujące do efektu dni roboczych; patrz Ladiray, 2012). W celu wyodrębnienia wahań utożsamianych z wahaniami koniunkturalnymi zastosowano nieparametryczne podejście bazujące na filtracji. W celu osłabienia efektu wahań sezonowych zastosowano filtr  $L_{2 \times T}(B)$  scentrowanej średniej ruchomej  $2 \times T$ MA. Działając tym operatorem otrzymujemy szereg czasowy  $\{Y_t : t \in \mathbf{Z}\}$  dla którego:

$$Y_t = L_{2 \times T}(B)P_t,$$

gdzie

$$L_{2 \times T}(B) = (B^{-T/2} + 2B^{-T/2+1} + \dots + 2B^{-1} + 2 + 2B + \dots + 2B^{T/2-1} + B^{T/2}) / (2T),$$

zaś  $B^k P_t = P_{t-k}$  dla dowolnych całkowitoliczbowych wartości czasu  $t$  i przesunięcia  $k$ . Jak wykazano w pracy Lenart, Pipień (2013) zbiór  $\Psi_{P,1}$  jest niezmienniczy ze względu na zastosowanie filtra  $L_{2 \times T}(B)$ , zaś zbiór  $\Psi_{P,2}$  jest co najwyżej zbiorem jednoelementowym zawierającym częstotliwość równą zero. Wynika to z tego, iż funkcja bezwarunkowej wartości oczekiwanej szeregu czasowego  $\{Y_t : t \in \mathbb{Z}\}$  ma postać

$$\mu_Y(t) = E(Y_t) = \underbrace{\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 t + \dots + \tilde{\beta}_p t^p}_{\tilde{f}(t, \tilde{\beta})} + \sum_{\psi \in \Psi_Y} m_Y(\psi) e^{i\psi t}, \quad (3)$$

gdzie  $\Psi_Y \cap \{2k\pi/T : k = 1, 2, \dots, T-1\} = \emptyset$  oraz  $\Psi_Y = \Psi_P \setminus \{2k\pi/12 : k = 1, 2, \dots, T-1\}$ . Zatem szereg czasowy  $\{Y_t : t \in \mathbb{Z}\}$  zawiera te same częstotliwości w zbiorze  $\Psi_Y$  co szereg czasowy  $\{P_t : t \in \mathbb{Z}\}$  w zbiorze  $\Psi_P$ , po odjęciu częstotliwości identyfikowanych z wahaniami sezonowymi. Dodatkowo, dla współczynników  $m_P(\psi)$  oraz  $m_Y(\psi)$  zachodzi zależność

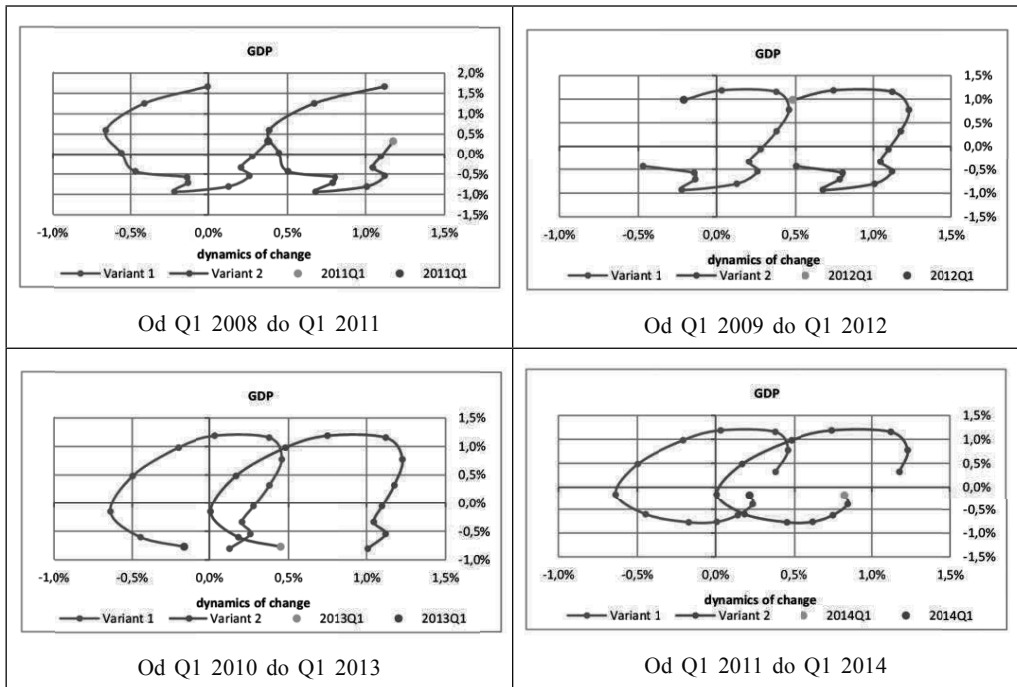
$$m_Y(\psi) = L_{2 \times T}(e^{-i\psi}) m_P(\psi). \quad (4)$$

Dla współczynników  $\tilde{\beta}_k$  oraz  $\beta_k$  otrzymujemy  $\tilde{\beta}_k = \beta_k$ , dla  $k = p$  oraz  $k = p - 1$ , co oznacza, że dla  $p = 0$  oraz  $p = 1$  współczynniki odpowiednich wielomianów nie ulegają zmianie. W przypadku zaś, gdy  $p = 2$  może się zmieniać jedynie wyraz wolny wielomianu.

W kolejnym kroku wyodrębniony zostanie komponent cykliczny przy użyciu filtra HP  $L_{HP(\lambda)(B)}$  z parametrem wygładzającym  $\lambda > 0$ . Jeśli wielomian  $f(t, \beta)$  jest wielomianem stopnia co najwyżej czwartego wtedy dla wyodrębnionego procesu wahań cyklicznych  $C_t = L_{HP(\lambda)}(B)Y_t$  mamy  $E(C_t) = E(L_{HP(\lambda)}(B)Y_t) = L_{HP(\lambda)}(B)E(Y_t) = \sum_{\psi \in \Psi_C} m_C(\psi) e^{i\psi t}$ , gdzie  $\Psi_C \setminus \{0\} = \Psi_Y \setminus \{0\}$ , co oznacza iż zbiory te różnią się co najwyżej jedną częstotliwością równą zero oraz  $m_C(\psi) = L_{HP(\lambda)}(e^{-i\psi}) m_Y(\psi) = L_{HP(\lambda)}(e^{-i\psi}) L_{2 \times TMA}(e^{-i\psi}) m_Y(\psi)$  (patrz twierdzenie 1 w Dodatku). Zbiór  $\Psi_{P,1}$  jest zatem niezmienniczy ze względu na zastosowane nieparametrycznej metody filtracji. Oznacza to, że punkty zegara mające współrzędne  $\{(C_t - C_{t-1}, C_t) : t \in \mathbb{Z}\}$  mogą być interpretowane jako proces stochastyczny o prawie okresowej dwuwymiarowej funkcji wartości oczekiwanej.

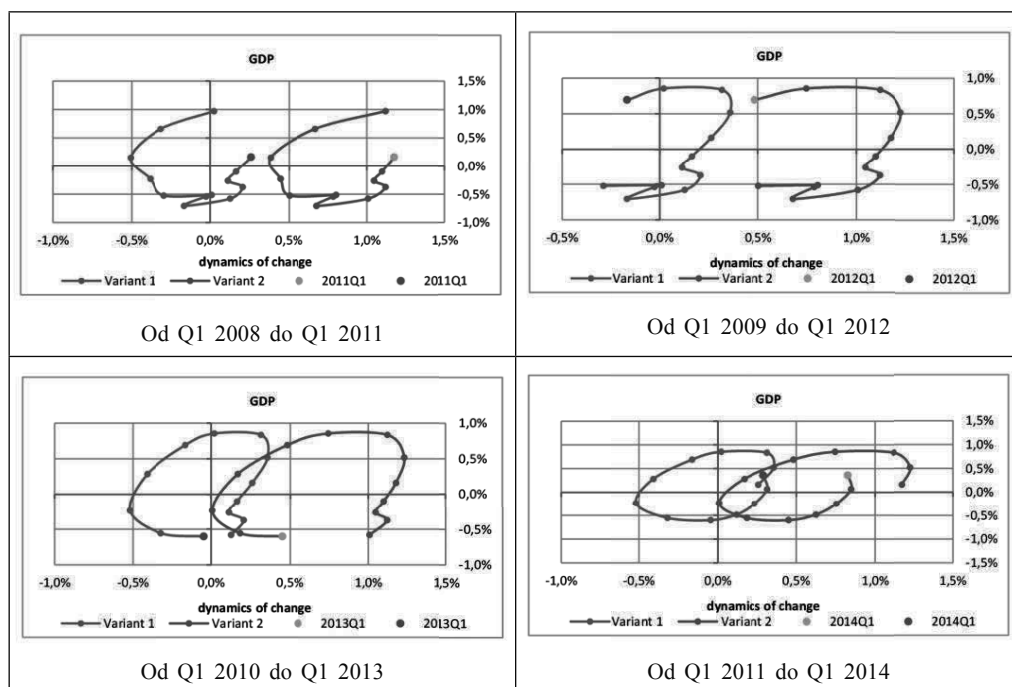
Rozważmy przykład, który zilustruje zasady działania powyższej konstrukcji. Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono zegary cyklu koniunkturalnego uzyskanego na podstawie szeregu czasowego PKB w Polsce (GDP and main components, Chain linked volumes, index 2005 = 100, NSA) dla dwóch różnych wartości parametru wygładzającego  $\lambda$ , odpowiadających granicznemu okresowi wahań odpowiednio 4 i pół roku oraz 8 lat. Dla każdego parametru  $\lambda$  przedstawiono cztery zegary (w ruchomym oknie 13 obserwacji w okresie od pierwszego kwartału 2008 r. do pierwszego kwartału 2014 r.).

Trajektorie umieszczone na zegarach należy odczytywać jako opis ruchu w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Punkty zegara w drugim wariancie są wyraźnie przesunięte w prawą stronę i praktycznie dla wszystkich okien znajdują się po prawej stronie osi OY. Wskazuje to na dodatnie co do wartości miesięczne przyrosty analizowanego wskaźnika (z pominięciem wahań sezonowych). Wszystkie punkty zegara w wariancie 1 znajdujące się w trzeciej ćwiartce układu współrzędnych wskazują na występowanie fazy spowolnienia gospodarczego – jednak z dodatnimi wartościami kwartalnych zmian (z pominięciem wahań sezonowych – patrz wariant 2).



Rysunek 1. Zegary cykli koniunkturalnych uzyskane na podstawie szeregu czasowego realnego PKB Polski – parametr wygładzania  $\lambda$  odpowiada cyklowi 8 lat

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 2. Zegary cykli koniunkturalnych uzyskane na podstawie szeregu czasowego realnego PKB Polski – parametr wygładzania  $\lambda$  odpowiada cyklowi 4 i pół roku

Źródło: opracowanie własne.

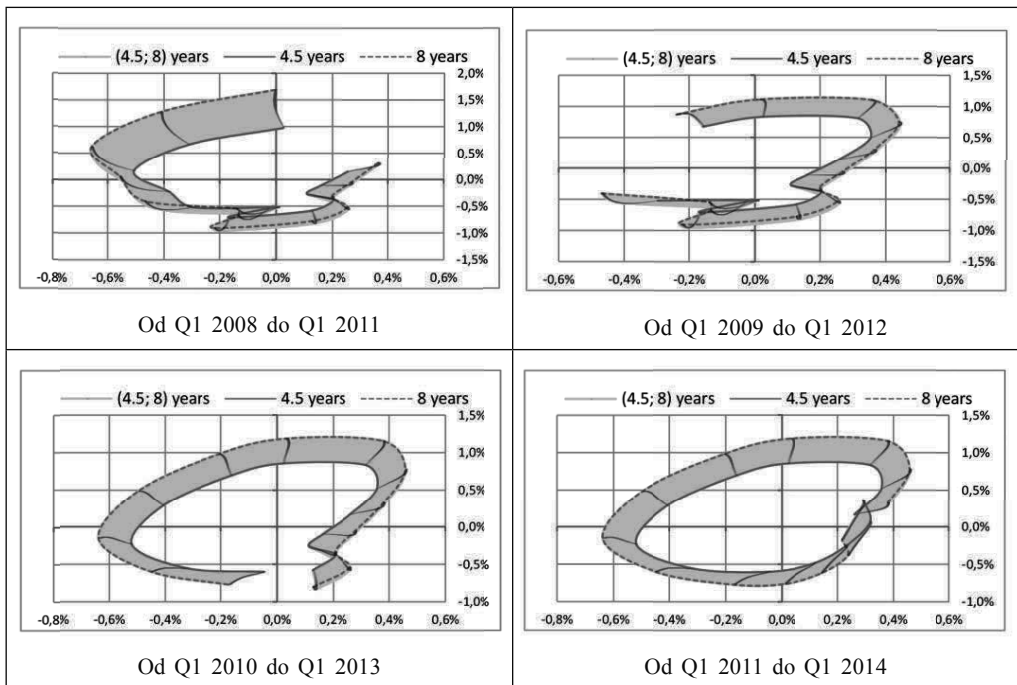
Trajektorie wyznaczone przez punkty zegara zależą od wartości parametru wygładzającego metody HP. W przypadku czwartego z rozpatrywanych okresów (to jest dla okresu czasu od pierwszego kwartału 2011 do pierwszego kwartału 2014) ostatni punkt zegara znajduje się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, jeśli przyjmie się wartość parametru wygładzającego  $\lambda$  odpowiadającego cyklowi 4 i półrocznemu (rysunek 1). Natomiast dla wartości  $\lambda$  odpowiadającej cyklowi ośmioletniemu (rysunek 2) ostatni punkt zegara pozostaje nadal w czwartej ćwiartce. Oznacza to, że w pewnych szczególnych przypadkach badacz może mieć poważne kłopoty z precyzyjnym odczytaniem fazy cyklu w ramach analizowanej metody. Skoro w prawidłowym określeniu przebiegu trajektorii na zegarze kluczową rolę odgrywa wybór parametru wygładzającego  $\lambda$ , należy przywrócić się jego roli w stosowanym filtrze.

Literatura nie podaje jednoznacznej odpowiedzi jaką wartość parametru wygładzania  $\lambda$  należy wybrać. Ogólne względy metodologiczne sugerują aby wartości parametru  $\lambda$  były różne dla danych o różnej częstotliwości obserwacji. Zmiana parametru  $\lambda$  wpływa na przebieg wyodrębnionej linii trendu w ten sposób, że im większa wartość parametru  $\lambda$ , tym uzyskana linia trendu jest gładzsza, a przez to wyodrębnione wahania (będące różnicą pomiędzy danymi a wartościami z linii trendu) zawierają cykle

o większej długości. Algorytm doboru parametru wygładzającego  $\lambda$  w zależności od długości cykli będących obiektem zainteresowania zaprezentowano w pracy Maravall, del Rio (2001), gdzie przytoczono formułę na wartość parametru  $\lambda$  jako funkcję częstotliwości  $\omega_0$  postaci:

$$\lambda = \frac{1}{4(1 - \cos(\omega_0))^2}. \quad (5)$$

Wartość  $\omega_0$  można interpretować jako dolną granicę częstotliwości będących obiektem zainteresowania. Przy ustalonej wartości  $\omega_0$ , wyliczona na podstawie (5) wartość parametru  $\lambda$  może być interpretowana jako granica, dla której, po zastosowaniu filtra HP, wzmocnione zostaną wahania o częstotliwościach powyżej wartości  $\omega_0$ . Osłabieniu zaś podlegać będą wahania o częstotliwościach poniżej wartości  $\omega_0$ . Ta interpretacja bazuje na wykazaniu, że filtr HP można otrzymać jako szczególny przypadek filtra Butterwortha, Gómez (1999), Gómez (2001).



Rysunek 3. Wstępowe zegary cyklu koniunkturalnego uzyskane na podstawie szeregu czasowego realnego PKB Polski – graniczne wartości parametru wygładzania  $\lambda_{\min}$  i  $\lambda_{\max}$  odpowiadają okresom 4 i pół roku oraz 8 lat

Źródło: opracowanie własne.



Rezultaty analizy wrażliwości przebiegu trajektorii cyklu na zegarze można przedstawić w postaci całego pasma punktów, które będziemy nazywać zegarem wstęgowym cyklu koniunkturalnego. W proponowanym podejściu na zegarze nie jest prezentowana pojedyncza trajektoria a cała wiązka trajektorii, uzyskanych na podstawie wyboru różnych wartości parametru wygładzania  $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ , dla pewnych granicznych wartości  $\lambda_{\min}$  i  $\lambda_{\max}$ . Odpowiada to analizie filtru HP w przedziale odpowiadających parametrom  $\lambda$  częstości granicznych  $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ . Na rysunku 3 przedstawiono pasmo skonstruowane poprzez przyjęcie wartości parametru wygładzania  $\lambda$  w ten sposób, że przedział częstości granicznych odpowiada wahaniom nie krótszym niż 4 i pół roku i nie dłuższym niż 8 lat. Wybór częstotliwości granicznych jest w pewnym sensie arbitralny i ma w głównej mierze cel ilustracyjny. Dotychczasowe analizy autorów niniejszego opracowania w zakresie badań nad naturą cyklu koniunkturalnego w Polsce pokazują, że cykl ten może być opisany jako złożenie kilku komponentów cyklicznych o długości odpowiednio 2 lata, około czterech lat i 8 lat; por. Lenart, Pipień (2013), Lenart i inni (2016). Ten okołoczteroletni komponent jest interpretowany jako cykl produkcji.

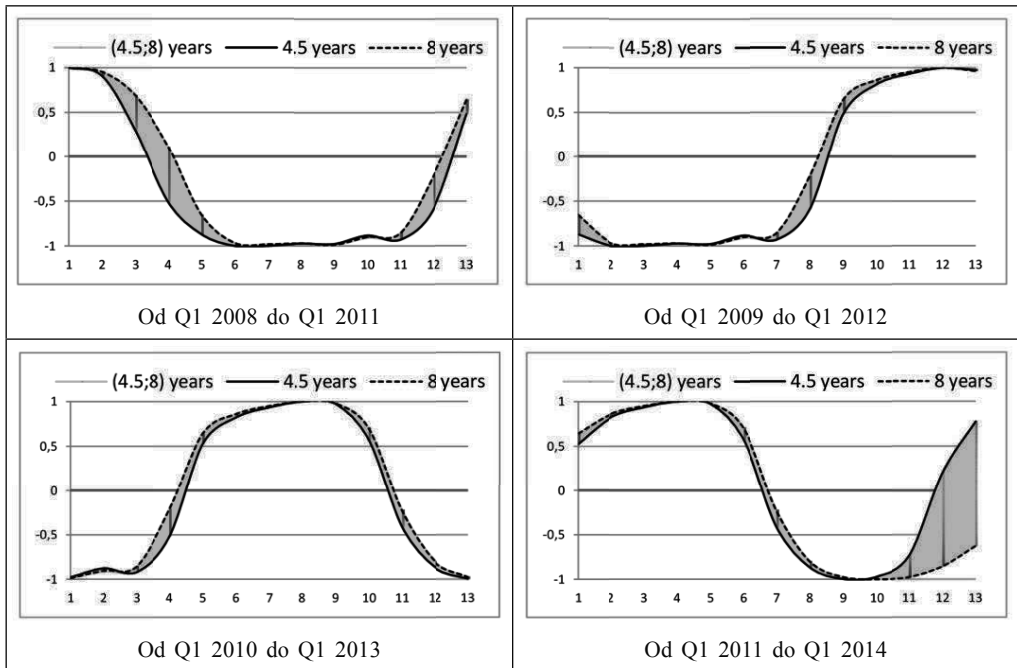
Widoczne na rysunku 3 pasma mają charakter regularny. Nie w każdym jednak okresie czasu ścieżki odpowiadające wahaniom granicznym 4 i pół roku oraz 8 lat wyznaczają obwiednię prezentowanej wstęgi. Dyskutowana forma prezentacji cykliczności na zegarze umożliwi przedstawienie w jakościowy sposób niepewności co do kształtowania się faz cyklu jak i ich czasów trwania. Wstęgowe zegary cyklu informują, iż w pewnych przypadkach analizy mogą nie dawać jednoznacznych konkluzji co do aktualnej fazy cyklu, zaś szerokość pasma może być interpretowana jako miara stopnia niepewności co do właściwego jej określenia.

#### 4. WYODRĘBNIE NIE FAZY I AMPLITUDY

Podstawowe charakterystyki cyklu koniunkturalnego to faza oraz amplituda. Problemem wartym podjęcia jest wypracowanie metody ilustracji tych dwóch charakterystyk w sposób odseparowany. Wyodrębnienie fazy cyklu z pominięciem jego amplitudy może bowiem dostarczyć bardziej precyzyjnego określenia stanu koniunktury, bez wnikania w szczegóły dotyczące głębokości jej wahań. W tym celu wprowadzimy pojęcie wykresu wstęgowego fazy. Niech będzie ustalona wartość parametru  $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$  dla wstęgowego zegara cyklu. Sinus kąta jaki tworzy prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych i dany punkt zegara, tj.

$$Z_{t,\lambda} = \frac{C_{t,\lambda}}{\sqrt{(C_{t,\lambda} - C_{t-1,\lambda})^2 + C_{t,\lambda}^2}} \quad (6)$$

będziemy nazywać fazą cyklu koniunkturalnego. Zbiór punktów  $\{Z_{t,\lambda} : \lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]\}$ , gdzie  $t \in \mathbb{Z}$  będziemy nazywać wykresem wstęgowym fazy.

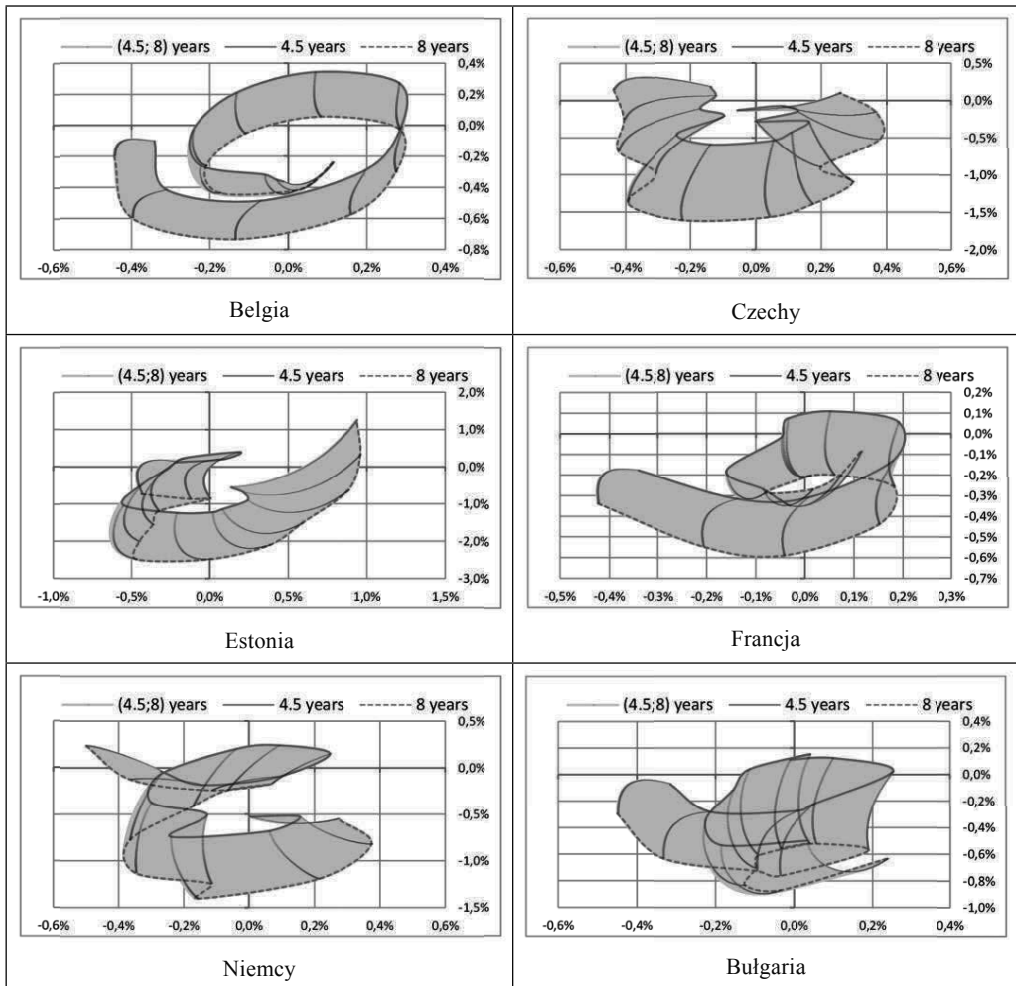


Rysunek 4. Wstępowe wykresy fazy cyklu uzyskane na podstawie szeregu czasowego realnego PKB Polski – graniczne wartości parametru wygładzania  $\lambda_{\min}$  i  $\lambda_{\max}$  odpowiadają okresom 4 i pół roku oraz 8 lat

Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 4 przedstawia wykresy przebiegu faz cyklu, otrzymanych zgodnie z formułą (6). Wiązka wykresów fazy jest uzyskana, podobnie jak na rysunku 3, poprzez przyjęcie parametrów wygładzania odpowiadających okresowi cyklu od 4 i pół roku do 8 lat. Wykresy przedstawiają wartości funkcji sinus obliczanych dla kolejnych punktów zegara cyklu w ruchomym oknie obserwacji analogicznym do ilustracji zawartych na rysunkach 1 i 2. Przebiegi wykresów fazy nie zmieniają się zasadniczo wraz ze zmianami parametru wygładzania  $\lambda$ . Wstępowy wykres przebiegu faz jest bardziej skoncentrowany na skali wartości niż analogiczny wykres wstępowy zegarów; por. rysunek 3. Zatem odizolowanie informacji o samej fazie cyklu od amplitudy wahań powoduje, że określenie stanu koniunktury wydaje się łatwiejsze. Jedynie w przypadku analiz cykliczności w okresie od 1 kwartału 2011 do 1 kwartału 2014 znacznej niepewności podlega określenie fazy cyklu pod koniec próby, to jest w przypadku 4 kwartału 2013 i 1 kwartału 2014; por. rysunek 4, wykres (d). Ale i w tym przypadku odizolowanie fazy od amplitudy wahań, zgodnie z formułą (6), daje obraz bardziej czytelny od informacji zawartej na zegarze koniunktury. W przypadku 4 kwartału 2013 (obserwacja 12 na wykresie (d)) większość przebiegów, uzyskanych na podstawie wyboru poszczególnej wartości  $\lambda$ , wskazuje na fazę ożywienia po recesji, natomiast w znacznie mniejszej liczbie przypadków okres ten może być utożsamiany z fazą

ekspansji. W przypadku 1 kwartału 2014 (obserwacja 13 na wykresie (d)) określenie fazy cyklu jest trudne. Niemal w połowie przypadków wartości parametru  $\lambda$  punkt określający pozycję cykliczną wskazuje na fazę ożywienia a w drugiej połowie wartości na fazę ekspansji. Analogiczną sytuację, choć nie tak wyraźnie zaakcentowaną, ilustruje wykres (a) na rysunku 4. W przypadku 4 kwartału 2008 (obserwacja 4) dla większości przyjętych wartości parametru  $\lambda$  pozycja cykliczna w tym okresie powinna być określona jako recesja. Niektóre zaś wartości  $\lambda$  lokalizują trajektorię w obszarze wartości dodatnich, co może prowadzić do wniosku, że w badanym okresie czasu mamy do czynienia jeszcze z wyhamowaniem a nie z recesją.



Rysunek 5. Wstęgowe zegary cyklu koniunkturalnego uzyskane na podstawie szeregów czasowych realnego PKB wybranych krajów europejskich – graniczne wartości parametru wygładzania  $\lambda_{\min}$  i  $\lambda_{\max}$  odpowiadają okresom 4 i pół roku oraz 8 lat

Źródło: opracowanie własne.

Określenie aktualnej fazy cyklu na podstawie analizy zegarów cykli koniunkturalnych może nie zawsze być łatwe i precyzyjne. Na rysunku 5 przedstawiono kolejne przykłady zegarów cykli o silnie zróżnicowanej czytelności. Cykliczność koniunktury określono w okresie od pierwszego kwartału 2003 do pierwszego kwartału 2006 w przypadku Belgii, Czech, Estonii, Francji, Niemiec i Bułgarii. Okres ten był dla większości gospodarek europejskich okresem o stosunkowo niskiej aktywności gospodarczej, w odniesieniu do innych okresów, bez oznak wyraźnego ożywienia bądź recesji. Taki stan gospodarki, polegający na wybiciu z naturalnego rytmu faz sprawia, iż niepewność co do określenia perspektyw rozwojowych jest duża. Na zegarze cyklu stan ten jest identyfikowany w przypadku, gdy punkty zegara znajdują się blisko początku układu współrzędnych. Na przykład w pierwszym i drugim kwartale 2003 roku dla Estonii wartości cyklu odchyłeń oraz przyrosty wartości są bliskie zera. Dodatkowo, w przypadku przyjęcia różnych wartości parametru  $\lambda$  punkty te znajdują się w różnych ćwiartkach układu współrzędnych. Podobnie, precyzyjne określenie fazy cyklu w przypadku Bułgarii może przysparzać sporo kłopotów.

Oznacza to, że dla pełnego obrazu konieczne jest zdefiniowanie odrębnej fazy cyklu, którą będziemy nazywać fazą neutralną. Niech  $\{C_{t,\lambda} : t \in \mathbb{Z}\}$  będzie wyodrębnionym cyklem odchyłeń dla pewnego  $\lambda$ . Wtedy będziemy mówić o okresie fazy neutralnej jeśli jednocześnie wartości cyklu odchyłeń  $C_{t,\lambda}$  oraz przyrosty wartości tego cyklu  $C_{t,\lambda} - C_{t-1,\lambda}$  będą bliskie zera, tj.:

$$\frac{(C_{t,\lambda})^2}{a^2} + \frac{(C_{t,\lambda} - C_{t-1,\lambda})^2}{b^2} < 1, \quad (7)$$

gdzie  $a, b > 0$  są odpowiednio progami dla wartości cyklu odchyłeń oraz różnic  $C_{t,\lambda} - C_{t-1,\lambda}$ . Niskie wartości  $C_{t,\lambda}$  świadczą o rozwoju w tempie bliskim potencjału zaś niskie wartości  $C_{t,\lambda} - C_{t-1,\lambda}$  świadczą o tym, iż odstępstwa od potencjału nie są duże.

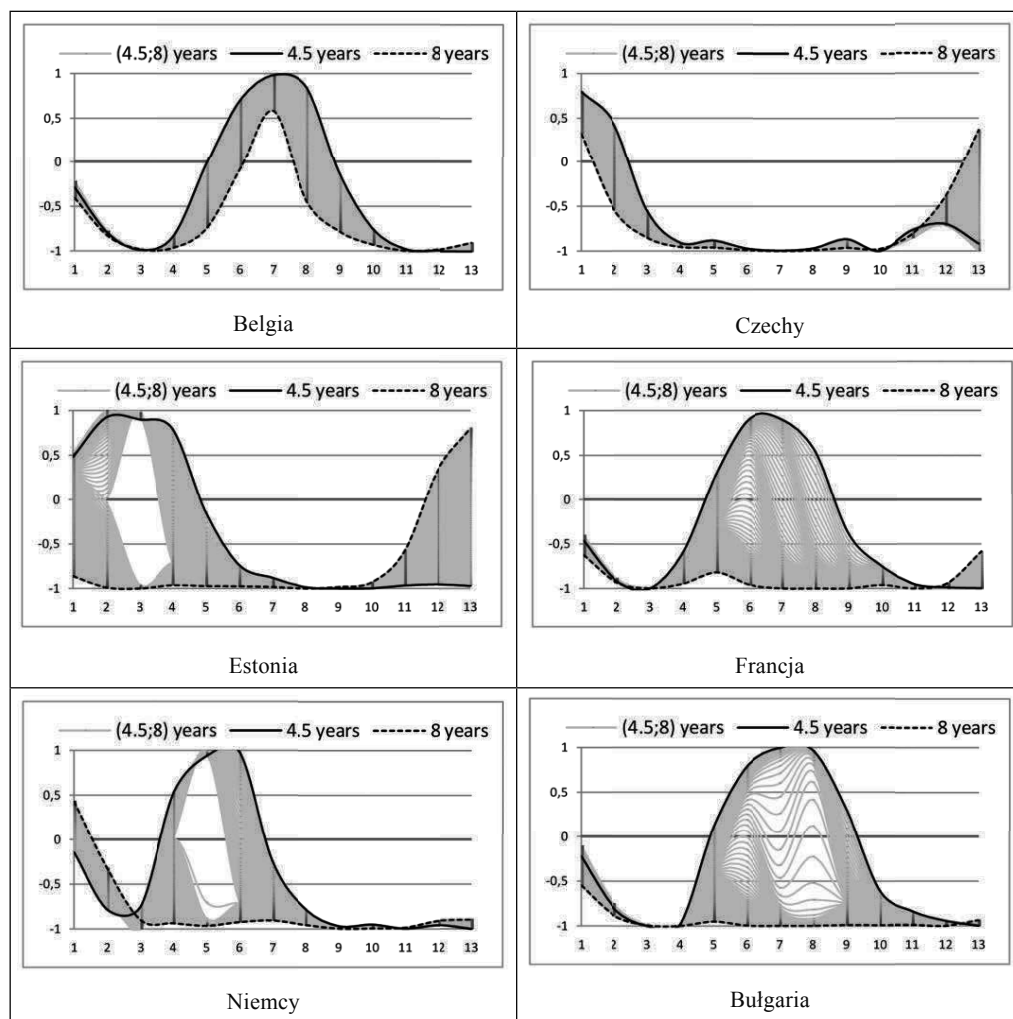
Dobór parametrów  $a$  oraz  $b$  powinien zależeć od własności procesu cyklicznego  $C_{t,\lambda}$ , jednak nie jest przedmiotem naszych rozważań. Nierówność

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1,$$

spełniają punkty  $(x,y)$  które leżą wewnątrz elipsy o półosiach  $a$  oraz  $b$ .

Rezultaty odseparowania informacji o fazie cyklu od amplitudy, uzyskane w przypadku analizowanych sześciu krajów, zawarto na rysunku 6. Podobnie jak na rysunku 4, przedmiotem analiz jest przebieg faz cyklu otrzymanych według formuły (6). Wiązkę wykresów uzyskano poprzez przyjęcie parametrów wygładzania odpowiadających okresowi cyklu od 4 i pół roku do 8 lat. Odizolowanie informacji o samej fazie cyklu od amplitudy wahań nie powoduje tak znaczącej poprawy w precyzyjnym określeniu stanu koniunktury analizowanych krajów, jak w przypadku Polski; por. rysunek 4. Szczególnie, określenie faz ożywienia i ekspansji, które występują w różnych okre-

sach czasu dla poszczególnych krajów, jest obarczone dużą niepewnością. Dla Belgii i Czechy fazy spowolnienia i recesji są określone precyzyjnie i przebieg komponentu cyklicznego, z pominięciem informacji o amplitudzie, prawie nie zmienia się w tych przypadkach, wraz ze zmianami wartości parametru wygładzania. W przypadku Estonii, Francji, Niemiec i Bułgarii określenie fazy cyklu w większości kwartałów jest niemożliwe. Komponent cykliczny z pominięciem informacji o amplitudzie jest bardzo wrażliwy na zmiany wartości parametru wygładzania i może wskazywać zarówno na ożywienie, jaki i na recesję.



Rysunek 6. Wstępne wykresy fazy cyklu uzyskane na podstawie szeregu czasowego realnego PKB wybranych krajów europejskich – graniczne wartości parametru wygładzania  $\lambda_{\min}$  i  $\lambda_{\max}$  odpowiadają okresom 4 i pół roku oraz 8 lat

Źródło: opracowanie własne.

## 5. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono konstrukcję wstęgowego zegara cyklu koniunkturalnego (bazującego na jednowymiarowym realnym wskaźniku makroekonomicznym) z uwzględnieniem przedziału dla parametru wygładzającego metody filtracji. Przyjęcie takiej koncepcji zegara powoduje, iż interpretacji podlega całe spektrum punktów zegara a nie tylko pojedyncza ścieżka. W celu trafniejszego opisu aktualnej pozycji cyklicznej na zegarze cyklu przedstawiono prosty sposób odseparowania fazy cyklu od amplitudy. Również ta konstrukcja uwzględnia przedział parametrów wygładzających metody filtracji HP.

Przykłady analizy danych empirycznych w pracy mają charakter ilustracyjny i ich analiza koncentrowała się bardziej na wskazaniu użyteczności skonstruowanych narzędzi niż na weryfikacji ewentualnych hipotez badawczych dla analizowanych gospodarek i okresów. Praca wskazuje, iż skonstruowane narzędzia oparte na realnych wskaźnikach makroekonomicznych mogą być pomocne w badaniach nad naturą cykli koniunkturalnych.

Wstępowe zegary cyklu informują, iż w pewnych przypadkach analizy mogą nie dawać jednoznacznych konkluzji co do aktualnej fazy cyklu. Szerokość pasma może być interpretowana jako miara stopnia niepewności co do właściwego jej określenia. Odizolowanie informacji o samej fazie cyklu od amplitudy wahań powoduje, że określenie stanu koniunktury wydaje się łatwiejsze. Dodatkowo takie podejście skłania do określenia alternatywnej fazy cyklu, którą autorzy proponują nazywać neutralną.

## LITERATURA

- Abberger K., Nierhaus W., (2010), IFO Business Cycle Clock: Circular Correlation with the Real GDP, CESifo Working Paper Series No. 3179.
- Gómez V., (1999), Three Equivalent Methods for Filtering Finite Nonstationary Time Series, *Journal of Business and Economic Statistics*, 17 (1), 109–117.
- Gómez V., (2001), The Use of Butterworth Filters for Trend and Cycle Estimation in Economic Time Series, *Journal of Business and Economic Statistics*, 19 (3), 365–373.
- Hodrick R., Prescott E., (1997), Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation, *Journal of Money, Credit and Banking*, 29, 1–16.
- Ladiray D., (2012), Theoretical and Real Trading-Day Frequencies, w: Bell W. R., Holan S. H., McErloy T. S., (red.), *Economic Time Series: Modeling and Seasonality*, 255–279.
- Lenart L., Pipień M., (2013), Almost Periodically Correlated Time Series in Business Fluctuations Analysis, *Acta Physica Polonica A*, 123 (3), 567–583.
- Lenart L., Mazur B., Pipień M., (2016), Statistical Analysis of Business Cycle Fluctuations in Poland Before and After the Crisis, *Equilibrium. Quarterly Journal of Economics and Economic Policy* (in press).
- Luginbuhl R., de Vos A., (2003), Seasonality and Markov Switching in an Unobserved Component Time Series Model, *Empirical Economics*, 28, 365–386.

## DODATEK

**Twierdzenie 1.** Jeśli  $f(t)$  jest wielomianem stopnia co najmniej czwartego, oraz  $T(L) = \frac{1}{\lambda L^{-2} - 4\lambda L^{-1} + 6\lambda + 1 - 4\lambda L^1 + \lambda L^2}$  jest operatorem trendu w filtrze HP, takim, że  $L^k f(t) = f(t - k)$  dla każdego  $k, t \in \mathbf{Z}$ , wtedy  $T(L) f(t)$  i  $f(t)$  różnią się co najwyżej o stałą.

**Dowód.** Niech  $f(t)$  będzie wielomianem rzędu co najwyżej cztery,  $f(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$ . Wtedy wielomian  $w(t) = T(L) f(t)$  jest równoważny.

$$f(t) = \lambda w(t - 2) - 4\lambda w(t - 1) + (6\lambda + 1)w(t) - 4\lambda w(t + 1) + \lambda w(t + 2) \quad (8)$$

Rozważmy reprezentację  $w(t) = f(t) + z(t)$ . Na jej podstawie otrzymujemy:

$$-24a\lambda = \lambda z(t - 2) - 4\lambda z(t - 1) + (6\lambda + 1)z(t) - 4\lambda z(t + 1) + \lambda z(t + 2). \quad (9)$$

Powyższe równanie funkcyjne ma rozwiązanie postaci  $z(t) = -24a\lambda$ . Skoro  $w(t)$  jest określony jednoznacznie, to  $z(t)$  jest funkcją stałą.

KONCEPCJA WSTĘGOWEGO ZEGARA CYKLU KONIUNKTURALNEGO  
W UJĘCIU NIEPARAMETRYCZNYM

Streszczenie

W artykule omówiono propozycję uwzględnienia niepewności na zegarze cyklu koniunkturalnego. Stosowane podejście bazuje na reprezentacji wartości oczekiwanej realnych wskaźników makroekonomicznych jako sumy trendu i funkcji prawie okresowej w ramach równania nieparametrycznego. Ujmujemy w ten sposób łącznie dynamikę wahań koniunkturalnych, sezonowych, trendu i możliwej interakcji pomiędzy tymi komponentami. Poprzez zastosowanie nieparametrycznych metod filtracji, w celu eliminacji wahań sezonowych oraz trendu, uzyskano wartość pierwszego momentu punktów zegara jako poszczególne wartości funkcji prawie okresowej. Częstotliwości utożsamiane z wahaniami aktywności gospodarczej, jak również te, które charakteryzują dynamikę zegara cyklu, są niezmiennicze ze względu na stosowane metody filtracji.

**Słowa kluczowe:** zegar cyklu koniunkturalnego, metody filtracyjne, procesy prawie okresowo skorelowane

## NONPARAMETRIC BAND BUSINESS CYCLE CLOCK

## Abstract

We discuss representation of uncertainty in the business cycle clock. We propose approach utilising description of the unconditional mean of the process, applied for modelling dynamics of macroeconomic time series, as a trend component and almost period function in a non-parametric setting. We capture the dynamics over the business cycle, trend component and seasonal fluctuations and possible interactions between these features. A particular values of the almost periodic function are key for representation of the business cycle in a clock, expressing the dynamics according to phase diagram. The set of frequencies interpreted as a properties of the business fluctuations are invariant with respect to filtration methods applied in the procedure.

**Keywords:** business cycle clock, filtration, almost periodically correlated processes