

KATARZYNA FILIPOWICZ<sup>1</sup>, ROBERT SYREK<sup>2</sup>, TOMASZ TOKARSKI<sup>3</sup>

## ŚCIEŻKI WZROSTU W MODELU SOLOWA PRZY ALTERNATYWNYCH TRAJEKTORIACH LICZBY PRACUJĄCYCH<sup>4</sup>

### 1. WPROWADZENIE

W neoklasycznym modelu wzrostu Solowa (1956) (podobnie jak w jego rozszerzeniach prezentowanych w pracach Mankiwa i inni, 1992, czy Nonnemana, Vanhoudta, 1996, por. też np. Tokarski, 2011), przyjmuje się m.in. założenie, że liczba pracujących w gospodarce rośnie według pewnej stałej stopy wzrostu (stanowiąc stały odsetek rosnącej wykładniczo liczby ludności). Opierając się na tym założeniu pokazuje się, że w warunkach długookresowej równowagi gospodarki techniczne uzbrojenie pracy oraz wydajność pracy są tym wyższe, im niższa jest stopa wzrostu liczby pracujących.

Guerrini (2006) (por. też Zawadzki, 2007 lub Bucci, Guerrini, 2009) wykazał, że jeśli w modelu Solowa przyjmie się założenie, że stopa wzrostu liczby pracujących<sup>5</sup>

---

<sup>1</sup> Uniwersytet Jagielloński, Wydział Zarządzania i Komunikacji Społecznej, Katedra Ekonomii Matematycznej, Łojasiewicza 4, 30-001 Kraków, Polska.

<sup>2</sup> Uniwersytet Jagielloński, Wydział Zarządzania i Komunikacji Społecznej, Zakład Finansów, Łojasiewicza 4, 30-001 Kraków, Polska.

<sup>3</sup> Uniwersytet Jagielloński, Wydział Zarządzania i Komunikacji Społecznej, Katedra Ekonomii Matematycznej, Łojasiewicza 4, 30-001 Kraków, Polska, autor prowadzący korespondencję, e-mail: tptt@wp.pl.

<sup>4</sup> Opracowanie powstało w ramach grantu NCN pt. *Cykle wzrostu – dynamiczne modele koniunktury i wzrostu gospodarczego* nr OPUS8 UMO-2014/15/B/HS4/04264 kierowanego przez Dra hab. Adama Krawca z Katedry Ekonomii Matematycznej Uniwersytetu Jagiellońskiego. Autorzy dziękują Prof. Armenowi Edigarianowi z Instytutu Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego za uwagi do matematycznej strony prezentowanej pracy. Wyrazy podziękowania należą się także Profesorom Michałowi Majsterkowi z Katedry Modeli i Prognoz Ekonometrycznych Uniwersytetu Łódzkiego, Krzysztofowi Maladze z Katedry Ekonomii Matematycznej Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Henrykowi Zawadzkiemu z Zakładu Ekonomii Matematycznej Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach oraz anonimowym Recenzentom za konstruktywną krytykę wstępnej wersji pracy. Prezentowane opracowanie było prezentowane na VI Ogólnopolskiej Konferencji „Matematyka i informatyka na usługach ekonomii” im. Prof. Zbigniewa Czerwińskiego Wydziału Informatyki i Gospodarki Ekonomicznej Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań, 15–16 kwietnia 2016 roku.

<sup>5</sup> O wszystkich występujących dalej zmiennych makroekonomicznych przyjmuje się założenie, że są przynajmniej dwukrotnie różniczkowalnymi względem czasu  $t \in [0; +\infty)$ . Zapis  $x(t)$  oznaczał będzie wartość zmiennej  $x$  w momencie  $t$ .  $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$  – pierwszą pochodną zmiennej  $x$  po czasie  $t$ , czyli (ekonomicznie rzecz biorąc) przyrost wartości owej zmiennej w momencie  $t$ , zaś  $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$  – drugą pochodną  $x$  po  $t$ .

$\dot{L}(t)/L(t) = \lambda(t)$  charakteryzuje się tym, że dla dowolnego nieujemnego momentu  $t$   $0 \leq \lambda(t) \leq \lambda^*$  oraz  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t) = \lambda_\infty \in [0, \lambda^*]$ , to równanie różniczkowe:

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (\delta + \lambda(t))k(t)$$

opisujące proces akumulacji technicznego uzbrojenia pracy posiada asymptotycznie stabilny, nietrywialny punkt stacjonarny.

Ponadto w pracach Ferrary, Guerriniego (2009) oraz Guerriniego (2010a) rozważa się model wzrostu typu Ramseya z logistyczną ścieżką wzrostu liczby ludności. Wykazuje się tam, że analizowany model ma dokładnie jeden nietrywialny punkt stacjonarny (por. też Guerrini, 2010b). Podobne analizy prowadzone były również na gruncie modeli typu AK (Bucci, Guerrini, 2009) oraz Mankiwa-Romera-Weila (Guerrini, 2010c). Natomiast oddziaływanie opóźnionej dynamiki liczby ludności (przy logistycznej trajektorii tej zmiennej) na długookresową równowagę modelu wzrostu Solowa znaleźć można m.in. w pracy Bianci, Guerriniego (2014).

W prezentowanych w pracy rozważaniach założenie dotyczące stopy wzrostu liczby pracujących w modelu Solowa są również modyfikowane. Autorzy przyjmują, że liczba pracujących rośnie do pewnej asymptoty po krzywej logistycznej (co jest szczególnym przypadkiem stopy wzrostu liczby pracujących z pracy Guerriniego, 2006) lub, że liczba ta początkowo rośnie, następnie zaś maleje asymptotycznie do 0. Punktem odniesienia jest model Solowa z rosnącą wykładniczo liczbą pracujących.

Założenie o dążącej do pewnej asymptoty logistycznej ścieżce wzrostu liczby pracujących wynika stąd, że w wielu średnio i wysoko rozwiniętych gospodarkach liczba ludności rośnie coraz wolniej. Jeśli zaś założy się malejący wskaźnik aktywności ekonomicznej ludności (rozumiany jako iloraz liczby pracujących i liczby ludności), wynikający chociażby z rosnącego odsetka osób w wieku poprodukcyjnym na skutek starzenia się społeczeństw, to może się okazać, że liczba pracujących rosnąć będzie jedynie do pewnej asymptoty. Z drugiej strony, spadająca liczba ludności oraz zmniejszający się wskaźnik aktywności ekonomicznej może prowadzić do tego, że liczba pracujących od pewnego momentu może również maleć (w szczególnym przypadku do 0).

Struktura prezentowanego opracowania przedstawia się następująco. W punkcie 2 scharakteryzowano wspomniane uprzednio ścieżki wzrostu liczby pracujących. Punkt 3 zawiera analityczne rozwiązania modelu Solowa, przy alternatywnych założeniach dotyczących trajektorii liczby pracujących. W punkcie 4 skalibrowano parametry modelu oraz przedstawiono symulacje numeryczne ścieżek wzrostu technicznego uzbrojenia pracy i wydajności pracy towarzyszące wybranym poziomom stóp inwestycji. Opracowanie kończy punkt 5, w którym znajduje się podsumowanie prowadzonych w nim rozważań oraz ważniejsze wnioski.

## 2. ZAŁOŻENIA O ALTERNATYWNYCH ŚCIEŻKACH WZROSTU LICZBY PRACUJĄCYCH

Jak już wspomniano, w prowadzonych dalej analizach przyjmowane będą trzy alternatywne założenia dotyczące ścieżek wzrostu liczby pracujących w modelu Solowa (1956) z funkcją produkcji Cobba-Douglasa (1928). Przyjmować się będzie mianowicie, że liczba pracujących określona jest przez jedno z trzech następujących równań:

$$L(t) = e^{nt}, \quad (1)$$

gdzie  $n > 0$ ,

$$L(t) = \frac{m}{1 + e^{2n(T-t)}}, \quad (2)$$

przy  $n > 0$ ,  $m \geq 2$  i  $T \geq 0$ , lub:

$$L(t) = e^{\Lambda(t)}, \quad (3)$$

gdzie:

$$\Lambda(t) = 2nt \left( 1 - \frac{t}{2T} \right),$$

przy czym  $n > 0$  i  $T > 0$ . Interpretacja ekonomiczna parametrów  $n$ ,  $m$  oraz  $T$  w równaniach (1–3) podana zostanie w dalszej części opracowania<sup>6</sup>.

Ścieżka wzrostu liczby pracujących (1) nazywana będzie dalej standardową ścieżką wzrostu, gdyż taki kształt owej ścieżki wzrostu zaproponowany został tak w oryginalnym modelu wzrostu Solowa. Ścieżka (2) to logistyczna ścieżka wzrostu, gdyż jej postać wyznacza funkcja logistyczna (por. np. Pindyck, Rubinfeld, 1991). Natomiast ścieżka wzrostu liczby pracujących (3) nazywana będzie dalej gaussowską ścieżką wzrostu, bo jej kształt zbliżony jest do wykresu funkcji gęstości rozkładu normalnego Gaussa  $N(\mu, \sigma)$ .

Z równania (1) wynika, że w kolejnych momentach  $t \in [0; +\infty)$  liczba pracujących rośnie od 1 do  $+\infty$ , zaś stopa wzrostu tej zmiennej, czyli  $\dot{L}(t)/L(t)$ , równa jest  $n$ .

Równanie (2) implikuje natomiast:

$$L(0) = 1 \Leftrightarrow e^{2nT} = m - 1,$$

co powoduje, że:

$$T = \frac{\ln(m-1)}{2n}. \quad (4)$$

---

<sup>6</sup> Parametry w funkcjach (1–3), opisujących ścieżki wzrostu liczby pracujących (w alternatywnych wariantach modelu Solowa) dobrano tak, by spełniony był warunek  $L(0) = 1$ .

Warunek (4) gwarantuje, że na ścieżce wzrostu (2) liczba pracujących w momencie  $t = 0$  przyjmuje wartość 1.

Ponadto z równań (2) i (4) wyciągnąć można następujące wnioski:

$$(i) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} L(t) = m.$$

$$(ii) \quad \forall t \in [0; +\infty) \quad \dot{L}(t) = 2nm \frac{e^{2n(T-t)}}{(1 + e^{2n(T-t)})^2} > 0.$$

$$(iii) \quad \forall t \in [0; +\infty) \quad \ddot{L}(t) = 4n^2 m e^{2n(T-t)} \frac{e^{2n(T-t)} - 1}{(1 + e^{2n(T-t)})^3}, \text{ co powoduje, że } \ddot{L}(t) \text{ jest dodatnie}$$

dla<sup>7</sup>  $t \in (0; T)$  oraz ujemne dla  $t \in (T; +\infty)$ .

$$(iv) \quad L(T) = m/2.$$

Oznacza to, że jeśli spełnione są równania (2) i (4), to liczba pracujących rośnie coraz szybciej od 1 do  $m/2$  w przedziale czasu  $(0; T)$ , natomiast w przedziale  $(T; +\infty)$  liczba ta rośnie coraz wolniej od  $m/2$  do  $m$ . A zatem  $m$  jest maksymalną liczbą pracujących na trajektorii (2), zaś  $T$  – momentem, w którym ścieżka ta ma punkt przegięcia.

Oznaczmy teraz przez  $\lambda(t) = \dot{L}(t)/L(t)$  stopę wzrostu liczby pracujących w kolejnych momentach  $t \in [0; +\infty)$ . Wówczas, przy dodatnio nachylonej logistycznej ścieżce wzrostu liczby pracujących (2), stopę wzrostu liczby pracujących można zapisać następującym wzorem:

$$\lambda(t) = 2n \frac{e^{2n(T-t)}}{1 + e^{2n(T-t)}},$$

lub, po uwzględnieniu równania (4):

$$\lambda(t) = 2n \frac{(m-1)e^{-2nt}}{1 + (m-1)e^{-2nt}}. \quad (5)$$

Z zależności (5) wynika m.in., że: (po pierwsze) w każdym momencie  $t \geq 0$   $\dot{\lambda}(t) < 0$ , (po drugie)  $\lambda(0) = \frac{2n(m-1)}{m}$ , (po trzecie)  $\lambda(T) = n$  oraz (po czwarte)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t) = 0$ . Oznacza to, że przy logistycznej ścieżce wzrostu liczby pracujących (2) w przedziale czasu  $[0; +\infty)$  stopa wzrostu owej zmiennej spada od  $\frac{2n(m-1)}{m}$  przez  $n$  w momencie  $T = \frac{\ln(m-1)}{2n}$  do 0 przy  $t \rightarrow +\infty$ .

<sup>7</sup>  $T = 0$  w przypadku, w którym  $m = 2$ .

Rozważając zaś gaussowską ścieżkę wzrostu liczby pracujących (3) okazuje się, że:

$$(i) \quad L(0) = e^{\Lambda(0)} = 1.$$

$$(ii) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} L(t) = 0.$$

$$(iii) \quad \dot{L}(t) = \dot{\Lambda}(t)e^{\Lambda(t)}, \text{ a zatem: } \operatorname{sgn} \dot{L}(t) = \operatorname{sgn} \dot{\Lambda}(t). \text{ Co więcej, ponieważ } \dot{\Lambda}(t) = 2n \left(1 - \frac{t}{T}\right), \text{ więc w przedziale } (0; T) \dot{L}(t) > 0, \text{ zaś } \forall t \in (T; +\infty) \dot{L}(t) < 0.$$

$$(iv) \quad \text{Ponadto: } L(T) = e^{nT}.$$

Płynie stąd wniosek, że liczba pracujących na gaussowskiej ścieżce wzrostu (3) rośnie w przedziale czasu  $(0; T)$  od 1 do  $e^{nT}$ , by następnie spadać do 0. A zatem  $T$  jest momentem, w którym liczba pracujących na gaussowskiej ścieżce wzrostu (3) osiąga swą maksymalną wartość.

Oznaczmy przez  $m \geq 1$  maksymalną liczbę pracujących na ścieżce wzrostu (3). Wówczas zachodzi równość:

$$T = \frac{\ln m}{n}. \quad (6)$$

W prowadzonych dalej rozważaniach analizowali będziemy ścieżkę wzrostu (3) zakładając, że zachodzi równanie (6).

Zauważmy również, że na ścieżce wzrostu liczby pracujących (3) stopę wzrostu owej zmiennej makroekonomicznej możemy zapisać następująco:

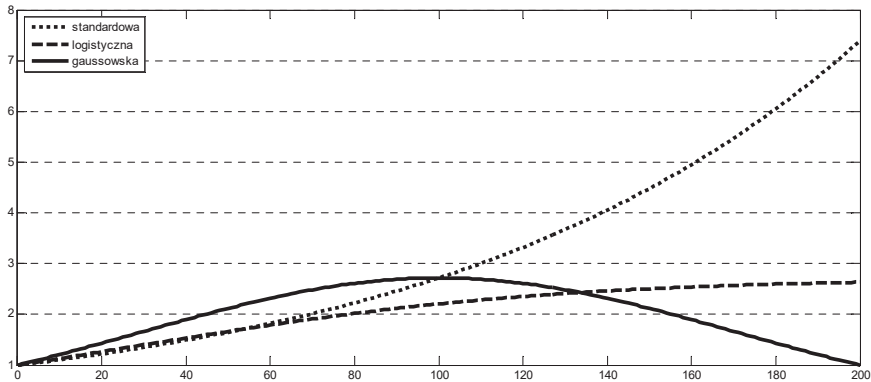
$$\lambda(t) = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \dot{\Lambda}(t) = 2n \left(1 - \frac{t}{T}\right),$$

co wraz z równaniem (6) daje:

$$\lambda(t) = \dot{\Lambda}(t) = 2n \left(1 - \frac{nt}{\ln m}\right). \quad (7)$$

Z równania (7) wynika co następuje. Po pierwsze, w momencie  $t = 0$  stopa wzrostu liczby pracujących  $\lambda$  równa jest  $2n$ . Po drugie, w momencie  $\frac{T}{2} = \frac{\ln m}{2n}$  stopa ta wynosi  $n$ . Po trzecie, w momencie  $t = T$  spada do 0, by następnie maleć do  $-\infty$ .

Ścieżki wzrostu liczby pracujących opisane przez równania (1–3) przy  $m = e \approx 2,7182818$  i  $n = 0,01$ , zilustrowano na rysunku 1.



Rysunek 1. Standardowa, logistyczna oraz gaussowska ścieżka wzrostu liczby pracujących przy  $m = e$  oraz  $n = 0,01$

Źródło: obliczenia własne.

### 3. ANALITYCZNE ROZWIĄZANIA MODELU

Przejdźmy teraz do modelu Solowa z funkcją produkcji Cobba-Douglasa. Założenia tego modelu można zapisać przy pomocy trzech następujących równań:

I. Proces produkcyjny opisuje funkcja produkcji Cobba-Douglasa dana wzorem<sup>8</sup>:

$$Y(t) = (K(t))^\alpha (L(t))^{1-\alpha}, \quad (8)$$

gdzie  $\alpha \in (0;1)$ .  $Y(t)$  w funkcji produkcji (8) oznacza wielkość wytworzonego produktu,  $K(t)$  – nakłady kapitału (rzeczowego), zaś  $\alpha$  jest elastycznością produktu względem nakładów kapitału rzeczowego.

II. Akumulację kapitału opisuje następujące równanie różniczkowe:

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t), \quad (9)$$

przy czym  $s, \delta \in (0;1)$ .  $s$  oznacza stopę oszczędności/inwestycji,  $\delta$  zaś – stopę deprecjacji kapitału.

III. Ścieżkę wzrostu liczby pracujących opisuje równanie (1), (2) lub (3).

Oznaczmy teraz przez  $k(t) = K(t)/L(t)$  techniczne uzbrojenie pracy, natomiast przez  $y(t) = Y(t)/L(t)$  – wydajność pracy. Wówczas z równań (8–9) wyprowadzić można równanie Solowa postaci:

<sup>8</sup> Oryginalna funkcja produkcji Cobba-Douglasa opisana jest wzorem:

$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ , gdzie  $A > 0$  oznacza łączną produktywność czynników produkcji. Zakładamy jednak, że  $Y$  i  $K$  (wyrażone w jednostkach pieniężnych w pewnych cenach stałych) zdeflowane są tak, że w momencie  $t = 0$   $Y$  i  $K$  (podobnie jak  $L$ ) równe są 1 i wówczas  $A = 1$ .

$$\dot{k}(t) = s(k(t))^\alpha - \theta(t)k(t), \quad (10)$$

gdzie funkcja:

$$\theta(t) = \delta + \lambda(t)$$

opisuje ścieżkę wzrostu stopy ubytku kapitału na pracującego, zaś funkcje  $\lambda(t)$  wynikają z równań (1), (2) lub (3).

Równanie różniczkowe (10) jest (matematycznie rzecz biorąc) równaniem różniczkowym Bernoulliego. Szukając nietrywialnej całki owego równania różniczkowego<sup>9</sup> możemy je stronami przemnożyć przez  $k^{-\alpha} > 0$ , co daje:

$$(k(t))^{-\alpha} \dot{k}(t) = s - \theta(t)(k(t))^{1-\alpha}. \quad (11)$$

Weźmy teraz podstawienie Bernoulliego postaci:

$$q(t) = (k(t))^{1-\alpha} \Rightarrow \frac{\dot{q}(t)}{1-\alpha} = (k(t))^{-\alpha} \dot{k}(t), \quad (12)$$

co powoduje, że nieliniowe równanie różniczkowe (11) sprowadzamy do równania liniowego niejednorodnego danego wzorem:

$$\dot{q}(t) = (1-\alpha)s - (1-\alpha)\theta(t)q(t). \quad (13)$$

Zapiszmy całkę  $q(t)$  równania (13) jako:

$$q(t) = e^{-(1-\alpha)\int\theta(t)dt} q_d(t), \quad (14)$$

gdzie  $q_d(t)$  jest nieznaną całką uzupełniającą. Wówczas:

$$\dot{q}(t) = -(1-\alpha)\theta(t)e^{-(1-\alpha)\int\theta(t)dt} q_d(t) + e^{-(1-\alpha)\int\theta(t)dt} \dot{q}_d(t). \quad (15)$$

Wstawiając podstawienia (14) i (15) do równania różniczkowego (13) uzyskujemy:

$$\dot{q}_d(t) = (1-\alpha)s e^{(1-\alpha)\int\theta(t)dt},$$

co powoduje, że:

$$q_d(t) = (1-\alpha)s \int e^{(1-\alpha)\int\theta(t)dt} dt. \quad (16)$$

<sup>9</sup> Równanie różniczkowe (10) posiada również rozwiązanie trywialne  $k(t) = 0$  dla każdego  $t \in [0; +\infty)$ . Jednak rozwiązanie to będzie dalej pomijane z dwóch przyczyn. Po pierwsze, jest ono sprzeczne z warunkiem  $k(0) = 1$ . Po drugie, jest nieciekawe tak z matematycznego, jak i ekonomicznego punktu widzenia.

Licząc całki (16) i (14), przy danej funkcji  $\theta(t)$ , można znaleźć całkę  $k(t)$  równania Solowa (10). Całka ta wyznaczała będzie ścieżkę wzrostu technicznego uzbrojenia pracy. Stąd zaś oraz z faktu, iż z funkcji produkcji (8) wyprowadzić można funkcję wydajności pracy postaci:

$$y(t) = (k(t))^\alpha \quad (17)$$

wynika, że znając ścieżkę wzrostu technicznego uzbrojenia pracy  $k(t)$  poznamy także ścieżkę wzrostu wydajności pracy  $y(t)$ .

Całek (16) i (14) poszukiwać będziemy przy standardowej, logistycznej i gausowskiej ścieżce wzrostu liczby pracujących.

Przy standardowej ścieżce wzrostu liczby pracujących (1) nietrywialna całka równania różniczkowego (10) dana jest wzorem (por. np. Tokarski, 2011, rozdział 7):

$$k(t) = \left( \frac{s}{\delta + n} + \left( 1 - \frac{s}{\delta + n} \right) e^{-(1-\alpha)(\delta+n)t} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (18)$$

Równanie (18) wyznacza ścieżkę wzrostu technicznego uzbrojenia pracy przy ścieżce wzrostu liczby pracujących określonej przez równanie (1). Wstawiając to równanie do funkcji wydajności pracy (17) dochodzimy do wniosku, iż ścieżkę wzrostu owej zmiennej makroekonomicznej opisuje równanie:

$$y(t) = \left( \frac{s}{\delta + n} + \left( 1 - \frac{s}{\delta + n} \right) e^{-(1-\alpha)(\delta+n)t} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (19)$$

Ścieżki wzrostu (18) i (19) są jawnymi funkcjami elementarnymi. Zatem łatwo pokazać, że przy  $s > \delta + n$  ( $s < \delta + n$ ) w każdym nieujemnym momencie  $t$  pochodne  $\dot{k}(t)$  i  $\dot{y}(t)$  są dodatnie (ujemne), natomiast przy  $s = \delta + n$   $\dot{k}(t) = \dot{y}(t) = 0$ . Co więcej, w każ-

dym ze wspomnianych przypadków  $\lim_{t \rightarrow +\infty} k(t) = \left( \frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$  oraz  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \left( \frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ .

Płyną stąd dwa następujące wnioski. Po pierwsze, jeżeli  $s > \delta + n$  ( $s < \delta + n$ ), to zarówno techniczne uzbrojenie pracy  $k$ , jak i wydajność pracy  $y$  rośnie (maleje) od 1

do  $\left( \frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$  oraz  $\left( \frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ . Po drugie, przy  $s = \delta + n$  w każdym nieujemnym momencie  $t$  owe zmienne makroekonomiczne przyjmują wartość równą 1.

Jeśli weźmiemy logistyczną ścieżkę wzrostu liczby pracujących (2), to funkcję  $\theta(t)$  można zapisać następująco:

$$\theta(t) = \delta + \frac{2n(m-1)e^{-2nt}}{1 + (m-1)e^{-2nt}}, \quad (20)$$



co powoduje, że jedną z całek powyższego równania można zapisać wzorem:

$$\int \theta(t) dt = \delta t - \ln(1 + (m-1)e^{-2nt}). \quad (21)$$

Wstawiając równanie (21) do związku (14) mamy:

$$q(t) = \left( \frac{1 + (m-1)e^{-2nt}}{e^{\delta t}} \right)^{1-\alpha} q_d(t). \quad (22)$$

Natomiast ze związków (16) i (21) otrzymujemy:

$$q_d(t) = (1-\alpha)\delta \int \frac{e^{(1-\alpha)\delta t}}{(1 + (m-1)e^{-2nt})^{1-\alpha}} dt. \quad (23)$$

Dokonując podstawienia:

$$u = e^t \Rightarrow du = e^t dt \quad (24)$$

całkę  $\int \frac{e^{(1-\alpha)\delta t}}{(1 + (m-1)e^{-2nt})^{1-\alpha}} dt$  możemy sprowadzić do całki<sup>10</sup>:

$$\int \frac{u^{(1-\alpha)\delta-1}}{(1 + (m-1)u^{-2n})^{1-\alpha}} du = \frac{u^{(1-\alpha)\delta}}{(1-\alpha)\delta} {}_2F_1\left(-\frac{(1-\alpha)\delta}{2n}, 1-\alpha; \frac{2n-(1-\alpha)\delta}{2n}; -(m-1)u^{-2n}\right) + C, \quad (25)$$

gdzie  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  jest funkcją hipergeometryczną Gaussa<sup>11</sup>, zaś  $C \in R$  – stałą całkowania. Ze związków (24–25) mamy:

<sup>10</sup> Całkę  $\int \frac{u^{(1-\alpha)\delta-1}}{(1 + (m-1)u^{-2n})^{1-\alpha}} du$  policzono korzystając z programu *Mathematica*.

<sup>11</sup> Funkcja hipergeometryczna  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  jest nieelementarną funkcją będącą rozwiązaniem następującego równania różniczkowego drugiego rzędu:

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} + (c - (a+b+1)z)\frac{dw}{dz} = abw(z),$$

gdzie  $a, b$  są dowolnymi stałymi rzeczywistymi, zaś  $c \neq 0$ . Funkcję tę można zapisać wzorem:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n,$$

$$\text{przy: } \gamma_n = \frac{\left( \prod_{j=1}^n (a+j-1) \right) \left( \prod_{j=1}^n (b+j-1) \right)}{n! \left( \prod_{j=1}^n (c+j-1) \right)}.$$

$$\int \frac{e^{(1-\alpha)\delta t}}{(1+(m-1)e^{-2nt})^{1-\alpha}} dt = \frac{e^{(1-\alpha)\delta t}}{(1-\alpha)\delta} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{(1-\alpha)\delta}{2n}, 1-\alpha; \frac{2n-(1-\alpha)\delta}{2n}; -(m-1)e^{-2nt}\right) + C,$$

co wraz z zależnością (23) daje:

$$q_d(t) = \frac{s}{\delta} e^{(1-\alpha)\delta t} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{(1-\alpha)\delta}{2n}, 1-\alpha; \frac{2n-(1-\alpha)\delta}{2n}; -(m-1)e^{-2nt}\right) + C(1-\alpha)s.$$

Wstawiając zaś powyższą całkę do równania (22) otrzymujemy:

$$q(t) = \frac{s}{\delta} (1+(m-1)e^{-2nt})^{1-\alpha} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{(1-\alpha)\delta}{2n}, 1-\alpha; \frac{2n-(1-\alpha)\delta}{2n}; -(m-1)e^{-2nt}\right) + C(1-\alpha)s \left(\frac{1+(m-1)e^{-2nt}}{e^{\delta t}}\right)^{1-\alpha},$$

co, po uwzględnieniu podstawienia Bernoulliego (12), daje<sup>12</sup>:

$$k(t) = \left[ \frac{s}{\delta} (1+(m-1)e^{-2nt})^{1-\alpha} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{(1-\alpha)\delta}{2n}, 1-\alpha; \frac{2n-(1-\alpha)\delta}{2n}; -(m-1)e^{-2nt}\right) + C(1-\alpha)s \left(\frac{1+(m-1)e^{-2nt}}{e^{\delta t}}\right)^{1-\alpha} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (26)$$

a to, wraz z funkcją wydajności pracy  $y(t) = (k(t))^\alpha$ , prowadzi do równości:

$$y(t) = \left[ \frac{s}{\delta} (1+(m-1)e^{-2nt})^{1-\alpha} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{(1-\alpha)\delta}{2n}, 1-\alpha; \frac{2n-(1-\alpha)\delta}{2n}; -(m-1)e^{-2nt}\right) + C(1-\alpha)s \left(\frac{1+(m-1)e^{-2nt}}{e^{\delta t}}\right)^{1-\alpha} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (27)$$

Właściwości matematyczne owej funkcji scharakteryzowane są np. w pracach Korn, Korn (1983, s. 269 i dalsze) lub Cattani (2006). Natomiast jej wykorzystanie w modelowaniu procesów wzrostu gospodarczego na gruncie tzw. modelu Lucasa-Uzawy znajduje się w opracowaniach Boucekkine, Ruiz-Tamarit (2004, 2008) i Zawadzkiego (2015), na gruncie modelu Solowa w pracy Guerriniego (2006) lub na gruncie modelu Mankiwa, Romera, Weila w opracowaniu Krawca, Szydłowskiego (2002).

<sup>12</sup> Stała całkowania  $C$  w równaniach (26) i (27) dobrana będzie w prezentowanych dalej symulacjach numerycznych tak, by spełniony był warunek  $k(0) = y(0) = 1$ .

Związki (26) i (27) wyznaczają ścieżki wzrostu technicznego uzbrojenia pracy i wydajności pracy z logistyczną funkcją liczby pracujących (2). Ścieżki te są funkcjami nieelementarnymi i z tego względu ich kształt analizowany będzie w części opisującej wyniki symulacji numerycznych.

Należy jednak zauważyć, że przy  $t \rightarrow +\infty$  funkcja hipergeometryczna:

$${}_2F_1\left(-\frac{(1-\alpha)\delta}{2n}, 1-\alpha; \frac{2n-(1-\alpha)\delta}{2n}; -(m-1)e^{-2nt}\right) \rightarrow {}_2F_1\left(-\frac{(1-\alpha)\delta}{2n}, 1-\alpha; \frac{2n-(1-\alpha)\delta}{2n}; 0\right) = 1,$$

co powoduje, że – zgodnie z równaniami (26–27) – zachodzi:  $k(t) \rightarrow \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$  oraz  $y(t) \rightarrow \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ . Wielkości  $\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$  i  $\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$  wyznaczają (odpowiednio) długookresowe techniczne uzbrojenie pracy oraz wydajność pracy w modelu Solowa ze ścieżką wzrostu liczby pracujących określoną przez funkcję logistyczną (2). Ponieważ  $\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} > \left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$  oraz  $\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} > \left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ , zatem wielkości te są wyższe, niż w analogicznym, oryginalnym modelu Solowa (z funkcją produkcji Cobba-Douglassa).

Przy gaussowskiej ścieżce wzrostu liczby pracujących (3) ścieżkę wzrostu ubytku kapitału na pracującego określa równanie:

$$\theta(t) = \delta + \lambda(t) = \delta + 2n - \frac{2n}{T}t,$$

co powoduje, że jedną z całek  $\int \theta(t)dt$  można zapisać następująco:

$$\int \theta(t)dt = \left( (\delta + 2n) - \frac{n}{T}t \right) t. \quad (28)$$

Stąd zaś oraz z równania (14) płynie wniosek, iż w rozważanym tu przypadku zachodzi:

$$q(t) = \exp\left(- (1-\alpha) \left( (\delta + 2n) - \frac{n}{T}t \right) t\right) \cdot q_d(t). \quad (29)$$

Natomiast całkę  $q_d(t)$  daną równaniem (16), po uwzględnieniu związku (28), można zapisać wzorem:

$$q_d(t) = (1-\alpha)s \int \exp\left[\left( (\delta + 2n) - \frac{n}{T}t \right) t\right] dt = (1-\alpha)sG(t). \quad (30)$$

Zapiszmy całkę  $G(t) = \int \exp\left[\left( (\delta + 2n) - \frac{n}{T}t \right) t\right] dt$  z równania (30) jako:

$$G(t) = \int \exp(at - bt^2) dt = \int \exp \left[ - \left( \sqrt{bt} - \frac{a}{2\sqrt{b}} \right)^2 + \frac{a^2}{4b} \right] dt,$$

gdzie:  $a = \delta + 2n > 0$  oraz  $b = n / T > 0$ , lub:

$$G(t) = \exp \left( \frac{a^2}{4b} \right) \int \exp \left[ - \left( \sqrt{bt} - \frac{a}{2\sqrt{b}} \right)^2 \right] dt.$$

Dokonując podstawienia:

$$u(t) = \sqrt{bt} - \frac{a}{2\sqrt{b}} \Rightarrow t(u) = \frac{u + \frac{a}{2\sqrt{b}}}{\sqrt{b}} \Rightarrow dt = \frac{du}{\sqrt{b}}$$

całkę  $G(t)$  możemy zapisać wzorem:

$$G(u(t)) = \frac{\exp \left( \frac{a^2}{4b} \right)}{\sqrt{b}} \int e^{-u^2} du,$$

co powoduje, że:

$$G(u(t)) = \frac{\sqrt{\pi} \exp \left( \frac{a^2}{4b} \right)}{2\sqrt{b}} \operatorname{erf}(u) + C,$$

gdzie  $\operatorname{erf}(u)$  jest funkcją błędu Gaussa<sup>13</sup>, zaś  $C \in \mathbb{R}$  – stałą całkowania, lub:

$$G(t) = \frac{\sqrt{\pi} \exp \left( \frac{a^2}{4b} \right)}{2\sqrt{b}} \operatorname{erf} \left( \sqrt{bt} - \frac{a}{2\sqrt{b}} \right) + C,$$

co (po uwzględnieniu podstawień  $a = \delta + 2n$  oraz  $n = T / n$ ) daje:

<sup>13</sup> Funkcja ta określona jest następującym wzorem:  $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-v^2} dv$ . Funkcja błędu Gaussa

charakteryzuje się m.in. następującymi właściwościami (za Opyrchał, 2014 oraz <https://www.wolframalpha.com/>):

(i)  $\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z)$ ,

(ii)  $\operatorname{erf}(0) = 0$ ,

(iii)  $\lim_{z \rightarrow +\infty} \operatorname{erf}(z) = 1$ ,

(iv)  $\forall z \in \mathbb{R} \frac{d \operatorname{erf}(z)}{dz} > 0$ ,

(v)  $\forall z < 0 \frac{d^2 \operatorname{erf}(z)}{dz^2} > 0$  oraz  $\forall z > 0 \frac{d^2 \operatorname{erf}(z)}{dz^2} < 0$ .

$$G(t) = \frac{\sqrt{\pi} \exp\left(\frac{(\delta + 2n)^2 T}{4n}\right)}{2\sqrt{n/T}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{n}{T}} t - \frac{\delta + 2n}{2\sqrt{n/T}}\right) + C. \quad (31)$$

Wstawiając zaś całkę (31) do równania (30) mamy:

$$q_d(t) = \frac{(1-\alpha)s\sqrt{\pi} \exp\left(\frac{(\delta + 2n)^2 T}{4n}\right)}{2\sqrt{n/T}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{n}{T}} t - \frac{\delta + 2n}{2\sqrt{n/T}}\right) + C(1-\alpha)s. \quad (32)$$

Po wstawieniu równania (32) do związku (29) dochodzimy do zależności:

$$q(t) = \frac{\frac{(1-\alpha)s\sqrt{\pi} \exp\left(\frac{(\delta + 2n)^2 T}{4n}\right)}{2\sqrt{n/T}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{n}{T}} t - \frac{\delta + 2n}{2\sqrt{n/T}}\right) + C(1-\alpha)s}{\exp\left[(1-\alpha)\left(\delta + 2n - \frac{n}{T}t\right)t\right]},$$

co, po uwzględnieniu podstawienia Bernoulliego  $k(t) = (q(t))^{\frac{1}{1-\alpha}}$  i funkcji wydajności pracy  $y(t) = (k(t))^\alpha$ , daje<sup>14</sup>:

$$k(t) = \frac{\left(\frac{(1-\alpha)s\sqrt{\pi} \exp\left(\frac{(\delta + 2n)^2 T}{4n}\right)}{2\sqrt{n/T}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{n}{T}} t - \frac{\delta + 2n}{2\sqrt{n/T}}\right) + C(1-\alpha)s\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\exp\left[\left(\delta + 2n - \frac{n}{T}t\right)t\right]} \quad (33)$$

oraz:

$$y(t) = \frac{\left(\frac{(1-\alpha)s\sqrt{\pi} \exp\left(\frac{(\delta + 2n)^2 T}{4n}\right)}{2\sqrt{n/T}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{n}{T}} t - \frac{\delta + 2n}{2\sqrt{n/T}}\right) + C(1-\alpha)s\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\exp\left[\alpha\left(\delta + 2n - \frac{n}{T}t\right)t\right]}. \quad (34)$$

<sup>14</sup> Również w równaniach (33) i (34) stałą całkowania  $C$  dobrano w symulacjach numerycznych tak, by zachodził warunek  $k(0) = y(0) = 1$ .

Równania (33) i (34) wyznaczają ścieżki wzrostu technicznego uzbrojenia pracy i wydajności pracy w modelu Solowa z gaussowską ścieżką wzrostu liczby pracujących. Ponieważ funkcja błędu Gaussa jest funkcją nieelementarną, zatem również równania te opisują funkcje nieelementarne. Można jednak zauważyć, że przy  $t \rightarrow +\infty$   $\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{n}{T}}t - \frac{\delta + 2n}{2\sqrt{n/T}}\right) \rightarrow 1$  a  $\exp\left(\left((\delta + 2n) - \frac{n}{T}t\right)t\right) \rightarrow 0^+$ , co powoduje, że wówczas  $k(t) \rightarrow +\infty$  i  $y(t) \rightarrow +\infty$ .

#### 4. KALIBRACJA PARAMETRÓW MODELU I SYMULACJE NUMERYCZNE

Podobnie jak w pracach Filipowicz, Tokarskiego (2015) oraz Filipowicz i inni (2015) autorzy skalibrowali parametr  $\alpha$  na takim poziomie, by przy relacji technicznego uzbrojenia pracy w dwóch gospodarkach równej 5 stosunek wydajności pracy wynosił 3. Wówczas przy funkcji wydajności pracy (17) mamy<sup>15</sup>:

$$\alpha = \frac{\ln(y_1 / y_2)}{\ln(k_1 / k_2)} = \frac{\ln 3}{\ln 5} \approx 0,68261.$$

Ponadto arbitralnie przyjęto, że  $\delta = 0,07$ ,  $n = 0,01$  oraz  $m = e$ . Wówczas moment  $T$  przy logistycznej ścieżce wzrostu równy jest  $T = \frac{\ln(e-1)}{0,02} \approx 27,066$ , zaś przy gaussowskiej ścieżce wzrostu  $T = \frac{\ln e}{0,01} = 100$ . Stopę inwestycji zmieniano co 10 punktów procentowych od 10% do 40%. 10% stopy inwestycji nazywane będą dalej niskimi stopami inwestycji, 20% – średnimi, 30% – wysokimi, 40% zaś – bardzo wysokimi stopami inwestycji.

W tabeli 1 zestawiono symulacje wydajności pracy w czterech wyróżnionych wariantach stóp inwestycji przy założeniu standardowej ( $y_1$ ), logistycznej ( $y_2$ ) oraz gaussowskiej ( $y_3$ ) trajektorii liczby pracujących. We wszystkich wariantach symulacyjnych przyjęto, iż w momencie  $t = 0$  techniczne uzbrojenie pracy i wydajność pracy są równe 1.

Natomiast na rysunkach 2–5 przedstawiono trajektorie odpowiednich wydajności pracy przy 10%, 20%, 30% i 40% stopie inwestycji<sup>16</sup>.

<sup>15</sup> Gdyby (zgodnie z dekompozycją Solowa, 1957) przyjąć, że  $\alpha = 1/3$ , to przy  $k_1/k_2 = 5$  otrzymuje się:

$\frac{y_1}{y_2} = 3\sqrt[3]{\frac{k_1}{k_2}} = \sqrt[3]{15} \approx 1,70998$ , co wydaje się wielkością mocno niedoszacowaną.

<sup>16</sup> Kształt ścieżek wzrostu technicznego uzbrojenia pracy jest bardzo zbliżony do kształtu ścieżek wzrostu wydajności pracy.

Tabela 1.

Symulacje wydajność pracy przy standardowej ( $y_1$ ), logistycznej ( $y_2$ ) oraz gaussowskiej ( $y_3$ ) trajektorii liczby pracujących i przy  $\delta = 0,07$ ,  $n = 0,01$ ,  $\alpha \approx 0,68261$  i  $m = e$

Rok $t$	Stopa inwestycji $s$ (%)											
	10			20			30			40		
	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
10	1,124	1,110	1,067	1,866	1,845	1,779	2,810	2,781	2,689	3,963	3,924	3,802
20	1,226	1,207	1,132	2,738	2,701	2,555	4,908	4,846	4,606	7,762	7,672	7,311
50	1,428	1,437	1,331	4,825	4,866	4,558	10,451	10,548	9,924	18,431	18,609	17,551
75	1,514	1,587	1,512	5,868	6,151	5,907	13,385	14,030	13,514	24,258	25,425	24,528
100	1,562	1,716	1,721	6,463	7,090	7,147	15,093	16,548	16,708	27,686	30,345	30,664
150	1,601	1,912	2,262	6,970	8,310	9,841	16,565	19,732	23,372	30,655	36,503	43,240
200	1,612	2,033	3,065	7,117	8,969	13,501	16,990	21,399	32,215	31,516	39,682	59,738
$+\infty$	1,616	2,153	$+\infty$	7,175	9,562	$+\infty$	17,161	22,870	$+\infty$	31,860	42,459	$+\infty$

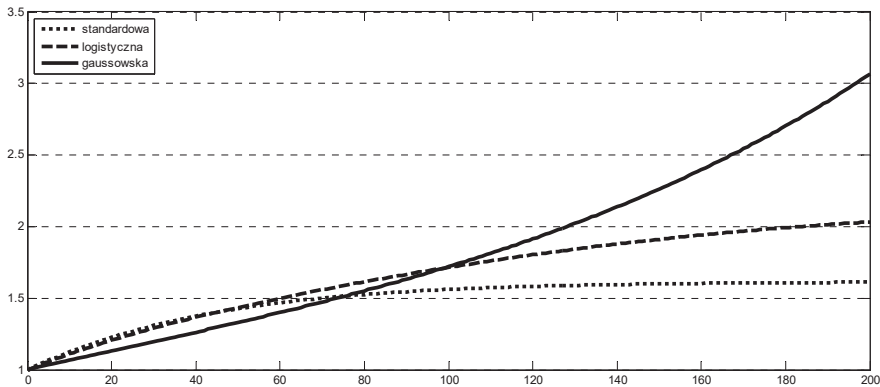
Źródło: obliczenia własne.

Z prezentowanych wyników symulacji numerycznych można wyciągnąć następujące wnioski:

- Jeśli założy się, że pewna gospodarka cechuje się niską stopą inwestycji (na poziomie 10%) oraz liczbą pracujących rosnącą wykładniczo, to długookresowa wydajność pracy w tej gospodarce (czyli wydajność pracy przy  $t \rightarrow +\infty$ ) będzie wyższa o niewiele ponad 60%, niż w momencie początkowym ( $t = 0$ ). Jeżeli zaś przyjmiemy, że liczba pracujących będzie rosła do asymptoty równej  $e$ , to wydajność pracy ustabilizuje się na poziomie o ponad 110% wyższym, niż w momencie  $t = 0$ . Z kolei przyjmując gaussowską trajektorię liczby pracujących okazuje się, że już po 100 latach wydajność pracy będzie o ponad 70% wyższa niż w momencie  $t = 0$ , a po 150 latach o ponad 120% wyższa niż w momencie początkowym (por. rysunek 2).
- Przyjmując zaś, że gospodarka cechuje się średnimi stopami inwestycji oraz że w momencie początkowym cechowała się wydajnością pracy równą 1, wówczas w długim okresie w przypadku standardowej trajektorii liczby pracujących wydajność pracy ustabilizuje się na poziomie 7,175, a w przypadku trajektorii logistycznej na poziomie 9,562. W trzecim wariantcie zmian liczby pracujących (gaussowskim), wydajność pracy już po 100 latach osiągnie poziom 7,147, po 150 latach 9,841, a po 200 latach 13,501 i dalej będzie rosła do  $+\infty$  (por. rysunek 3).
- Rozważając wariant z wysokimi stopami inwestycji, w 200-letnim horyzoncie czasowym wydajność pracy zwiększy się do poziomu 16,990 (przy standardowej trajektorii liczby pracujących), do poziomu 21,399 (przy logistycznej trajektorii)

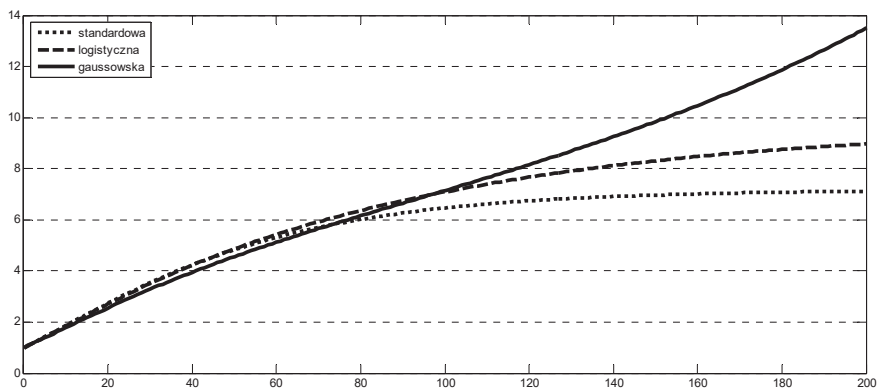
oraz do poziomu 32,215 (przy gaussowskiej trajektorii). Ponadto zakładając, iż liczba pracujących będzie zmieniać się zgodnie z gaussowską trajektorią, po 150 latach wydajność pracy będzie wynosić 23,372 i tym samym będzie wyższa niż długookresowe wartości omawianej zmiennej makroekonomicznej dla standardowej oraz logistycznej ścieżki wzrostu.

- Zakładając zaś, że gospodarka będzie cechować się bardzo wysokimi stopami inwestycji, dochodzimy do wniosku, że wydajność pracy ustabilizuje się wówczas na poziomie 31,860 dla standardowej ścieżki wzrostu liczby pracujących oraz na poziomie 42,492 dla ścieżki logistycznej. Przy gaussowskiej trajektorii liczby pracujących już po 100 latach poziom wydajności pracy będzie wynosił 30,664, a po 150 latach 43,240 i dalej będzie się zwiększał do  $+\infty$  (por. rysunek 5).



Rysunek 2. Ścieżki wzrostu wydajności pracy przy standardowej, logistycznej oraz gaussowskiej trajektorii liczby pracujących i  $s = 10\%$

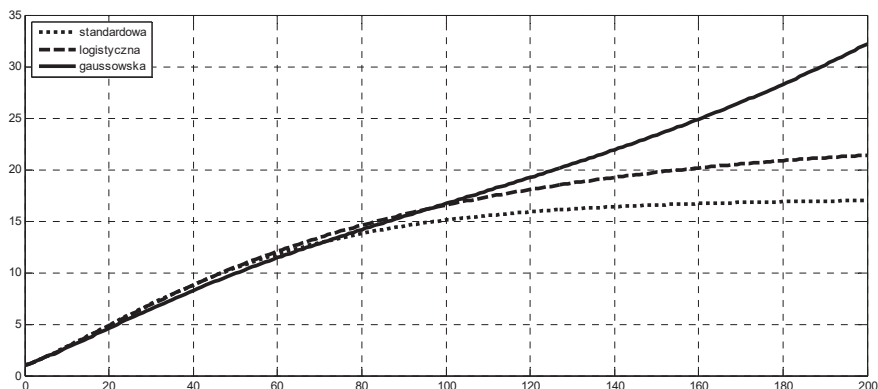
Źródło: obliczenia własne.



Rysunek 3. Ścieżki wzrostu wydajności pracy przy standardowej, logistycznej oraz gaussowskiej trajektorii liczby pracujących i  $s = 20\%$

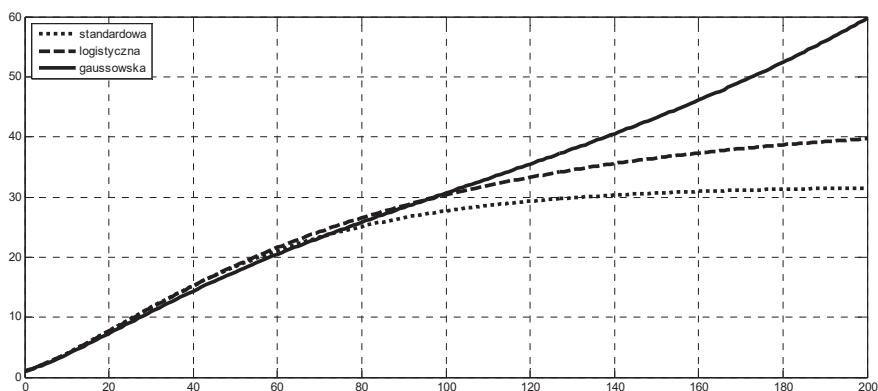
Źródło: obliczenia własne.





Rysunek 4. Ścieżki wzrostu wydajności pracy przy standardowej, logistycznej oraz gaussowskiej trajektorii liczby pracujących i  $s = 30\%$

Źródło: obliczenia własne.



Rysunek 5. Ścieżki wzrostu wydajności pracy przy standardowej, logistycznej oraz gaussowskiej trajektorii liczby pracujących i  $s = 40\%$

Źródło: obliczenia własne.

## 5. PODSUMOWANIE

Prowadzone w pracy rozważania można podsumować następująco:

- (i) W oryginalnym modelu wzrostu Solowa zakłada się m.in., że liczba pracujących rośnie według stałej stopy wzrostu. W prezentowanych w pracy rozważaniach zakłada się zaś, że liczba pracujących zmienia się po trajektorii określonej przez funkcję logistyczną lub funkcję przypominającą kształtem funkcję gęstości rozkładu normalnego Gaussa.
- (ii) Przy logistycznej ścieżce wzrostu liczby pracujących trajektorie technicznego uzbrojenia pracy i wydajności pracy określone są przez pewne funkcje złożone

- z funkcją hipergeometryczną Gaussa, natomiast przy gaussowskiej ścieżce wzrostu liczby pracujących – przez funkcje złożone z funkcją błędu Gaussa.
- (iii) W prowadzonych w pracy symulacjach numerycznych elastyczność produkcji względem nakładów kapitału skalibrowano na poziomie równym 0,68216, zaś stopy inwestycji zmieniano co 10 punktów procentowych od 10% do 40%.
  - (iv) We wszystkich czterech wariantach stóp inwestycji, przy standardowej oraz logistycznej trajektorii liczby pracujących, wydajność pracy rośnie do pewnej asymptoty, przy czym asymptota ta jest położona wyżej dla funkcji logistycznej. Natomiast przy gaussowskiej ścieżce wzrostu liczby pracujących wydajność pracy rośnie do  $+\infty$ . Ponadto dynamika wydajności pracy przy standardowej oraz logistycznej trajektorii liczby pracujących przez początkowe 50 lat jest bardzo zbliżona. Następnie występuje znaczne spowolnienie tempa wzrostu wydajności pracy w modelu ze standardową trajektorią liczby pracujących. Z kolei wydajność pracy przy założeniu gaussowskiej ścieżki wzrostu liczby pracujących początkowo jest niższa niż w przypadku pozostałych dwóch ścieżek, jednak po 75 latach dogania poziom wydajności pracy przy standardowej ścieżce, a po 100 latach zaczyna przewyższać także poziom wydajności pracy przy logistycznej trajektorii liczby pracujących.
  - (v) Różnice w przyjętych założeniach o stopach inwestycji prowadzą do bardzo istotnych różnic w poziomie wydajności pracy niezależnie od rozważanej ścieżki wzrostu liczby pracujących. Przyjęcie stopy inwestycji kolejno na poziomie 10%, 20%, 30% i 40% pozwoli oczekiwać zwiększenia wydajności pracy z 1 w momencie  $t = 0$  do kolejno 1,562–1,721, 6,463–7,147, 15,093–16,708, oraz 27,686–30,664 w 100-letnim horyzoncie czasowym. Jest to zgodne z odpowiednim wnioskiem wynikającym z oryginalnego modelu Solowa, z tą różnicą, że przy gaussowskiej ścieżce wzrostu liczby pracujących równanie Solowa nie ma nietrywialnego punktu stacjonarnego, zaś wydajność pracy rośnie do  $+\infty$ .

#### LITERATURA

- Bianca C., Guerrini L., (2014), Existence of Limit Cycles in the Solow Model with Delayed-Logistic Population Growth, *Scientific World Journal*, 2014.
- Boucekkine R., Ruiz-Tamarit J. R., (2004), Special Functions for the Study of Economic Dynamics: The Case of the Lucas-Uzawa Model, *CORE Discussion Paper*, 84, <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.688904>.
- Boucekkine R., Ruiz-Tamarit J. R., (2008), Special Functions for the Study of Economic Dynamics: The Case of the Lucas-Uzawa Model, *Journal of Mathematical Economics*, 44, 33–54.
- Bucci A., Guerrini L., (2009), Transitional Dynamics in the Solow-Swan Growth Model with AK Technology and Logistic Population Change, *The B.A. Journal of Macroeconomics*, 9, 1–17.
- Cattani E., (2006), Three Lectures on Hypergeometric Functions, *Department of Mathematics and Statistics*, University of Massachusetts. [http://people.math.umass.edu/~cattani/hypergeom\\_lectures.pdf](http://people.math.umass.edu/~cattani/hypergeom_lectures.pdf).
- Cobb C. W., Douglas P. H., (1928), A Theory of Production, *American Economic Review*, 18, 139–165.
- Ferrara M., Guerrini L., (2009), The Ramsey Model with Logistic Population Growth Rate and Benthamite Felicity Function Revisited, *WSEAS Transaction on Mathematics*, 8, 97–106.

- Filipowicz K., Tokarski T., (2015), Dwubiegunowy model wzrostu gospodarczego z przepływami inwestycyjnymi, *Studia Prawno-Ekonomiczne*, 96, 197–221.
- Filipowicz K., Wisła R., Tokarski T., (2015), Produktywność kapitału a inwestycje zagraniczne w dwubiegunowym modelu wzrostu gospodarczego – analiza konwergencji, *Przegląd Statystyczny*, 62 (1), 5–28.
- Guerrini L., (2006), The Solow-Swan Model with the Bounded Population Growth Rate, *Journal of Mathematical Economics*, 42, 14–21.
- Guerrini L., (2010a), A Closed Form Solution to the Ramsey Model with Logistic Population Growth, *Economic Modelling*, 27, 1178–1182.
- Guerrini L., (2010b), The Ramsey Model with a Bounded Population Growth Rate, *Journal of Macroeconomics*, 32, 872–878.
- Guerrini L., (2010c), Logistic Population Change and the Mankiw-Romer-Weil Model, *Applied Sciences*, 12, 96–101.
- Korn G. A., Korn T. M., (1983), *Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów, część 1*, PWN, Warszawa.
- Krawiec A., Szydłowski M., (2002), Własności dynamiki modeli nowej teorii wzrostu, *Przegląd Statystyczny*, 48 (1), 17–24.
- Mankiw N. G., Romer D., Weil D. N., (1992), A Contribution to the Empirics of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics*, 107 (2), 407–437.
- Nonneman W., Vanhoudt P., (1996), A Further Augmentation of the Solow Model and the Empirics of Economic Growth for the OECD Countries, *Quarterly Journal of Economics*, 111 (3), 943–953.
- Opyrczał L., (2014), Funkcja niezawodności i czas bezawaryjnej pracy odpowiadający liniowej intensywności uszkodzeń, *Czasopismo inżynierii lądowej, środowiska i architektury*, 31 (61), 173–182.
- Pindyck R. S., Rubinfeld D. L., (1991), *Econometric Models and Economic Forecast*, McGraw-Hills, New York etc.
- Solow R. M., (1956), A Contribution to the Theory of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics*, 70 (1), 65–94.
- Solow R. M., (1957), Technical Change and the Aggregate Production Function, *Review of Economics and Statistics*, 39, 312–320.
- Tokarski T., (2011), *Ekonomia matematyczna. Modele makroekonomiczne*, PWE, Warszawa.
- Zawadzki H., (2007), Model Solowa-Swana ze zmienną stopą wzrostu populacji, *Prace i Materiały Wydziału Zarządzania Uniwersytetu Gdańskiego*, 5, 213–219.
- Zawadzki H., (2015), Analiza dynamiki modeli wzrostu gospodarczego za pomocą środowiska obliczeniowego Mathematica, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie*, 4/940, 59–69.

## ŚCIEŻKI WZROSTU W MODELU SOLOWA PRZY ALTERNATYWNYCH TRAJEKTORIACH LICZBY PRACUJĄCYCH

### Streszczenie

Celem prezentowanego opracowania jest analiza porównawcza kształtowania się ścieżek wzrostu podstawowych zmiennych makroekonomicznych (wydajności pracy i technicznego uzbrojenia pracy) w modelu wzrostu Solowa przy 3 alternatywnych założeniach dotyczących trajektorii liczby pracujących. Trajektoriami tymi są trajektoria standardowa (tj. rosnąca wykładniczo liczba pracujących), trajektoria logistyczna (na której liczba pracujących rośnie do pewnej asymptoty) oraz tzw. trajektoria gaussowska (na której liczba pracujących przypomina kształtem funkcję gęstości rozkładu normalnego Gaussa).

Uzyskane, niestandardowe ścieżki wzrostu owych zmiennych makroekonomicznych określone są przez pewne funkcje złożone m.in. z funkcją hipergeometryczną i funkcją błędu Gaussa (należące do tzw. funkcji specjalnych Gaussa). Co więcej, na wyznaczonych przez autorów ścieżkach wzrostu

wydajność pracy i techniczne uzbrojenie pracy przy logistycznej ścieżce wzrostu rosną do asymptoty wyżej położonej, niż w oryginalnym modelu Solowa, zaś przy gaussowskiej ścieżce wzrostu liczby pracujących wydajność pracy oraz techniczne uzbrojenie pracy rosną do nieskończoności.

**Słowa kluczowe:** stopa wzrostu liczby pracujących, równowaga modelu Solowa, funkcje specjalne Gaussa

GROWTH PATHS IN THE SOLOW MODEL  
WITH ALTERNATIVE TRAJECTORIES OF THE NUMBER OF WORKERS

A b s t r a c t

The aim of the study is a comparative analysis of growth paths of basic macroeconomic variables (labor productivity and capital labor ratio) in the Solow growth model with three alternative assumptions about the trajectory of the number of workers. There are standard trajectory (the number of workers increasing exponentially), logistics trajectory (the number of workers is growing to the certain asymptote) and so-called Gaussian trajectory (the number of workers is similar to the density function of Gaussian distribution).

In the result, nonstandard growth paths of macroeconomic variables are defined by certain functions compose with hypergeometric function and Gauss error function (so called Gaussian special functions). Moreover, labor productivity and capital labor ratio for logistic trajectory is growing to asymptote, which is located higher than in the original Solow model. The labor productivity and capital labor ratio for Gaussian trajectory of the number of workers increase to infinity.

**Keywords:** growth rate of the number of workers, equilibrium of Solow model, Gaussian special functions