

KRZYSZTOF PIASECKI<sup>1</sup>, JOANNA SIWEK<sup>2</sup>PORTFEL DWUSKŁADNIKOWY  
Z TRÓJKĄTNymi ROZMYTYMI WARTOŚCIAMI BIEŻĄCYMI  
– PODEJŚCIE ALTERNATYWNE<sup>3 4</sup>

## 1. WPROWADZENIE

Pod pojęciem instrumentu finansowego rozumiemy uprawnienie do przyszłego przychodu finansowego wymagalnego w ściśle określonym terminie wymagalności. Wartość tego przychodu interpretujemy, jako antycypowaną wartość przyszłą (w skrócie FV) tego instrumentu. Zgodnie z tezą o niepewności (Mises, 1962; Kaplan, Barish, 1967), każdy przyszły nieznan nam stan rzeczy jest niepewny. Niepewność w ujęciu Misesa i Kaplana jest skutkiem braku naszej wiedzy o przyszłym stanie rzeczy. W rozpatrywanym przypadku, można jednak określić ten przyszły moment czasu, w którym rozpatrywany stan rzeczy będzie już nam znany. Ten rodzaj niepewności Misesa-Kaplana nazywamy w skrócie niepewnością. Jest to warunek wystarczający na to, aby modelem niepewności było prawdopodobieństwo (za Kołmogorow, 1933, 1956; Mises, 1957; Lambalgen, 1996; Sadowski, 1976, 1980; Czerwiński, 1960, 1969; Caplan, 2001). Z tego powodu niepewność nazywamy też niepewnością kwantyfikowalną. Równocześnie warto tutaj zauważyć, że FV nie jest obciążona niepewnością Knighta (1921). Wszystko to prowadzi do stwierdzenia, że FV jest zmienną losową.

Punktem odniesienia do oceny instrumentu finansowego jest jego wartość bieżąca (w skrócie PV), zdefiniowana, jako terażniejszy ekwiwalent płatności dostępnej w ustalonym momencie czasu. Powszechnie jest już akceptowany pogląd, że PV przyszłych przepływów finansowych może być wartością przybliżoną. Naturalną konsekwencją takiego podejścia jest ocena PV za pomocą liczb rozmytych. Odzwierciedleniem tych poglądów było zdefiniowanie rozmytej PV, jako zdyskontowanej rozmytej prognozy wartości przyszłego przepływu finansowego (Ward, 1985). Koncepcja zastosowania

---

<sup>1</sup> Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Wydział Zarządzania, Katedra Inwestycji i Nieruchomości, al. Niepodległości 10, 61-875 Poznań, Polska, autor prowadzący korespondencję, e-mail: k.piascecki@ue.poznan.pl.

<sup>2</sup> Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Wydział Zarządzania, Katedra Inwestycji i Nieruchomości, al. Niepodległości 10, 61-875 Poznań, Polska.

<sup>3</sup> Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji o numerach DEC-2012/05/B/HS4/03543 oraz DEC-2015/17/N/HS4/00206.

<sup>4</sup> Przedstawione tutaj rezultaty zostały zaprezentowane na XXXV Konferencji Naukowej „Metody i Zastosowania Badań Operacyjnych” im. Profesora Władysława Bukietyńskiego (MZBO’16).

liczb rozmytych w arytmetyce finansowej wywodzi się od Buckleya (1987). Definicja Warda jest uogólniona w (Greenhut i inni, 1995) do przypadku nieprecyzyjnie oszacowanego odroczenia. Sheen (2005) rozwija definicję Warda do przypadku rozmytej stopy nominalnej. Buckley (1987), Gutierrez (1989), Kuchta (2000) i Lesage (2001) dyskutują problemy związane z zastosowaniem rozmytej arytmetyki do wyznaczania rozmytej PV. Huang (2007) rozwija definicję Warda do przypadku, kiedy przyszły przepływ finansowy jest dany, jako rozmyta zmienna losowa. Bardziej ogólna definicja rozmytej PV jest proponowana przez Tsao (2005) zakładającego, że przyszły przepływ finansowy jest określony, jako rozmyty zbiór probabilistyczny. Wszyscy ci autorzy przedstawiają PV, jako dyskonto nieprecyzyjnie oszacowanej wartości przyszłego przepływu finansowego. Odmienne podejście zostało zaprezentowane w Piasecki (2011a, 2011c, 2014b), gdzie rozmytą PV oceniono na podstawie bieżącej ceny rynkowej instrumentu finansowego.

Podstawowym narzędziem oceny korzyści płynących z posiadania instrumentu finansowego jest stopa zwrotu zdefiniowana, jako malejąca funkcja PV i równocześnie rosnąca funkcja FV.

W Piasecki (2011c) pokazano, że jeśli PV jest rozmytą liczbą rzeczywistą, to wtedy stopa zwrotu jest rozmytym zbiorem probabilistycznym (Hiroto, 1981). W Siwek (2015) przedstawiono przypadek prostej stopy zwrotu, gdzie PV jest rozmytą liczbą trójkątną, natomiast FV jest zmienną losową o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa. W ten sposób, jako punkt wyjścia wybrano założenie o normalnym rozkładzie prostej stopy zwrotu, przyjęte w klasycznej pracy Markowitza (1952). Za opisaniem PV za pomocą trójkątnej liczby rozmytej przemawiają natomiast wyniki dyskusji przeprowadzonej w Buckley (1987), Gutierrez (1989), Kuchta (2000) i Lesage (2001). Narzędziem stosowanym do oceny korzyści z posiadania instrumentu finansowego była rozmyta oczekiwana stopa zwrotu.

Z posiadaniem instrumentu finansowego jest też związane ryzyko utraty posiadanego bogactwa. W Siwek (2015) do oceny ryzyka zastosowano przedstawiony w Piasecki (2011c) trójwymiarowy obraz ryzyka.

Poprzez portfel finansowy rozumiemy dowolny, skończony elementowy zbiór instrumentów finansowych. Każdy portfel finansowy jest instrumentem finansowym i w związku z tym jest oceniany w ten sam sposób, co jego składniki. W Markowitz (1952) przedstawiono przypadek prostej stopy zwrotu, gdzie PV jest dodatnią liczbą rzeczywistą, natomiast FV jest zmienną losową o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa. Droga dedukcji matematycznej wykazano tam między innymi, że stopa zwrotu z portfela jest średnią arytmetyczną stóp zwrotu z jego poszczególnych składników ważoną za pomocą udziałów tych składników w portfelu.

Praca Markowitza (1952) stanowiła i stanowi punkt wyjścia do dalszego rozwoju teorii portfelowej. Na rozwój tej teorii miała wpływ między innymi teoria zbiorów rozmytych zainicjowana w Zadeh (1965). Teoretycy i praktycy finansów dostrzegali problem nieprecyzyjności oceny stóp zwrotu oraz problem nieprecyzyjności nakładanych ograniczeń. Zaowocowało to powstaniem wielu rozmytych modeli portfela

instrumentów finansowych. Kompetentnym źródłem informacji o tych modelach są monografie Fang i inni (2008) i Gupta i inni (2014). Badania nad przedstawionymi modelami są nadal kontynuowane, czego dowodem mogą być wyniki przedstawione w przykładowych pracach: Huang (2007b), Duan, Stahlecker (2011), Li, Jin (2011), Wu, Liu (2012), Liu, Zhang (2013), Zhang i inni (2013), Mehlawat (2016), Guo i inni (2016), Saborido i inni (2016)<sup>5</sup>.

Jedną ze wspólnych cech łączących wszystkie wymienione powyżej prace jest stosowanie funkcji przynależności zbiorów rozmytych, jako substytutu rozkładu prawdopodobieństwa. Oznacza to, że losowość jest w tych modelach zastępowana przez nieprecyzyjność. Taki paradygmat badawczy został sformułowany w pracy Kosko (1990).

Prace Piasecki (2011a, 2011b, 2011c), Siwek (2015) i prezentowana praca nie mieszczą się w tym nurcie badawczym, gdyż w opisanych tam modelach funkcja przynależności nie zastępuje rozkładu prawdopodobieństwa, ale jedynie wchodzi z tym rozkładem w interakcje. To rozszerzenie modelu w istotny sposób wzbogaca możliwości rzetelnego opisu stopy zwrotu. Pomimo uwzględnienia nieprecyzyjności w oszacowaniu stopy zwrotu, w zaproponowanym rozmytym modelu można wykorzystać bez zmian całą bogatą empiryczną wiedzę zebraną na temat rozkładów prawdopodobieństwa stóp zwrotu. Jest to wysoce korzystna cecha zaproponowanego modelu, gdyż przybliża możliwość jego realnych zastosowań. Losowość jest w tych modelach wchodzi w interakcję z nieprecyzyjnością. Podejście takie jest zgodne z paradygmatem badawczym sformułowanym w pracy Hiroto (1981). W chwili obecnej rozwijane są badania według obu wymienionych powyżej paradygmatów. Modeli uwzględniających interakcję losowości z nieprecyzyjnością jest niestety mniej. Najprawdopodobniej wynika to z faktu wyższej złożoności matematycznej tych modeli. Na niwie finansów skwantyfikowanych do tego nurtu badawczego możemy zaliczyć prace wymienione już w tym akapicie prace oraz Tsao (2005), Huang (2007a), z czego do analizy portfelowej odnosi się jedynie praca Siwek (2015).

Istotnym mankamentem wszystkich cytowanych prac z wyłączeniem Siwek (2015) z zakresu rozmytej teorii portfelowej jest zdefiniowanie *ex cathedra* rozmytej stopy zwrotu z portfela, jako funkcjonału liniowego określonego nad wielowymiarową przestrzenią stóp zwrotu z poszczególnych składników tego portfela. Jedynym uzasadnieniem takiego stanu rzeczy było mechaniczne uogólnienie modelu Markowitza (1952) do przypadku rozmytego. Proponowane postacie funkcjonału liniowego przypisującego stopom zwrotu ze składników portfela stopę zwrotu z portfela nie były uzasadniane drogą dedukcji matematycznej. W istotny sposób osłabiało to wiarygodność przeprowadzanych obliczeń.

Głównym celem pracy Siwek (2015) było porównanie oceny portfela dwuskładnikowego z ocenami jego składników. W wyniku tej analizy uzyskano bardzo skom-

---

<sup>5</sup> Dobór wymienionych tutaj artykułów autorzy zawdzięczają sugestii jednego z recenzentów, za co w tym miejscu mu dziękują.

plikowane zależności. Skomplikowana postać tych zależności uniemożliwiła dalszą formalną analizę właściwości portfela. W tej sytuacji ograniczono się do eksperymentu numerycznego.

Celem prezentowanej pracy jest przedstawienie alternatywnego podejścia do rozwiązania problemu opisanego w Siwek (2015). Do oceny korzyści płynących z posiadania instrumentu finansowego zostanie tutaj zastosowany rozmyty oczekiwany czynnik dyskonta. Wykorzystany też zostanie to, że każda z trójkątnych liczb rozmytych ma ograniczony nośnik. Dzięki temu tam stosowana miara unormowana będzie mogła być zastąpiona przez miarę Khalili'ego (1979).

## 2. WYBRANE ELEMENTY TEORII LICZB ROZMYTYCH

Za pomocą symbolu  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  oznaczamy rodzinę wszystkich podzbiorów rozmytych w prostej rzeczywistej  $\mathbb{R}$ . Dubois, Prade (1979) definiują liczbę rozmytą jako taki podzbiór rozmyty  $L \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  o ograniczonym nośniku reprezentowany przez swą funkcję przynależności  $\mu_L \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$  spełniająca warunki:

$$\exists_{x \in \mathbb{R}} \mu_L(x) = 1, \quad (1)$$

$$\forall_{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: x \leq y \leq z} \Rightarrow \mu_L(y) \geq \min\{\mu_L(x), \mu_L(z)\}. \quad (2)$$

Operacje arytmetyczne na liczbach rozmytych zostały zdefiniowane w (Dubois, Prade, 1978). Zgodnie z zasadą rozszerzenia Zadeha (1965) suma liczb rozmytych  $K, L \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  reprezentowanych odpowiednio przez swe funkcje przynależności  $\mu_K, \mu_L \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$  jest podzbiorem rozmytym:

$$G = K \oplus L \quad (3)$$

opisanym przez swą funkcję przynależności  $\mu_G \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$  daną za pomocą tożsamości:

$$\mu_G(z) = \sup\{\mu_K(x) \wedge \mu_L(z - x) : x \in \mathbb{R}\}. \quad (4)$$

W ten sam sposób, iloczyn liczby rzeczywistej  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  i liczby rozmytej  $L \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  reprezentowanej przez swą funkcję przynależności  $\mu_L \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$  jest podzbiorem rozmytym:

$$H = \gamma \odot L \quad (5)$$

opisanym przez swą funkcją przynależności  $\mu_H \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$  daną za pomocą tożsamości:

$$\mu_H(z) = \mu_L\left(\frac{z}{\gamma}\right). \quad (6)$$

Ponadto, jeśli  $\gamma = 0$ , to wtedy iloczyn (5) jest równy dokładnej liczbie zero. Klasa rozmytych liczb rzeczywistych jest zamknięta ze względu na operacje (3) i (5). Nasze dalsze rozważania ograniczymy do liczb rozmytych o ograniczonym nośniku.

Każda z liczb rozmytych jest informacją o nieprecyzyjnym oszacowaniu rozważanego parametru. Rozważając pojęcie nieprecyzyjności, możemy wyróżnić niejednoznaczność informacji oraz nieostrość informacji (Klir, 1993). Wieloznaczność informacji interpretujemy tutaj jako brak jednoznacznego wyróżnienia rekomendowanego przybliżenia parametru. Nieostrość informacji interpretujemy, jako brak jednoznacznego rozróżnienia pomiędzy rekomendowanymi przybliżeniami parametru a wartościami wykluczonymi, jako przybliżenia tego parametru. Nasilenie się nieprecyzyjności każdej informacji obniża jej przydatność. Stąd powstaje problem oceny nieprecyzyjności.

Właściwym narzędziem do pomiaru wieloznaczności liczby rozmytej jest zaproponowana przez de Luca, Terminiego (1979) miara energii. Wobec przyjęcia założenia o ograniczonym nośniku liczby rozmytej, możemy tutaj zrezygnować ze stosowania znormalizowanej miary sugerowanej w Piasecki (2011c). W naszych rozważaniach miarę energii  $d: \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  określimy za pomocą miary Khalili'ego (1979). Dla dowolnej liczby rozmytej  $L \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  reprezentowanej przez swą funkcję przynależności  $\mu_L \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$  mamy tutaj:

$$d(L) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_L(x) dx. \quad (7)$$

Właściwym narzędziem do pomiaru nieostrości liczby rozmytej jest miara entropii zaproponowana przez de Luca, Terminiego (1972). W naszych rozważaniach miarę energii  $e: \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  określimy zgodnie z sugestiami Kosko (1986). Dla dowolnej liczby rozmytej  $L \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  mamy tutaj:

$$e(L) = \frac{d(L \cap L^c)}{d(L \cup L^c)}. \quad (8)$$

Ze względu na dobre syntetyczne uzasadnienie oraz uniwersalizm powyższej zależności, zaproponowana przez Kosko miara entropii jest obecnie powszechnie stosowana.

Stosując w tej pracy liczby rozmyte szczególną uwagę poświęcimy rozmytym liczbom trójkątnym. Liczba rozmyta  $T(r, s, u)$  wyznaczona dla dowolnego niemalejącego ciągu  $\{r, s, u\} \subset \mathbb{R}$  za pomocą swej funkcji przynależności  $\mu(\cdot | r, s, u) \in [0, 1]^{\mathbb{R}}$  danej za pomocą tożsamości:

$$\mu(x|r, s, u) = \begin{cases} 0 & x < r, \\ \frac{1}{s-r} \cdot (x-r) & r \leq x < s, \\ 1 & x = s, \\ \frac{1}{s-u} \cdot (x-u) & s < x \leq u, \\ 0 & x > u, \end{cases} \quad (9)$$

jest rozmytą liczbą trójkątną. Podstawowymi zaletami liczb trójkątnych są prostota ich dodawania i mnożenia przez nieujemny skalar oraz prostota pomiaru nieprecyzyjności. Dla dowolnej pary rozmytych liczb trójkątnych  $T(r_1, s_1, u_1)$  i  $T(r_2, s_2, u_2)$  oraz  $a, b \in \mathbb{R}_0^+$  mamy:

$$\begin{aligned} T(a \cdot r_1 + b \cdot r_2, a \cdot s_1 + b \cdot s_2, a \cdot u_1 + b \cdot u_2) &= \\ &= (a \odot T(r_1, s_1, u_1)) \oplus (b \odot T(r_2, s_2, u_2)), \end{aligned} \quad (10)$$

$$d(T(r_1, s_1, u_1)) = \frac{1}{2} \cdot (u_1 - r_1), \quad (11)$$

$$e(T(r_1, s_1, u_1)) = \frac{1}{3}. \quad (12)$$

### 3. STOPA ZWROTU Z INSTRUMENTU FINANSOWEGO

Wszystkie rozważania w tym i kolejnym rozdziale prowadzić będziemy dla ustalonego momentu  $t > 0$ . Rozważać będziemy prostą stopę zwrotu  $r_t$  zdefiniowaną za pomocą zależności:

$$r_t = \frac{V_t - V_0}{V_0}, \quad (13)$$

gdzie:

- $V_t$  jest FV opisaną za pomocą zmiennej losowej  $\tilde{V}_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,
- $V_0$  jest PV oszacowaną w sposób dokładny lub przybliżony.

Za Markowiczem (1952) zakładamy, że prosta stopa zwrotu  $\tilde{r}_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  wyznaczona za pomocą (13) dla PV równej cenie rynkowej  $\check{C}$  ma normalny rozkład prawdopodobieństwa  $N(\bar{r}, \sigma)$ . Zmienna losowa FV jest określona wtedy za pomocą zależności:

$$\tilde{V}_t(\omega) = \check{C} \cdot (1 + \tilde{r}_t(\omega)). \quad (14)$$

W tym artykule zakładamy dodatkowo, że PV jest oszacowana za pomocą rozmytej liczby trójkątnej  $T(a, \check{C}, b)$  opisaną za pomocą (9) przez swą funkcję przynależności  $\mu(\cdot | a, \check{C}, b) \in [0, 1]^{\mathbb{R}}$ .

Ograniczenie to pierwotnie zostało zaproponowane przez Kuchtę (2000) i zostało zastosowane w (Siwek, 2015). Parametry liczby trójkątnej  $T(a, \check{C}, b)$  zostały tam zinterpretowane w ten sposób, że:

- $a$  jest maksymalnym dolnym oszacowaniem PV,
- $b$  jest minimalnym górnym oszacowaniem PV.

Przykład metody wyznaczania parametrów  $a$ ,  $b$  przedstawiono w (Piasecki, Siwek, 2015). Parametry  $a$ ,  $\check{c}$ ,  $b$  są zawsze nieujemne.

Zgodnie z zasadą rozszerzenia Zadeha, prosta stopa zwrotu wyznaczona dla tak oszacowanej PV jest rozmytym zbiorem probabilistycznym reprezentowanym przez swą funkcję przynależności  $\tilde{\rho} \in [0; 1]^{\mathbb{R} \times \Omega}$  daną jest za pomocą tożsamości:

$$\tilde{\rho}(r, \omega) = \sup \left\{ \mu(x|a, \check{c}, b) : x = \frac{\tilde{V}_t(\omega)}{1+r}, x \in \mathbb{R} \right\} = \mu \left( \frac{\tilde{V}_t(\omega)}{1+r} \middle| a, \check{c}, b \right) = \mu \left( \check{c} \cdot \frac{1 + \tilde{r}_t(\omega)}{1+r} \middle| a, \check{c}, b \right). \quad (15)$$

Zgodnie z (9) powyższa funkcja przynależności przyjmuje postać:

$$\rho(r, \omega) = \begin{cases} \frac{\check{c} \cdot \frac{1 + \tilde{r}_t(\omega)}{1+r} - a}{\check{c} - a}, & \text{dla } a \leq \check{c} \cdot \frac{1 + \tilde{r}_t(\omega)}{1+r} < \check{c}, \\ 1, & \text{dla } \check{c} \cdot \frac{1 + \tilde{r}_t(\omega)}{1+r} = \check{c}, \\ \frac{\check{c} \cdot \frac{1 + \tilde{r}_t(\omega)}{1+r} - b}{\check{c} - b}, & \text{dla } \check{c} < \check{c} \cdot \frac{1 + \tilde{r}_t(\omega)}{1+r} \leq b, \end{cases} \quad (16)$$

co w równoważnej postaci możemy zapisać jako:

$$\rho(r, \omega) = \begin{cases} \frac{\frac{1 + \tilde{r}_t(\omega)}{1+r} - \frac{a}{\check{c}}}{1 - \frac{a}{\check{c}}}, & \text{dla } \frac{a}{\check{c}} \leq \frac{1 + \tilde{r}_t(\omega)}{1+r} < 1, \\ 1, & \text{dla } \frac{1 + \tilde{r}_t(\omega)}{1+r} = 1, \\ \frac{\frac{1 + \tilde{r}_t(\omega)}{1+r} - \frac{b}{\check{c}}}{1 - \frac{b}{\check{c}}}, & \text{dla } 1 < \frac{1 + \tilde{r}_t(\omega)}{1+r} \leq \frac{b}{\check{c}}. \end{cases} \quad (17)$$

W tej sytuacji oczekiwana stopa zwrotu  $R \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  jest liczbą rozmytą daną za pomocą swej funkcji przynależności  $\rho \in [0, 1]^{\mathbb{R}}$  określonej przez tożsamość:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{\frac{1 + \bar{r}}{1+r} - \frac{a}{\check{c}}}{1 - \frac{a}{\check{c}}}, & \text{dla } \frac{a}{\check{c}} \leq \frac{1 + \bar{r}}{1+r} < 1, \\ 1, & \text{dla } \frac{1 + \bar{r}}{1+r} = 1, \\ \frac{\frac{1 + \bar{r}}{1+r} - \frac{b}{\check{c}}}{1 - \frac{b}{\check{c}}}, & \text{dla } 1 < \frac{1 + \bar{r}}{1+r} \leq \frac{b}{\check{c}}. \end{cases} \quad (18)$$

Czynnik dyskontujący  $v_t$  wyznaczony za pomocą stopy zwrotu  $r_t$  jest określony przez zależność:

$$v_t = \frac{1}{1 + r_t}. \quad (19)$$

W tej sytuacji funkcja  $\delta \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$  określona za pomocą tożsamości:

$$\delta(v) = \delta\left(\frac{1}{1+r}\right) = \rho(r) \quad (20)$$

jest funkcją przynależności czynnika dyskonta  $D \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  wyznaczonego za pomocą oczekiwanej stopy zwrotu  $R \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ . Powyższy czynnik dyskontujący nazywać będziemy oczekiwanym czynnikiem dyskonta. Zestawiając razem (18) i (20) otrzymujemy:

$$\delta(v) = \begin{cases} \frac{\bar{v}^{-1} \cdot v - \frac{a}{\bar{c}}}{1 - \frac{a}{\bar{c}}}, & \text{dla } \frac{a}{\bar{c}} \leq \bar{v}^{-1} \cdot v < 1, \\ 1, & \text{dla } \bar{v}^{-1} \cdot v = 1, \\ \frac{\bar{v}^{-1} \cdot v - \frac{b}{\bar{c}}}{1 - \frac{b}{\bar{c}}}, & \text{dla } 1 < \bar{v}^{-1} \cdot v \leq \frac{b}{\bar{c}}, \end{cases} \quad (21)$$

gdzie  $\bar{v}$  jest czynnikiem dyskontującym wyznaczonym za pomocą oczekiwanej stopy zwrotu  $\bar{r}$ . Stosując elementarne przekształcenia, funkcję przynależności  $\delta \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$  przekształcamy do postaci:

$$\delta(v) = \begin{cases} \frac{v - \bar{v} \cdot \frac{a}{\bar{c}}}{\bar{v} - \bar{v} \cdot \frac{a}{\bar{c}}}, & \text{dla } \bar{v} \cdot \frac{a}{\bar{c}} \leq v < \bar{v}, \\ 1, & \text{dla } v = \bar{v}, \\ \frac{v - \bar{v} \cdot \frac{b}{\bar{c}}}{\bar{v} - \bar{v} \cdot \frac{b}{\bar{c}}}, & \text{dla } \bar{v} < v \leq \bar{v} \cdot \frac{b}{\bar{c}}. \end{cases} \quad (22)$$

Łatwo można dostrzec, że wyznaczony powyżej oczekiwany czynnik dyskonta jest rozmytą liczbą trójkątną  $T\left(\bar{v} \cdot \frac{a}{\bar{c}}, \bar{v}, \bar{v} \cdot \frac{b}{\bar{c}}\right)$ .

Wzrost wieloznaczności oczekiwanego czynnika dyskonta oznacza, że wzrastać będzie ilość alternatywnych rekomendacji inwestycyjnych. Powoduje to wzrost ryzyka wybrania spośród rekomendowanych alternatyw takiej decyzji finansowej, która *ex post* zostanie obciążona stratą utraconych szans. Ten rodzaj ryzyka nazywamy ryzykiem wieloznaczności. Ryzyko wieloznaczności obarczające oczekiwany czyn-



nik dyskonta  $D \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  oceniać będziemy za pomocą miary energii. Zgodnie z (11), miara ta jest równa:

$$d(D) = \frac{\bar{v}}{2 \cdot \check{C}} \cdot (b - a). \quad (23)$$

Wzrost nieostrości oczekiwanego czynnika dyskonta oznacza zacieranie się granic wyróżniających rekomendowane alternatywy decyzyjne. Powoduje to wzrost ryzyka wyboru decyzji nierekomendowanej. Ten rodzaj ryzyka nazywamy ryzykiem nieostrości. Ryzyko nieostrości obarczające oczekiwany czynnik dyskonta  $D \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  oceniać będziemy za pomocą miary entropii  $e(D)$ . Zgodnie z (12), miara ta jest stała.

Oddziałujące wspólnie ryzyko wieloznaczności i ryzyko nieostrości nazywamy ryzykiem nieprecyzyjności.

W każdym z rozpatrywanych przez nas przypadków stopa zwrotu była funkcją FV, która ze swej natury jest niepewna, na co już wskazano w Rozdziale 1. Niepewność ta przenosi się na ocenę stopy zwrotu i jest odzwierciedleniem braku wiedzy o przyszłych stanach rynku finansowego. Brak tej wiedzy powoduje brak pewności u inwestora, co do przyszłych zysków lub strat. Wzrost niepewności wywołuje wzrost ryzyka podjęcia decyzji nietrafnej. Ten rodzaj ryzyka nazywamy ryzykiem niepewności. W naszym modelu ryzyko niepewności oceniać będziemy za pomocą wariancji  $\sigma^2$  stopy zwrotu.

Formalna prostota uzyskanych opisów oczekiwanego czynnika dyskonta zachęca do jego zastosowania, jako narzędzia analizy portfelowej. Kryterium maksymalizacji oczekiwanej stopy zwrotu zostanie wtedy zastąpione kryterium minimalizacji oczekiwanego czynnika dyskonta. W przypadku nierozmytych wartości obu tych parametrów są to kryteria równoważne.

#### 4. PORTFEL DWUSKŁADNIKOWY

Poprzez portfel finansowy rozumieć dowolny, skończenie elementowy zbiór instrumentów finansowych. Każdy z tych instrumentów finansowych jest charakteryzowany przez swą oszacowaną wartość bieżącą i przewidywaną stopę zwrotu.

Rozważmy teraz przypadek dwuskładnikowego portfela  $\pi$ , złożonego z instrumentów finansowych  $Y_1$  i  $Y_2$ . Za Markowiczem (1952) zakładamy, że dla każdego instrumentu  $Y_i (i = 1; 2)$  znamy rozkład prawdopodobieństwa prostej stopy zwrotu  $\tilde{r}_i^i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  wyznaczonej za pomocą (13) dla PV równej cenie rynkowej  $\check{C}_i$ . Identyfikując jak Markowicz, zakładamy, że dwuwymiarowa zmienna losowa  $(\tilde{r}_1^1, \tilde{r}_2^2)^T$  ma łączny rozkład normalny  $N((\bar{r}_1, \bar{r}_2)^T, \Sigma)$ , gdzie macierz kowariancji przyjmuje postać:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & cov_{12} \\ cov_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Każdemu instrumentowi  $Y_i$  przypisujemy wtedy jego FV określona za pomocą zależności:

$$\tilde{V}_t^i(\omega) = \check{C}_i \cdot (1 + \tilde{r}_t^i(\omega)). \quad (25)$$

Udział  $p_i$  instrumentu  $Y_i$  w portfelu  $\pi$  jest określony przez zależność:

$$p_i = \frac{\check{C}_i}{\check{C}}. \quad (26)$$

FV portfela  $\pi$  wtedy wynosi:

$$\tilde{V}_t(\omega) = \tilde{V}_t^1(\omega) + \tilde{V}_t^2(\omega) = \check{C}_1 \cdot (1 + \tilde{r}_t^1(\omega)) + \check{C}_2 \cdot (1 + \tilde{r}_t^2(\omega)) = \check{C} \cdot (1 + \tilde{r}_t(\omega)), \quad (27)$$

gdzie:

$$\tilde{r}_t(\omega) = p_1 \cdot \tilde{r}_t^1(\omega) + p_2 \cdot \tilde{r}_t^2(\omega) \quad (28)$$

jest stopą zwrotu z portfela  $\pi$ . Oczekiwana stopa zwrotu  $\bar{r}$  z portfela jest wtedy równa:

$$\bar{r} = p_1 \cdot \bar{r}_1 + p_2 \cdot \bar{r}_2. \quad (29)$$

Załóżmy, że dla  $i = 1, 2$ , PV instrumentu  $Y_i$  jest określona, jako trójkątna liczba rozmyta  $T(a_i, \check{C}_i, b_i)$  opisana w poprzednim rozdziale. Dzięki (22), wszystkie te dane pozwalają przypisać instrumentowi finansowemu  $Y_i$  oczekiwany czynnik dyskonta:

$$D_i = T\left(\bar{v}_i \cdot \frac{a_i}{\check{C}_i}, \bar{v}_i, \bar{v}_i \cdot \frac{b_i}{\check{C}_i}\right), \quad (30)$$

gdzie  $\bar{v}_i$  jest czynnikiem dyskontującym wyznaczonym za pomocą oczekiwanej stopy zwrotu  $\bar{r}_i$ . Zgodnie z (23), miara energii tej liczby rozmytej jest równa:

$$d(D_i) = \frac{\bar{v}_i}{2 \cdot \check{C}_i} \cdot (b_i - a_i). \quad (31)$$

Stosując (10) można wykazać, że PV portfela  $\pi$  jest opisana, jako trójkątna liczba rozmyta:

$$T(a, \check{C}, b) = T(a_1 + a_2, \check{C}_1 + \check{C}_2, b_1 + b_2). \quad (32)$$

Stosując (22), portfelowi  $\pi$  przypisujemy oczekiwany czynnik dyskonta:

$$D = T\left(\bar{v} \cdot \frac{a}{\check{C}}, \bar{v}, \bar{v} \cdot \frac{b}{\check{C}}\right), \quad (33)$$

gdzie  $\bar{v}$  jest czynnikiem dyskontującym wyznaczonym za pomocą oczekiwanej stopy zwrotu  $\bar{r}$ . Bezpośrednio z (29) wynika warunek:

$$\frac{1}{\bar{v}} = \frac{p_1}{\bar{v}_1} + \frac{p_2}{\bar{v}_2}, \quad (34)$$

dzięki któremu kolejno otrzymujemy:

$$\bar{v} = \left( \frac{p_1}{\bar{v}_1} + \frac{p_2}{\bar{v}_2} \right)^{-1} = \left( \frac{p_1}{\bar{v}_1} + \frac{p_2}{\bar{v}_2} \right)^{-1} \cdot (p_1 + p_2) = \left( \frac{p_1}{\bar{v}_1} + \frac{p_2}{\bar{v}_2} \right)^{-1} \cdot \left( \frac{p_1}{\bar{v}_1} \cdot \bar{v}_1 + \frac{p_2}{\bar{v}_2} \cdot \bar{v}_2 \right), \quad (35)$$

$$\frac{\bar{v}}{\bar{c}} \cdot b = \frac{\bar{v}}{\bar{c}} \cdot (b_1 + b_2) = \bar{v} \cdot \left( p_1 \cdot \frac{b_1}{\bar{c}_1} + p_2 \cdot \frac{b_2}{\bar{c}_2} \right) = \left( \frac{p_1}{\bar{v}_1} + \frac{p_2}{\bar{v}_2} \right)^{-1} \cdot \left( \frac{p_1}{\bar{v}_1} \cdot \left( \bar{v}_1 \cdot \frac{b_1}{\bar{c}_1} \right) + \frac{p_2}{\bar{v}_2} \cdot \left( \bar{v}_2 \cdot \frac{b_2}{\bar{c}_2} \right) \right), \quad (36)$$

$$\frac{\bar{v}}{\bar{c}} \cdot a = \frac{\bar{v}}{\bar{c}} \cdot (a_1 + a_2) = \bar{v} \cdot \left( p_1 \cdot \frac{a_1}{\bar{c}_1} + p_2 \cdot \frac{a_2}{\bar{c}_2} \right) = \left( \frac{p_1}{\bar{v}_1} + \frac{p_2}{\bar{v}_2} \right)^{-1} \cdot \left( \frac{p_1}{\bar{v}_1} \cdot \left( \bar{v}_1 \cdot \frac{a_1}{\bar{c}_1} \right) + \frac{p_2}{\bar{v}_2} \cdot \left( \bar{v}_2 \cdot \frac{a_2}{\bar{c}_2} \right) \right). \quad (37)$$

Następnie, zestawiając razem (10), (22) i (33)÷(37) wnioskujemy, że:

$$D = \left( \left( \left( \frac{p_1}{\bar{v}_1} + \frac{p_2}{\bar{v}_2} \right)^{-1} \cdot \frac{p_1}{\bar{v}_1} \right) \odot D_1 \right) \oplus \left( \left( \left( \frac{p_1}{\bar{v}_1} + \frac{p_2}{\bar{v}_2} \right)^{-1} \cdot \frac{p_2}{\bar{v}_2} \right) \odot D_2 \right). \quad (38)$$

Biorąc pod uwagę powyższą zależność oraz (10) i (11), ostatecznie otrzymujemy, że miara energii oczekiwanego czynnika dyskonta  $D \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  spełnia warunek:

$$d(D) = \left( \frac{p_1}{\bar{v}_1} + \frac{p_2}{\bar{v}_2} \right)^{-1} \cdot \left( \frac{p_1}{\bar{v}_1} \cdot d(D_1) + \frac{p_2}{\bar{v}_2} \cdot d(D_2) \right). \quad (39)$$

Zatem miara energii oczekiwanego czynnika dyskonta portfela  $\pi$  jest średnią ważoną miar energii oczekiwanych czynników dyskonta składników  $Y_i$  tego portfela. Wagi przypisane poszczególnym składnikom  $Y_i$  są wprost proporcjonalne do ich udziału  $p_i$  w portfelu i odwrotnie proporcjonalne do ich czynnika dyskonta  $\bar{v}_i$ . Oznacza to, że dążąc do minimalizacji ryzyka wieloznaczności portfela powinniśmy przede wszystkim minimalizować ryzyko wieloznaczności tych jego składników, które charakteryzują się najwyższymi oczekiwanymi stopami zwrotu, gdyż zgodnie z zasadami analizy portfelowej, wartości udziałów  $p_i$  są określane *post factum*, po zebraniu dostępnych informacji na temat składników portfela. Warunek (39) pokazuje, że w rozważanym przypadku dywersyfikacja portfela jedynie „uśrednia” ryzyko wieloznaczności.

Zgodnie z (12), miara entropii oczekiwanego czynnika dyskonta portfela  $\pi$  jest równa mierze entropii każdego z oczekiwanych czynników dyskonta składników  $Y_i$

tego portfela. W ten sposób warunek (12) wskazuje, że w omawianym przypadku dywersyfikacja portfela nie zmienia ryzyka nieostrości.

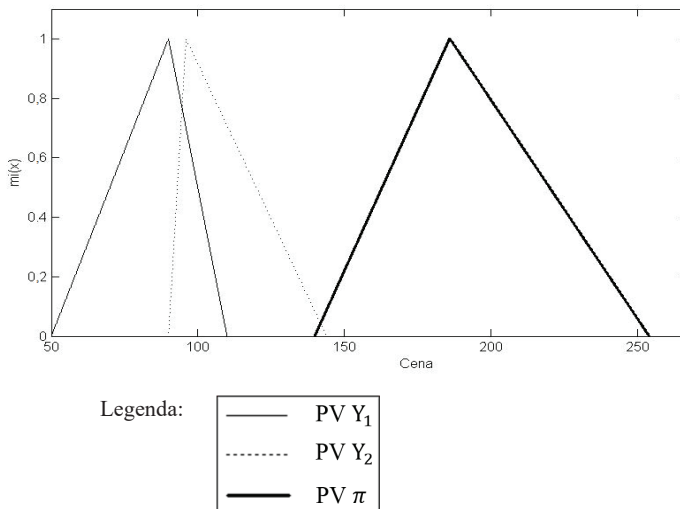
Wariacja stopy zwrotu z portfela wynosi:

$$\sigma^2 = p_1^2 \cdot \sigma_1^2 + 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot cov_{12} + p_2^2 \cdot \sigma_2^2. \quad (40)$$

Korzystając z tej powszechnie znanej zależności Markowitz wykazał, że istnieje możliwość skonstruowania portfela takiego, że wariancja jego stopy zwrotu będzie mniejsza od każdej wariancji stopy zwrotu ze składnika tego portfela. W ten sposób Markowitz wykazał, że dywersyfikacja portfela może służyć „minimalizacji” ryzyka niepewności.

## 5. STUDIUM PRZYPADKU

Portfel  $\pi$  składamy z instrumentów finansowych  $Y_1$  i  $Y_2$ . PV instrumentu  $Y_1$  jest określona za pomocą trójkątnej liczby rozmytej  $T(50; 90; 110)$ . Wykres funkcji przynależności  $\mu(\cdot | 50; 90; 110) \in [0,1]^{\mathbb{R}}$  tej liczby został przedstawiony na rysunku 1.



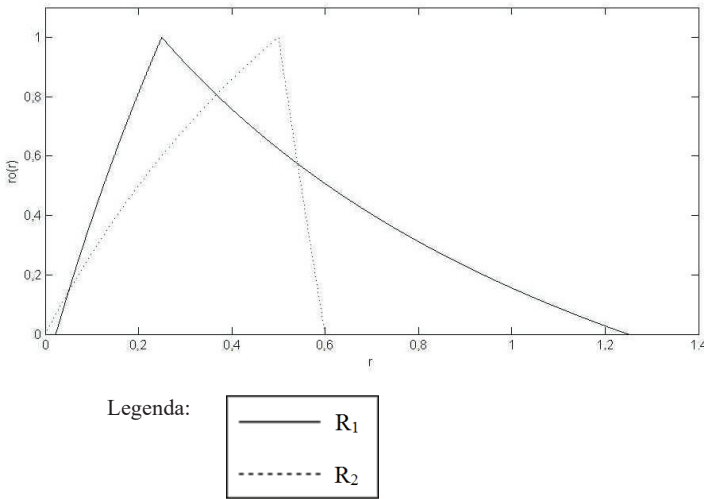
Rysunek 1. Funkcje przynależności PV instrumentów finansowych  $Y_1$  i  $Y_2$  i portfela  $\pi$

Źródło: opracowanie własne.

Przewidywana stopa  $\tilde{r}_t^1: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zwrotu z instrumentu  $Y_1$  jest zmienną losową z rozkładem normalnym  $N(0,25; 0,5)$ . Wtedy, zgodnie z (18), oczekiwana stopa zwrotu z instrumentu  $Y_1$  jest liczbą rozmytą  $R_1 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  daną za pomocą swej funkcji przynależności  $\rho_1 \in [0,1]^{\mathbb{R}}$  określonej przez tożsamość:

$$\rho_1(r) = \begin{cases} \frac{2,25}{1+r} - 1, & \text{dla } 1,25 \geq r > 0,25, \\ 1, & \text{dla } r = 0,25, \\ \frac{-5,625}{1+r} + 5,5 & \text{dla } 0,25 > r \geq 0,0227 \end{cases} \quad (41)$$

i przedstawionej na rysunku 2. Łatwo można dostrzec, że tak określona oczekiwana stopa zwrotu nie jest rozmytą liczbą trójkątną.



Rysunek 2. Funkcje przynależności oczekiwanych stóp zwrotu  $R_1$  i  $R_2$

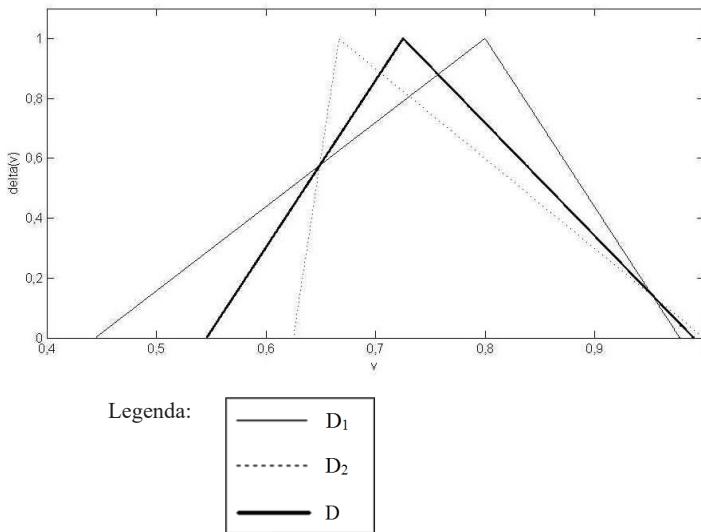
Źródło: opracowanie własne.

Następnie, wyliczamy oczekiwany czynnik dyskonta  $D_1 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  wyznaczony za pomocą oczekiwanej stopy zwrotu  $R_1$ . Zgodnie z (19) i (33), mamy tutaj:

$$D_1 = T\left(\frac{1}{1+0,25} \cdot \frac{50}{90}; \frac{1}{1+0,25}; \frac{1}{1+0,25} \cdot \frac{110}{90}\right) = T(0,4444; 0,8; 0,9778). \quad (42)$$

Wykres funkcji przynależności  $\delta_1 \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$  oczekiwanego czynnika dyskontującego  $D_1$  został przedstawiony na rysunku 3. Korzystając z (23) wyznaczamy miarę energii tego czynnika:

$$d(D_1) = \frac{0,8}{2 \cdot 90} \cdot (110 - 50) = 0,2667. \quad (43)$$

Rysunek 3. Funkcje przynależności oczekiwanych czynników dyskonta  $D_1$ ,  $D_2$  i  $D$ 

Źródło: opracowanie własne.

PV instrumentu  $Y_2$  jest określona jako trójkątna liczba rozmyta  $T(90; 96; 144)$ . Wykres funkcji przynależności  $\mu(\cdot | 90; 96; 144) \in [0,1]^{\mathbb{R}}$  tej liczby został przedstawiony na rysunku 1.

Przewidywana stopa  $\tilde{r}_t^2: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zwrotu z instrumentu  $Y_2$  jest zmienną losową z rozkładem normalnym  $N(0,5; 0,4)$ . Wtedy, zgodnie z (18), oczekiwana stopa zwrotu z instrumentu  $Y_2$  jest liczbą rozmytą  $R_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  daną za pomocą swej funkcji przynależności  $\rho_2 \in [0,1]^{\mathbb{R}}$  określonej przez tożsamość:

$$\rho_2(r) = \begin{cases} \frac{24}{1+r} - 15, & \text{dla } 0,6 \geq r > 0,5, \\ 1, & \text{dla } r = 0,5, \\ \frac{-3}{1+r} + 3 & \text{dla } 0,5 > r \geq 0 \end{cases} \quad (44)$$

i przedstawionej na rysunku 2. Łatwo można dostrzec, że także tutaj oczekiwana stopa zwrotu nie jest rozmytą liczbą trójkątną. Następnie, wyliczamy oczekiwany czynnik dyskonta  $D_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  wyznaczony za pomocą oczekiwanej stopy zwrotu  $R_2$ . Zgodnie z (19) i (33), mamy tutaj

$$D_2 = T\left(\frac{1}{1+0,5} \cdot \frac{90}{96}; \frac{1}{1+0,5}; \frac{1}{1+0,5} \cdot \frac{144}{96}\right) = T(0,6250; 0,6667; 1). \quad (45)$$

Wykres funkcji przynależności  $\delta_2 \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$  oczekiwanego czynnika dyskontującego  $D_2$  został przedstawiony na rysunku 3. Korzystając z (23) wyznaczamy miarę energii tego czynnika:

$$d(D_2) = \frac{0,6667}{2 \cdot 96} \cdot (144 - 90) = 0,1875. \quad (46)$$

Zgodnie z (10), PV portfela  $\pi$  jest trójkątną liczbą rozmytą:

$$PV = T(50 + 90; 90 + 96; 110 + 144) = T(140; 186; 254). \quad (47)$$

Wartość tą wyznaczamy jedynie w celach poglądowych. Wykres funkcji przynależności  $\mu(\cdot | 140; 186; 256) \in [0, 1]^{\mathbb{R}}$  tej liczby został przedstawiony na rysunku 1 w celu porównania PV portfela  $\pi$  z PV jego składników  $Y_1$  i  $Y_2$ .

Zgodnie z (26), udziały  $p_1$  i  $p_2$  odpowiednio instrumentów finansowych  $Y_1$  i  $Y_2$  w portfelu  $\pi$  są równe:

$$p_1 = \frac{90}{186} = \frac{15}{31}, \quad p_2 = \frac{96}{186} = \frac{16}{31}. \quad (48)$$

Portfelowi  $\pi$  przypisujemy oczekiwany czynnik dyskonta  $D \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ . Zgodnie z (38), czynnik ten jest następującej liczbie rozmytej:

$$\begin{aligned} D &= \left( \left( \left( \left( \frac{15}{31} + \frac{16}{31} \right)^{-1} \cdot \frac{15}{0,8} \right) \odot D_1 \right) \oplus \left( \left( \left( \frac{15}{31} + \frac{16}{31} \right)^{-1} \cdot \frac{16}{0,6667} \right) \odot D_2 \right) \right) = \\ &= (0,4386 \odot T(0,4444; 0,8; 0,9778)) \oplus (0,5614 \odot T(0,6250; 0,6667; 1)) = \\ &= T(0,5458; 0,7252; 0,9923). \end{aligned} \quad (49)$$

Wykres funkcji przynależności  $\delta \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$  oczekiwanego czynnika dyskontującego  $D$  został przedstawiony na rysunku 3. Miarę energii tego czynnika możemy teraz wyznaczyć za pomocą (39) w następujący sposób:

$$\begin{aligned} d(D) &= 0,4386 \cdot d(D_1) + 0,5614 \cdot d(D_2) = \\ &= 0,4386 \cdot 0,2667 + 0,5614 \cdot 0,1875 = 0,2222. \end{aligned} \quad (50)$$

Zgodnie z tym, co przewidziano już w Rozdziale 4, mamy tutaj:

$$d(D_1) > d(D) > d(D_2). \quad (51)$$

Zatem utworzenie portfela  $\pi$  uśredniło ponoszone ryzyko wieloznaczności. Łączny rozkład wektora  $(\tilde{r}_t^1, \tilde{r}_t^2)^T$  stóp zwrotu ze składników portfela  $\pi$  jest rozkładem normalnym  $N((0,25; 0,5)^T, \Sigma)$ , gdzie macierz kowariancji ma postać:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,20 \\ 0,20 & 0,16 \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Korzystając z (40), wyznaczamy wariancję stopy zwrotu:

$$\sigma^2 = 0,0020 < \min\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}. \quad (53)$$

Oznacza to, że utworzenie portfela  $\pi$  zminimalizowało ponoszone ryzyko niepewności. Zgodnie z (12), ponoszone ryzyko niepewności nie uległo zmianie.

## 6. PODSUMOWANIE

Przeprowadzone badania wskazują na fakt, że istnieją efektywne metody portfelowego zarządzania ryzykiem nieprecyzyjności mającym swoją przyczynę w przybliżonym oszacowaniu PV poszczególnych składników portfela. Przedmiotem badania był tutaj portfel dwuskładnikowy złożony ze składników mających PV oszacowane, jako trójkątne liczby rozmyte. Dla tego przypadku portfela wykazano, że:

- dywersyfikacja portfelowa może zmniejszyć ryzyko niepewności;
- dywersyfikacja portfelowa uśrednia ryzyko wieloznaczności;
- dywersyfikacja portfelowa nie ma wpływu na ryzyko nieostrości.

Oznacza to, że istnieją portfele obarczone nieusuwalnym drogą dywersyfikacji takim ryzykiem, które jest nieusuwalne drogą dywersyfikacji portfelowej. W badanym przypadku wykazano też, że dywersyfikacja portfelowa nie zwiększa ryzyka nieprecyzyjności. Oznacza to, że zmniejszenie ryzyka niepewności nie wywołuje powiększenia się ryzyka nieprecyzyjności.

Fakt braku wpływu dywersyfikacji portfelowej na ryzyko nieostrości może stanowić istotną wadę modelu opisanego w tej pracy. Źródło tej wady jest oczywiste. Wszystkie rozmyte liczby trójkątne mają identyczną miarę entropii. W tej sytuacji rodzi się postulat opisu PV za pomocą wybranej klasy liczb rozmytych o zmiennej mierze entropii. Najbardziej oczywistym przykładem takiej klasy liczb są rozmyte liczby trapezoidalne.

W tej pracy i w Siwek (2015) rozważano identyczny przypadek problemu zarządzania ryzykiem nieprecyzyjności. Obie prace w diametralny sposób różnią się sposobem podejścia do tego problemu. W Siwek (2015) powyższe wnioski uzyskano jedynie



dla pojedynczego studium przypadku będącego eksperymentem numerycznym. Tutaj, stosując alternatywne podejście, te wnioski uzyskaliśmy drogą dedukcji formalnej dla dowolnego portfela dwuskładnikowego złożonego ze składników mających PV oszacowane, jako trójkątne liczby rozmyte. Pozwala to wykazać przewagę poznawczą zastosowanego tutaj alternatywnego podejścia nad podejściem zastosowanym w Siwek (2015).

Uzyskane powyżej wyniki badań zachęcają do ich kontynuacji. Sugerowanym kierunkiem przyszłych badań może być uogólnienie przedstawienia wartości bieżącej na przypadek rozmytej liczby trapezoidalnej. Stosując indukcję matematyczną, wszystkie uzyskiwane tą drogą wyniki można będzie uogólnić do przypadku portfela  $n$ -składnikowego.

#### LITERATURA

- Buckley I. J., (1987), The Fuzzy Mathematics of Finance, *Fuzzy Sets and Systems*, 21, 257–273.
- Caplan B., (2001), Probability, Common Sense, and Realism: a Reply to Hulsmann and Block, *The Quarterly Journal of Austrian Economics*, 4 (2), 69–86.
- Chiu, C. Y., Park, C. S., (1994), Fuzzy Cash Flow Analysis Using Present Worth Criterion, *The Engineering Economist*, 39 (2), 113–138.
- Czerwiński Z., (1960), Enumerative Induction and the Theory of Games, *Studia Logica*, 10, 29–38.
- Czerwiński Z., (1969), *Matematyka na usługach ekonomii*, PWN, Warszawa.
- Duan L., Stahlecker P., (2011), A Portfolio Selection Model Using Fuzzy Returns, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 10 (2), 167–191.
- Dubois D., Prade H., (1978), Operations on Fuzzy Numbers, *International Journal of Systems Science* 9, 613–626.
- Dubois D., Prade H., (1979), Fuzzy Real Algebra: Some Results, *Fuzzy Sets and Systems*, 2, 327–348.
- Fang Y., Lai K. K., Wang S., (2008), Fuzzy Portfolio Optimization. Theory and Methods, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 609, Springer, Berlin.
- Greenhut J. G., Norman G., Temponi C. T., (1995), Towards a Fuzzy Theory of Oligopolistic Competition, *IEEE Proceedings of ISUMA-NAFIPS*, 286–291.
- Guo S., Yu L., Li X., Kar S., (2016), Fuzzy Multi-Period Portfolio Selection with Different Investment Horizons, *European Journal of Operational Research*, 254 (3), 1026–1035.
- Gupta P., Mehrlawat M. K., Inuiguchi M., Chandra S., (2014), Fuzzy Portfolio Optimization. Advances in Hybrid Multi-criteria Methodologies, *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, 316, Springer, Berlin.
- Gutierrez I., (1989), Fuzzy Numbers and Net Present Value, *Scandinavian Journal of Management*, 5 (2), 149–159.
- Hiroto K., (1981), Concepts of Probabilistic Sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 5, 31–46.
- Huang X., (2007a), Two New Models for Portfolio Selection with Stochastic Returns Taking Fuzzy Information, *European Journal of Operational Research*, 180 (1), 396–405.
- Huang X., (2007b), Portfolio Selection with Fuzzy Return, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 18 (4), 383–390.
- Khalili S., (1979), Fuzzy Measures and Mappings, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 68, 92–99.
- Klir G. J., (1993), Developments In Uncertainty-Based Information, *Advances in Computers*, 36, 255–332.
- Knight F. H., (1921), *Risk, Uncertainty, and Profit*, Hart, Schaffner & Marx, Houghton Mifflin Company, Boston, MA.

- Kolmogorov A. N., (1933), *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Julius Springer, Berlin.
- Kolmogorov A. N., (1956), *Foundations of the Theory of Probability*, Chelsea Publishing Company, New York.
- Kosko B., (1986), Fuzzy Entropy and Conditioning, *Information Sciences*, 40, 165–174.
- Kosko B., (1990), Fuzziness vs Probability, *International Journal of General Systems*, 17 (2/3), 211–240.
- Kuchta D., (2000), Fuzzy Capital Budgeting, *Fuzzy Sets and Systems*, 111, 367–385.
- Lambalgen M. von, (1996), Randomness and Foundations of Probability: Von Mises' Axiomatization of Random Sequences, *Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes – Monograph Series* 30, 347–367.
- Lesage C., (2001), Discounted Cash-Flows Analysis. An Interactive Fuzzy Arithmetic Approach, *European Journal of Economic and Social Systems*, 15 (2), 49–68.
- Li Ch., Jin J., (2011), Fuzzy Portfolio Optimization Model with Fuzzy Numbers, w: Li S., Wang X., Okazaki Y., Kawabe J., Murofushi T., Guan L., (red.), *Nonlinear Mathematics for Uncertainty and its Applications, Advances in Intelligent and Soft Computing*, 100, 557–565.
- Liu Y.-J., Zhang W.-G., (2013), Fuzzy Portfolio Optimization Model Under Real Constraints, *Insurance: Mathematics and Economics*, 53 (3), 704–711.
- de Luca A., Termini S., (1972), A Definition of a Non-Probabilistic Entropy in The Settings of Fuzzy Set Theory, *Information and Control*, 20, 301–313.
- de Luca A., Termini S., (1979), Entropy And Energy Measures Of Fuzzy Sets, w: Gupta M. M., Ragade R. K., Yager R. R., (red.), *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, 321–338.
- Markowitz H. S. M., (1952), Portfolio Selection, *Journal of Finance*, 7 (1), 77–91.
- Mehlawat M. K., (2016), Credibilistic Mean-Entropy Models for Multi-Period Portfolio Selection with Multi-Choice Aspiration Levels, *Information Science*, 345, 9–26.
- Mises R. von, (1957), *Probability, Statistics And Truth*, The Macmillan Company, New York.
- Mises L. von, (1962), *The Ultimate Foundation of Economic Science an Essay on Method*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton.
- Piasecki K., (2011a), *Rozmyte zbiory probabilistyczne, jako narzędzie finansów behawioralnych*, Wyd. UE, Poznań.
- Piasecki K., (2011b), Effectiveness of Securities with Fuzzy Probabilistic Return, *Operations Research and Decisions*, 21 (2), 65–78.
- Piasecki K., (2011c), Behavioural Present Value, *SSRN Electronic Journal*, DOI:10.2139/ssrn.1729351.
- Piasecki K., (2014b), Behawioralna wartość bieżąca – nowe podejście, *Optimum Studia Ekonomiczne* 67, 36–45.
- Piasecki K., Siwek J., (2015), Behavioural Present Value Defined as Fuzzy Number – a New Approach, *Folia Oeconomica Stetinensia*, 15 (2), 27–41.
- Saborido R., Ruiz A. B., Bermúdez J. D., Vercher E., Luque M., (2016), Evolutionary Multi-Objective Optimization Algorithms for Fuzzy Portfolio Selection, *Applied Soft Computing*, 39, 48–63.
- Sadowski W., (1977), *Decyzje i prognozy*, PWN, Warszawa.
- Sadowski W., (1980), *Forecasting and Decision Making*, Quantitative Wirtschafts- und Unternehmensforschung, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Sheen J. N., (2005), Fuzzy Financial Profitability Analyses Of Demand Side Management Alternatives From Participant Perspective, *Information Sciences*, 169, 329–364.
- Siwek J., (2015), Portfel dwuskładnikowy – studium przypadku dla wartości bieżącej danej jako trójkątna liczba rozmyta, *Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach* 241, 140–150.
- Tsao C.-T., (2005), Assessing the Probabilistic Fuzzy Net Present Value For a Capital, Investment Choice Using Fuzzy Arithmetic, *Journal of Chinese Institute of Industrial Engineers*, 22 (2), 106–118.
- Ward T. L., (1985), Discounted Fuzzy Cash Flow Analysis, *1985 Fall Industrial Engineering Conference Proceedings*, 476–481.

- Wu X.-L., Liu Y. K., (2012), Optimizing Fuzzy Portfolio Selection Problems by Parametric Quadratic Programming, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 11 (4), 411–449.
- Zadeh L., (1965), Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8, 338–353.
- Zhang X., Zhang W.-G., Xiao W., (2013), Multi-Period Portfolio Optimization under Possibility Measures, *Economic Modelling*, 35, 401–408.

PORTFEL DWUSKŁADNIKOWY  
Z TRÓJKĄTNYMI ROZMYTYMI WARTOŚCIAMI BIEŻĄCYMI  
– PODEJŚCIE ALTERNATYWNE

Streszczenie

Główny celem jest przedstawienie właściwości portfela dwuskładnikowego dla przypadku, kiedy wartość bieżąca jest oszacowana za pomocą trójkątnej liczby rozmytej. Wyznaczone zostały rozmyte oczekiwany czynnik dyskonta z portfela oraz oceny ryzyka nieprecyzyjności obciążającego ten portfel. Dzięki temu został opisany wpływ dywersyfikacji portfelowej na ryzyko nieprecyzyjności.

**Słowa kluczowe:** portfel dwuskładnikowy, wartość bieżąca, trójkątną liczbą rozmytą, czynnik dyskonta

TWO-ASSET PORTFOLIO WITH TRIANGULAR FUZZY PRESENT VALUES  
– AN ALTERNATIVE APPROACH

Abstract

The main purpose of this article is to present characteristics of a two-asset portfolio in case of present values of assets being given by a triangular fuzzy number. Fuzzy expected discounting factor for a portfolio and imprecision risk assessments for the imprecision burdening a portfolio were appointed throughout the paper. Thanks to this, the influence of portfolio diversification on an imprecision risk was analyzed and some interesting conclusions were stated.

**Keywords:** two-asset portfolio, present value, triangular fuzzy number, discounting factor

