

POLSKA AKADEMIA NAUK  
KOMITET STATYSTYKI I EKONOMETRII

# PRZEGLĄD STATYSTYCZNY

STATISTICAL REVIEW

TOM 64

**4**

2017

WARSZAWA 2017

## WYDAWCA

Komitet Statystyki i Ekonometrii Polskiej Akademii Nauk

## RADA PROGRAMOWA

Andrzej S. Barczak, Czesław Domański, Marek Gruszczyński, Krzysztof Jajuga (Przewodniczący),  
Tadeusz Kufel, Igor G. Mantsurov, Jacek Osiewalski, Sven Schreiber, Mirosław Szreder, D. Stephen  
G. Pollock, Jaroslav Ramík, Peter Summers, Matti Virén, Aleksander Welfe, Janusz Wywiał

## KOMITET REDAKCYJNY

Magdalena Osińska (Redaktor Naczelny)  
Marek Walesiak (Zastępca Redaktora Naczelnego, Redaktor Tematyczny)  
Michał Majsterek (Redaktor Tematyczny)  
Maciej Nowak (Redaktor Tematyczny)  
Anna Pajor (Redaktor Statystyczny)  
Piotr Fiszedler (Sekretarz Naukowy)

Wydanie publikacji dofinansowane przez Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego

© Copyright by Komitet Statystyki i Ekonometrii PAN

Strona WWW „Przegląd Statystyczny”:  
<http://www.przegladstatystyczny.pan.pl>

Nakład 140 egz.



Przygotowanie do druku:  
Dom Wydawniczy ELIPSA  
ul. Inflancka 15/198, 00-189 Warszawa  
tel./fax 22 635 03 01, 22 635 17 85  
e-mail: [elipsa@elipsa.pl](mailto:elipsa@elipsa.pl), [www.elipsa.pl](http://www.elipsa.pl)

Druk:  
Centrum Poligrafii Sp. z o.o.  
ul. Łopuszańska 53  
02-232 Warszawa

## SPIS TREŚCI

|                                                                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Justyna Wróblewska – Analiza modelu realnego cyklu koniunkturalnego<br>z wykorzystaniem Bayesowskich modeli typu VEC. ....        | 357 |
| Ewa Roszkowska – O możliwościach wykorzystania skierowanych liczb rozmytych<br>do podejmowania decyzji wielokryterialnych .....   | 373 |
| Piotr Kębłowski – Innowacyjność przedsiębiorstw przemysłowych państw Grupy Wyszehradzkiej<br>a nakłady na badania i rozwój .....  | 399 |
| Iwona Müller-Frączek – Propozycja miary syntetycznej .....                                                                        | 421 |
| Marek Walesiak, Marek Obrębski – Spójność społeczna województwa dolnośląskiego<br>w latach 2005–2015 – pomiar i ocena zmian ..... | 437 |

## CONTENTS

|                                                                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Justyna Wróblewska – The Analysis of Real Business Cycle Model<br>with the Use of Bayesian VEC Type Models.....                                  | 357 |
| Ewa Roszkowska – The Application Ordered Fuzzy Numbers<br>to Multi-Criteria Decision Making.....                                                 | 373 |
| Piotr Kębłowski – Innovativeness of Industrial Enterprises of the Visegrad Group<br>and the Expenditures on Research and Development.....        | 399 |
| Iwona Müller-Frączek – Proposition of Synthetic Measure.....                                                                                     | 421 |
| Marek Walesiak, Marek Obrębski – Social Cohesion of Lower Silesia Region<br>in the Period 2005–2015 – Measurement and Evaluation of Changes..... | 437 |

JUSTYNA WRÓBLEWSKA<sup>1</sup>ANALIZA MODELU REALNEGO CYKLU KONIUNKTURALNEGO  
Z WYKORZYSTANIEM BAYESOWSKICH MODELI TYPU VEC<sup>2</sup>

## 1. WSTĘP

Wiele teoretycznych modeli ekonomicznych zakłada występowanie zarówno długo-, jak i krótkookresowych zależności pomiędzy wielkościami pochodzącymi z gospodarki. Do najbardziej znanych przykładów należą różne wersje modelu realnego cyklu koniunkturalnego (modelu RBC), którego nawet najbardziej podstawowa forma przewiduje, że zachowaniem wielkości ekonomicznych sterują wspólne trendy stochastyczne oraz czynniki krótkookresowe. Pytanie, jak duża część zachowania zmiennej jest wynikiem trendów stochastycznych (a więc zaburzeń losowych o trwałym oddziaływaniu), a ile jest wynikiem wstrząsów o charakterze przejściowym, jest ważne, ponieważ poznając naturę podstawowych agregatów makroekonomicznych określamy możliwości wpływania na nie. W kontekście modeli RBC przyjmuje się, że nawet w krótkich okresach za zachowaniem analizowanych wielkości stoją głównie wstrząsy o trwałym oddziaływaniu (wstrząsy realne), a znaczenie wstrząsów przejściowych (utożsamianych ze wstrząsami nominalnymi) jest mniejsze.

Celem niniejszego opracowania jest empiryczna analiza podstawowego modelu RBC zbudowanego dla produkcji, konsumpcji i inwestycji w gospodarce polskiej w latach 1997–2015, a przez to uzyskanie odpowiedzi na pytanie o naturę wstrząsów sterujących ich zachowaniem. Dla zbadania tego zagadnienia zostanie wykorzystana grupa bayesowskich modeli typu VEC, w których prócz restrykcji nałożonych na parametry opisujące związki długookresowe, dodatkowo mogą zostać nałożone restrykcje na parametry opisujące zależności w skończonym okresie. Podobne badania, ale z wykorzystaniem wnioskowania częstościowego, były już prowadzone dla makroekonomicznych szeregów czasowych pochodzących z gospodarki Stanów Zjednoczonych (zob. np. Hecq i inni, 2000; Issler, Vahid, 2001; Centoni, Cubadda, 2003).

Punkt 2 artykułu poświęcono zarysowaniu teorii ekonomicznej. W punkcie 3 przedstawione zostały bayesowskie modele wykorzystane w części empirycznej. Punkt 4 prezentuje analizowane dane i uzyskane rezultaty. Artykuł kończy podsumowanie i wskazanie kierunków dalszych badań.

<sup>1</sup> Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Wydział Zarządzania, Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych, ul. Rakowicka 27, 31-510 Kraków, Polska, e-mail: wroblewj@uek.krakow.pl.

<sup>2</sup> Praca została sfinansowana ze środków przyznanych Wydziałowi Zarządzania Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, w ramach dotacji na utrzymanie potencjału badawczego.

## 2. MODEL EKONOMICZNY

W niniejszym opracowaniu zajmujemy się empiryczną analizą podstawowego modelu realnego cyklu koniunkturalnego (modelu RBC), który opisuje zachowanie i zależności trzech zmiennych – produkcji ( $Y$ ), konsumpcji ( $C$ ) oraz inwestycji ( $I$ ). Zgodnie z modelem teoretycznym zaproponowanym w 1988 roku przez Kinga i innych (zob. np. King i inni, 1991; Issler, Vahid, 2001) długookresowe zachowanie tych zmiennych jest sterowane jednym wspólnym trendem stochastycznym, a krótko- i średniookresowe – jednym tzw. wspólnym czynnikiem cyklicznym (Issler, Vahid, 2001):

$$\begin{aligned}\log(Y_t) &= \log(X_t^p) + \bar{y} + \pi_{yk}\hat{k}_t, \\ \log(C_t) &= \log(X_t^p) + \bar{c} + \pi_{ck}\hat{k}_t, \\ \log(I_t) &= \log(X_t^p) + \bar{i} + \pi_{ik}\hat{k}_t,\end{aligned}\tag{1}$$

gdzie  $\log(X_t^p) = \mu + \log(X_{t-1}^p) + \varepsilon_t^p$ ,  $\varepsilon_t^p \sim WN(\sigma^2)$  jest procesem technologicznym,  $\bar{y}$ ,  $\bar{c}$ ,  $\bar{i}$  są wartościami ustalonymi dla  $\log(Y_t/X_t^p)$ ,  $\log(C_t/X_t^p)$ ,  $\log(I_t/X_t^p)$ , odpowiednio, a  $\pi_{jk}$ ,  $j = y, c, i$  oznacza elastyczność  $j$ -tej zmiennej względem odchyłeń zasobów kapitału od wartości  $\hat{k}_t$ . W tak zdefiniowanym modelu przyjmujemy zatem założenie, że zachowanie trzech omawianych procesów ( $\log(Y_t)$ ,  $\log(C_t)$ ,  $\log(I_t)$ ) jest sterowane jednym wspólnym trendem stochastycznym ( $\log(X_t^p)$ ), który powstaje w wyniku trwałego oddziaływania (kumulacji) wstrząsów wydajności, oraz jednym wspólnym czynnikiem cyklicznym ( $\hat{k}_t$ ), który wynika z założenia, że krótkookresowa dynamika systemu jest liniową funkcją odchyłeń zasobów kapitału od stanu ustalonego (Issler, Vahid, 2001), a więc zależy od jednego czynnika. Spodziewamy się zatem dwóch relacji kointegrujących oraz dwóch różnych liniowych kombinacji zmiennych, które nie będą zawierały części cyklicznej. Dodatkowo, Issler, Vahid (2001) przypomnieli, że synchronizacja części cyklicznej konsumpcji i produkcji została również teoretycznie uzasadniona w pracy Campbella, Mankiwa (1989) i jest ona związana z zachowaniem konsumentów, którzy cały swój dochód z danego okresu przeznaczają na konsumpcję. Im wyższy ich udział w ogóle konsumentów, tym wyższa amplituda cyklu.

Omówiona wyżej teoria została wielokrotnie wykorzystana w empirycznych badaniach. Podstawowy model RBC szacowany dla danych pochodzących z gospodarki Stanów Zjednoczonych jest powszechnie spotykanym przykładem, zarówno w tekstach dotyczących analizy kointegracji, jak i wspólnych czynników cyklicznych, z wykorzystaniem częstościowego wnioskowania statystycznego. Wydaje się, że nie ma podobnych opracowań dla szeregów czasowych z gospodarki polskiej, w których dodatkowo wykorzystano by wnioskowanie bayesowskie. Celem niniejszego opracowania jest zatem uzupełnienie tej luki. Badanie pozwoli ponadto ocenić wpływ wstrząsów długo- i krótkookresowych na analizowane zmienne, co pomoże w poznaniu ich natury.

### 3. MODELE Z KRÓTKO- I DŁUGOOKRESOWYMI RESTRYKCJAMI

Podstawowym modelem wykorzystanym w badaniu będzie  $n$ -wymiarowy model wektorowej autoregresji rzędu  $k$  (VAR( $k$ )) ze stałą, i procesem innowacji zadany gaussowskim białym szumem:

$$y_t = A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \dots + A_k y_{t-k} + c + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iIN(0, \Sigma), \quad (2)$$

$\Sigma$  jest dodatnio określoną  $n$ -wymiarową macierzą symetryczną.

Początki stosowania tego typu modeli w empirycznych analizach makroekonomicznych związane są z przełomową pracą Simsa (1980), w której autor podsumował problemy pojawiające się w analizach opartych na tradycyjnych modelach makroekonomicznych oraz wskazał możliwości i zalety czysto statystycznych modeli VAR. Dowolny proces VAR można przedstawić w postaci wektorowego modelu z mechanizmem korekty błędów<sup>3</sup> (VEC). Dodatkowo, na parametry modelu VEC zostaną narzucone restrykcje zarówno krótko-, jak i długookresowe. Zgodnie z twierdzeniem Grangera o reprezentacji procesy sterowane wspólnymi trendami stochastycznymi (procesy skointegrowane) mają reprezentację w postaci modelu VEC, w której tzw. macierz mnożników długookresowych jest osobliwa (zob. np. Engle, Granger, 1987 dla modelu jednorównaniowego i Johansen, 1995 dla modeli VEC):

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= \alpha \tilde{\beta}' \tilde{y}_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \Gamma_2 \Delta y_{t-2} + \dots + \Gamma_{k-1} \Delta y_{t-k+1} + \tilde{c} + \varepsilon_t = \\ &= \alpha \tilde{\beta}' \tilde{y}_{t-1} + \Gamma' z_t + \tilde{c} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iIN(0, \Sigma). \end{aligned} \quad (3)$$

Wektor  $\tilde{y}_{t-1}$ , wymiaru  $m \times 1$  ( $m \geq n$ ), może zawierać składowe deterministyczne ( $\tilde{y}_{t-1} = (y'_{t-1} d'_{t-1})'$ ), tak więc liczba składowych deterministycznych ograniczonych do przestrzeni kointegrującej wynosi  $m - n$ . Macierze  $\alpha_{n \times r}$  i  $\tilde{\beta}_{m \times r} = (\beta', c_\beta')$  mają pełen rząd kolumnowy  $r$ , który jest rzędem kointegracji i oznacza liczbę relacji długookresowych definiowanych przez  $r$  liniowo niezależnych wektorów kointegrujących,  $\alpha \beta' = \sum_{i=1}^k A_i - I_n = \Pi$ ,  $\Gamma_i = -\sum_{i+1}^k A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k-1$ ,  $\Gamma' = (\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{k-1})$ ,  $z_t = (\Delta y'_{t-1}, \Delta y'_{t-2}, \dots, \Delta y'_{t-k+1})'$ .

W reprezentacji Beveridge'a, Nelsona (1981) procesów skointegrowanych (zob. np. Johansen, 1995):

$$y_t = \delta_t + \tau_t + \kappa_t = \delta_t + C(1) \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_t + C^*(L) \varepsilon_t, \quad (4)$$

<sup>3</sup> Angielska nazwa *error correction mechanism* tłumaczona jest na język polski jako mechanizm korekty błędów (zob. np. Osiewalski, Marzec 1996–97) lub mechanizm korekty błędem (zob. np. Welfe, 2013). W niniejszej pracy postanowiono posługiwać się pierwszym z nich.

$C(1)$  jest macierzą niepełnego rzędu  $r(C(1)) = n - r$ . Trend stochastyczny  $(\tau_t)$  jest więc tworzony przez  $n - r$  procesów będących błędzeniem przypadkowym. Macierz wielomianowa  $C^*(L)$ , opisująca tzw. część cykliczną  $(\kappa_t)$ , jest nieosobliwa<sup>4</sup>.

Uwzględnienie zależności krótkookresowych prowadzi do restrykcji nałożonych na macierze  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k - 1$  i/lub  $\alpha$ . Model z restrykcjami nałożonymi zarówno na macierze  $\Gamma_i$ , jak i  $\alpha$  został zaproponowany i omówiony przez Vahida, Engle'a (1993). Zadali oni pytanie, czy istnieje liniowa niezerowa kombinacja procesów skointegrowanych, która nie zawiera części cyklicznej. W odpowiedzi pokazali, że linowe kombinacje, które eliminują autokorelację pierwszych różnic procesów stochastycznych, zastosowane do ich poziomów eliminują część cykliczną (tzn. jeżeli istnieje macierz  $\gamma_\perp$ , taka że  $\gamma'_\perp \Delta y_t = \gamma'_\perp \tilde{c} + \gamma'_\perp \varepsilon_t$ , to  $\gamma'_\perp \kappa_t = 0$ ). W reprezentacji VEC takich procesów pojawia się dodatkowa restrykcja niepełnego rzędu, nałożona na macierze parametrów opisujących dynamikę krótkookresową (zob. również Hecq i inni, 2006):

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= \gamma \delta'_0 \tilde{\beta}' \tilde{y}_{t-1} + \gamma \delta'_1 \Delta y_{t-1} + \gamma \delta'_2 \Delta y_{t-2} + \dots + \gamma \delta'_{k-1} \Delta y_{t-k+1} + \tilde{c} + \varepsilon_t \\ &= \gamma \delta' \tilde{z}_t + \tilde{c} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iin(0, \Sigma), \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie  $\tilde{z}_t = (\tilde{y}'_{t-1} \tilde{\beta}', z'_t)'$ ,  $\delta' = (\delta'_0, \delta'_1, \dots, \delta'_{k-1})$ . Macierze  $\gamma$  i  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k - 1$  mają  $n - s$  kolumn,  $\gamma'_\perp \gamma = 0$ ,  $\gamma'_\perp \gamma_\perp = 0$ ,  $r(\gamma) = n - s$ ,  $s$  jest liczbą liniowo niezależnych wektorów cech wspólnych, tj. wektorów eliminujących autokorelację przyrostów oraz część cykliczną poziomów (ang. *co-feature vectors*)<sup>5</sup>. Wektory te są elementami przestrzeni rozpinanej przez dopełnienie ortogonalne macierzy  $\gamma$ . Wspólne czynniki krótkookresowe  $(f_t)$  są liniową kombinacją  $\tilde{z}_t$ :  $f_t = \delta' \tilde{z}_t$ . Jeżeli krótkookresowe zachowanie analizowanych wielkości sterowane jest wspólnymi czynnikami cyklicznymi, wówczas ich reakcja na egzogeniczne zaburzenie losowe jest współliniowa.

Hecq i inni (2006) wyżej opisanym zależnościom krótkookresowym nadali nazwę silnej odmiany struktur zredukowanego rzędu (ang. *strong form reduced rank structures*, SF). Dodatkowo rozważyli oni słabszy typ krótkookresowej zależności, kiedy to istnieje co najmniej jedna liniowa kombinacja pierwszych przyrostów procesów skorygowanych o zależności długookresowe i składowe deterministyczne  $(\Delta y_t - \alpha \beta' y_{t-1} - \tilde{c} - \alpha \beta' d_{t-1})$ , będąca białym szumem (tj. istnieje macierz  $\gamma_\perp$  taka, że  $\gamma'_\perp (\Delta y_t - \alpha \beta' y_{t-1} - \tilde{c} - \alpha \beta' d_{t-1}) = \gamma'_\perp \varepsilon_t$ ). Zależności te nazwali strukturami zredukowanego rzędu słabej postaci (ang. *weak form reduced rank structures*, WF). Reprezentacja VEC takich procesów przedstawia się następująco:

<sup>4</sup> Symbolem  $\delta t$  oznaczono składową deterministyczną procesy  $y_t$ . Parametry dekompozycji Beveridge'a i Nelsona są funkcjami parametrów reprezentacji VEC rozważanego procesu.

<sup>5</sup> Jak wspomniano, wektory cech wspólnych usuwają część cykliczną w reprezentacji Beveridge'a, Nelsona, dlatego też rozważane modele nazywane są również modelami ze wspólnymi czynnikami cyklicznymi. Należy jednak pamiętać, by nie przypisywać im znaczenia cykli koninkuralnych, lecz jedynie łączyć ze zredukowaną liczbą wspólnych czynników sterujących zachowaniem krótkookresowej składowej wspomnianej dekompozycji (zob. np. Vahid, Engle, 1993; Cubadda, 1999).



$$\begin{aligned}\Delta y_t &= \alpha \tilde{\beta}' \tilde{y}_{t-1} + \gamma \delta'_1 \Delta y_{t-1} + \gamma \delta'_2 \Delta y_{t-2} + \dots + \gamma \delta'_{k-1} \Delta y_{t-k+1} + \tilde{c} + \varepsilon_t \\ &= \alpha \tilde{\beta}' \tilde{y}_{t-1} + \gamma \tilde{\delta}' z_t + \tilde{c} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iN(0, \Sigma),\end{aligned}\quad (6)$$

gdzie  $\tilde{\delta}' = (\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_{k-1})$ , a pozostałe oznaczenia są takie jak w równaniu (5). Można pokazać (zob. np. Cubadda, 2007), że macierz wielomianowa  $\gamma_{\perp}(L) = \gamma_{\perp} - (\beta \alpha' + I_n) \gamma_{\perp} L$ , czyli taka, że  $\gamma_{\perp}(L)' y_t = \gamma'_{\perp} (\alpha \tilde{c}'_t d_{t-1} + \tilde{c} + \varepsilon_t)$ , znosi zależność od czasu również w części cyklicznej, tj. iloczyn  $\gamma_{\perp}(L)' \kappa_t$  jest białym szumem ( $\gamma_{\perp}(L)' \kappa_t = \gamma'_{\perp} (I_n - C(1)) \varepsilon_t$ ). Symbolem  $L$  oznaczono operator opóźnienia. Wspólne czynniki krótkookresowe są funkcją  $z_t$ :  $f_t = \tilde{\delta}' z_t$ .

W modelach z macierzami parametrów o niepełnym rzędzie, pojawia się problem identyfikowalności, gdyż ich dekompozycja na iloczyn macierzy o pełnym rzędzie nie jest jednoznaczna. Należy zatem wprowadzić odpowiednią (zależną od wymiaru parametrów) ilość restrykcji identyfikujących. W tym opracowaniu, wykorzystamy restrykcje zaproponowane przez Strachana, Indera (2004) oraz Villaniego (2005) dla macierzy parametrów modeli VEC. Restrykcje te w estymacji parametrów modeli VEC-SF i VEC-WF (równania 5 i 6, odpowiednio) zostały wcześniej wykorzystane w pracach Wróblewskiej (2011, 2015). Opierając się na wymienionych opracowaniach przyjmujemy założenie, że macierze  $\tilde{\beta}$  i  $\gamma$  mają ortonormalne kolumny oraz nieujemne elementy w pierwszym wierszu, tj.  $\tilde{\beta}' \tilde{\beta} = I_r$ ,  $\tilde{\beta}[1, i] \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  oraz  $\gamma' \gamma = I_{n-s}$ ,  $\gamma[1, i] \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-s$ .

Do estymacji parametrów i ich funkcji wykorzystane zostanie wnioskowanie bayesowskie. Dla pełnej specyfikacji wyżej omówionych modeli VEC – równanie (3), VEC-SF – równanie (5) i VEC-WF – równanie (6), należy dodatkowo wprowadzić rozkłady *a priori* parametrów. Rozkłady te przyjmujemy opierając się na pracach Koopa i innych (2010) oraz Wróblewskiej (2011, 2015), które w przypadku modeli VEC i VEC-WF pozwolą wykorzystać próbnik Gibbsa do uzyskania próby pseudolosowej z rozkładów *a posteriori*. W modelach VEC-SF dodatkowo konieczne będzie zastosowanie algorytmu Metropolisa i Hastingsa w jednym z kroków próbnika Gibbsa. Wprowadzając rozkłady dla macierzy parametrów tworzących iloczyny  $\alpha \tilde{\beta}'$ ,  $\gamma \delta'$  oraz  $\gamma \tilde{\delta}'$  wykorzystamy następujące tożsamości:  $A \tilde{B}' \equiv \alpha \tilde{\beta}'$ ,  $G D' \equiv \gamma \delta'$ ,  $G \tilde{D}' \equiv \gamma \tilde{\delta}'$ , w których na macierze oznaczone literami alfabetu łacińskiego nie nakładamy żadnych restrykcji, a macierze oznaczone literami greckimi mają spełniać wyżej wymienione warunki, co<sub>1</sub> uzyskamy przyjmując  $\tilde{\beta} = \tilde{B}(\tilde{B}' \tilde{B})^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\alpha = A(\tilde{B}' \tilde{B})^{\frac{1}{2}}$ ,  $\gamma = G(G' G)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $D = D(G' G)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\tilde{D} = \tilde{D}(G' G)^{\frac{1}{2}}$  oraz dodatkowo odpowiednio korygując znaki (by zapoznać się ze szczegółami omawianej procedury zob. wyżej wymienione prace).

Dokładna struktura *a priori* rozważanych modeli została przedstawiona w tabeli 1, w której przyjęto następujące oznaczenia:

- $mN(\mu, \Omega_1, \Omega_2)$  – macierzowy rozkład normalny o wartości oczekiwanej  $vec(\mu)$  i macierzy kowariancji  $\Omega_1 \otimes \Omega_2$  dla wektoryzacji macierzy,
- $IW(S, q)$  – odwrotny rozkład Wisharta o  $q$  stopniach swobody i parametrze  $S$ , będącym dodatnio określoną symetryczną macierzą kwadratową stopnia  $n$ .

- $MACG(P)$  – macierzowy kątowy rozkład Gaussa (ang. *matrix angular central Gaussian distribution*) o parametrze  $P$ , będącym dodatnio określoną symetryczną macierzą kwadratową stopnia  $m$ . Jest to rozkład zdefiniowany dla macierzy o ortonormalnych kolumnach. Dla  $P = I_m$  otrzymujemy rozkład jednostajny (zob. np. Chikuse, 2002), a więc rozkłady *a priori*  $\tilde{B} \sim mN(0, I_r, I_m)$ ,  $G \sim mN(0, I_{3-s}, I_3)$  prowadzą do jednostajnych rozkładów dla  $\tilde{\beta}$  i  $\gamma$  odpowiednio.

Wszystkie rozkłady zostały ucięte warunkiem stabilności oraz restrykcjami nałożonymi na znaki elementów macierzy  $\tilde{\beta}$  i  $\gamma$ .

Tabela 1.

Struktura *a priori* rozważanych bayesowskich modeli typu VEC

| Macierze parametrów | Model                                          |                                             |                                       |
|---------------------|------------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------|
|                     | VEC                                            | VEC-WF                                      | VEC-SF                                |
| A                   | $A \Sigma \sim mN(0, I_r, \Sigma)$             |                                             | -                                     |
| $\tilde{B}$         | $\tilde{B} \sim mN(0, I_r, I_m)$               |                                             |                                       |
| $\tilde{\beta}$     | -                                              | -                                           | $\tilde{\beta} \sim MACG(I_m)$        |
| $\Gamma$            | $\Gamma \Sigma \sim mN(0, \Sigma, I_{n(k-1)})$ | -                                           | -                                     |
| $\tilde{c}$         | $\tilde{c} \Sigma \sim N(0, \Sigma)$           |                                             |                                       |
| $\Sigma$            | $\Sigma \sim iW(0, 2 I_n, n + 1)$              |                                             |                                       |
| G                   | -                                              | $G \Sigma \sim mN(0, I_{n-s}, \Sigma)$      |                                       |
| D                   | -                                              | -                                           | $D \sim mN(0, I_{n-s}, I_{n(k-1)+r})$ |
| $\tilde{D}$         | -                                              | $\tilde{D} \sim mN(0, I_{n-s}, I_{n(k-1)})$ | -                                     |

Źródło: opracowanie własne.

Otrzymane rozkłady *a posteriori* oraz  $p(y)$  lub  $p(y|\cdot)$  zebrano w tabeli 2.

Tabela 2.

Warunkowe rozkłady *a posteriori* otrzymane w rozważanych bayesowskich modelach typu VEC oraz  $p(y)$  lub  $p(y|\cdot)$

| Model                                                                                                                                                                                                                                                                  | Warunkowe rozkłady <i>a posteriori</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | $p(y)$ lub $p(y \cdot)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbf{VEC}, \mathbf{0} < r < n$ $Z_0 = Z_1 \tilde{B} A' + Z_2 \Gamma + i\tilde{c} + E =$ $= Z_B \Gamma_A + E,$ $Z_B = (Z_1 \tilde{B}, Z_2 \Gamma), \quad \Gamma_A = \begin{pmatrix} A' \\ \Gamma \\ \tilde{c} \end{pmatrix}$                                        | $\Sigma \cdot, y \sim iW(0, 2I_n + E'E + \Gamma_A' \Gamma_A, nk + 2 + T + r)$ $\Gamma_A \cdot, y \sim mN(\bar{\mu}_{\Gamma_A}, \Sigma, \bar{\Omega}_{\Gamma_A})$ $\bar{\Omega}_{\Gamma_A} = (Z_B' Z_B + I_{n(k-1)+1+r})^{-1}, \bar{\mu}_{\Gamma_A} = \bar{\Omega}_{\Gamma_A} Z_B' Z_0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | $p(y B) = c \bar{\Omega}_{\Gamma_A} ^{n/2}  0, 2I_n + Z_0' M_{Z_B} Z_0 +$ $+ \bar{\Gamma}_A' Z_B' Z_B \bar{\Omega}_{\Gamma_A} \bar{\Gamma}_A ^{-(n+1+T)/2}$ $M_{Z_B} = I_T - Z_B (Z_B' Z_B)^{-1} Z_B',$ $\bar{\Gamma}_A = (Z_B' Z_B)^{-1} Z_B' Z_0$                                                                                                                                          |
| $\mathbf{VEC-WF}, \mathbf{0} < r < n$ $Z_0 = Z_1 \tilde{B} A' + Z_2 \tilde{D} G' + i\tilde{c} + E =$ $= Z_{B\tilde{D}} \Gamma_{AG} + E,$ $Z_{B\tilde{D}} = (Z_1 \tilde{B}, Z_2 \tilde{D}, i), \quad \Gamma_{AG} = \begin{pmatrix} A' \\ G' \\ \tilde{c} \end{pmatrix}$ | $\Sigma \cdot, y \sim iW(0, 2I_n + E'E + \Gamma_{AG}' \Gamma_{AG}, 2(n+1) + T + r - s)$ $\Gamma_{AG} \cdot, y \sim mN(\bar{\mu}_{AG}, \Sigma, \bar{\Omega}_{AG})$ $\bar{\Omega}_{AG} = (Z_{B\tilde{D}}' Z_{B\tilde{D}} + I_{n-s+1+r})^{-1}, \bar{\mu}_{AG} = \bar{\Omega}_{AG} Z_{B\tilde{D}}' Z_0$ $vec(\tilde{B}) \cdot, y \sim N(\bar{\mu}_B, \bar{\Omega}_B)$ $\bar{\Omega}_B = [(A' \Sigma^{-1} A) \otimes (Z_1' Z_1) + I_{mr}]^{-1}$ $\bar{\mu}_B = \bar{\Omega}_B vec[Z_1'(Z_0 - Z_2 \tilde{D} G' - i\tilde{c}) \Sigma^{-1} A]$ $vec(\tilde{D}) \cdot, y \sim N(\bar{\mu}_{\tilde{D}}, \bar{\Omega}_{\tilde{D}})$ $\bar{\Omega}_{\tilde{D}} = [(G' \Sigma^{-1} G) \otimes (Z_2' Z_2) + I_{n(n-s)(k-1)}]^{-1}$ $\bar{\mu}_{\tilde{D}} = \bar{\Omega}_{\tilde{D}} vec[Z_2'(Z_0 - Z_1 \tilde{B} A' - i\tilde{c}) \Sigma^{-1} G]$ | $p(y \tilde{B}, \tilde{D}) = c \bar{\Omega}_{AG} ^{n/2}  0, 2I_n + Z_0' M_{Z_{B\tilde{D}}} Z_0 +$ $+ \bar{\Gamma}_{AG}' Z_{B\tilde{D}}' Z_{B\tilde{D}} \bar{\Omega}_{AG} \bar{\Gamma}_{AG} ^{-(n+1+T)/2}$ $M_{Z_{B\tilde{D}}} = I_T - Z_{B\tilde{D}} (Z_{B\tilde{D}}' Z_{B\tilde{D}})^{-1} Z_{B\tilde{D}}',$ $\bar{\Gamma}_{AG} = (Z_{B\tilde{D}}' Z_{B\tilde{D}})^{-1} Z_{B\tilde{D}}' Z_0$ |

Tabela 2. (cd.)

| Model                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Warunkowe rozkłady a posteriori                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | $p(y)$ lub $p(y \cdot)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>VEC-SF, <math>0 &lt; r &lt; n</math></b></p> <p><math>Z_0 = (Z_1\tilde{\beta}, Z_2)DG' + i\tilde{c} + E =</math><br/> <math>= Z_{\beta D}\Gamma_G + E,</math></p> <p><math>Z_{\beta D} = [(Z_1\tilde{\beta}, Z_2)D], \Gamma_G = \begin{pmatrix} G' \\ \tilde{c} \end{pmatrix}</math></p> <p><math>D_{(r+n(k-1)) \times q} = \begin{pmatrix} D_{(1)} \\ D_{(2)} \end{pmatrix}</math></p> <p><math>D_{(1)}</math> – macierz wymiaru <math>r \times q</math><br/> <math>D_{(2)}</math> – macierz wymiaru <math>n(k-1) \times q</math></p> | <p><math>\Sigma  \cdot, y \sim iW(0, 2I_n + E'E + \Gamma'_G\Gamma_G, 2(n+1) + T - s)</math></p> <p><math>\Gamma_G  \cdot, y \sim mN(\bar{\mu}_{\Gamma_G}, \Sigma, \bar{\Omega}_{\Gamma_G})</math></p> <p><math>\bar{\Omega}_{\Gamma_G} = \left( Z'_{\beta D} Z_{\beta D} + I_{n-s+1} \right)^{-1}, \bar{\mu}_{\Gamma_G} = \bar{\Omega}_{\Gamma_G} Z'_{\beta D} Z_0</math></p> <p><math>vec(D)  \cdot, y \sim N(\bar{\mu}_D, \bar{\Omega}_D)</math></p> <p><math>\bar{\Omega}_D = \left[ (G'\Sigma^{-1}G) \otimes (Z'_{\beta} Z_{\beta}) + I_{(n-s)(r+n(k-1))} \right]^{-1}</math></p> <p><math>\bar{\mu}_D = \bar{\Omega}_D vec \left[ Z'_{\beta} (Z_0 - i\tilde{c})\Sigma^{-1}G \right], Z_{\beta} = (Z_1\tilde{\beta}, Z_2)</math></p> <p><math>\tilde{\beta}  \cdot, y \sim mBMF \left( Z'_1 Z_1, -\frac{1}{2}D_{(1)}G'\Sigma^{-1}GD'_{(1)}, F \right)</math></p> <p><math>F = Z'_1(Z_0 - Z_2D_{(2)}G' - i\tilde{c})GD'_{(1)}</math></p> | <p><math>p(y \beta, D) = c \bar{\Omega}_{\Gamma_G} ^{n/2} \left  0, 2I_n + Z'_0 M_Z Z_{\beta D} Z_0 + \right.</math><br/> <math>\left. + \hat{\Gamma}'_G Z'_{\beta D} Z_{\beta D} \bar{\Omega}_{\Gamma_G} \hat{\Gamma}_G \right ^{-(n+1+T)/2}</math></p> <p><math>M_Z Z_{\beta D} = I_T - Z_{\beta D} \left( Z'_{\beta D} Z_{\beta D} \right)^{-1} Z'_{\beta D},</math></p> <p><math>\hat{\Gamma}_G = \left( Z'_{\beta D} Z_{\beta D} \right)^{-1} Z'_{\beta D} Z_0</math></p> |
| <p><b>VEC, <math>r = n</math></b></p> <p><math>Z_0 = Z_1\Pi' + Z_2\Gamma + i\tilde{c} + E = Z\Gamma_{\Pi} + E,</math></p> <p><math>Z = (Z_1, Z_2, i), \Gamma_{\Pi} = \begin{pmatrix} \Pi' \\ \Gamma \\ \tilde{c} \end{pmatrix}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <p><math>\Sigma  \cdot, y \sim iW(0, 2I_n + E'E + \Gamma'_{\Pi}\Gamma_{\Pi}, n(k+1) + 2 + T)</math></p> <p><math>\Gamma_{\Pi}  \cdot, y \sim mN(\bar{\mu}_{\Gamma_{\Pi}}, \Sigma, \bar{\Omega}_{\Gamma_{\Pi}})</math></p> <p><math>\bar{\Omega}_{\Gamma_{\Pi}} = (Z'Z + I_{n(k+1)})^{-1}, \bar{\mu}_{\Gamma_{\Pi}} = \bar{\Omega}_{\Gamma_{\Pi}} Z'Z_0</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | <p><math>p(y) = c \bar{\Omega}_{\Gamma_{\Pi}} ^{n/2} \left  0, 2I_n + Z'_0 M_Z Z_0 + \right.</math><br/> <math>\left. + \hat{\Gamma}'_{\Pi} Z'Z\bar{\Omega}_{\Gamma_{\Pi}}\hat{\Gamma}_{\Pi} \right ^{-(n+1+T)/2}</math></p> <p><math>M_Z = I_T - Z(Z'Z)^{-1}Z', \hat{\Gamma}_{\Pi} = (Z'Z)^{-1}Z'Z_0</math></p>                                                                                                                                                               |
| <p><b>VEC-WF, <math>r = n</math></b></p> <p><math>Z_0 = Z_1\Pi' + Z_2\tilde{D}G' + i\tilde{c} + E = \tilde{Z}\Gamma_G + E,</math></p> <p><math>Z_{\tilde{D}} = (Z_1, Z_2\tilde{D}, i), \Gamma_{G\Pi} = \begin{pmatrix} \Pi' \\ G' \\ \tilde{c} \end{pmatrix}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                      | <p><math>\Sigma  \cdot, y \sim iW(0, 2I_n + E'E + \Gamma'_{G\Pi}\Gamma_{G\Pi}, 3n + T - s + 2)</math></p> <p><math>\Gamma_{G\Pi}  \cdot, y \sim mN(\bar{\mu}_{G\Pi}, \Sigma, \bar{\Omega}_{G\Pi})</math></p> <p><math>\bar{\Omega}_{G\Pi} = \left( Z'_{\tilde{D}} Z_{\tilde{D}} + I_{2n-s+1} \right)^{-1}, \bar{\mu}_{G\Pi} = \bar{\Omega}_{G\Pi} Z'_{\tilde{D}} Z_0</math></p> <p><math>vec(\tilde{D})  \cdot, y \sim N(\bar{\mu}_{\tilde{D}}, \bar{\Omega}_{\tilde{D}})</math></p> <p><math>\bar{\Omega}_{\tilde{D}} = \left[ (G'\Sigma^{-1}G) \otimes (Z'_2 Z_2) + I_{n(n-s)(k-1)} \right]^{-1}</math></p> <p><math>\bar{\mu}_{\tilde{D}} = \bar{\Omega}_{\tilde{D}} vec[Z'_2(Z_0 - Z_1\Pi' - i\tilde{c})\Sigma^{-1}G]</math></p>                                                                                                                                                                                                        | <p><math>p(y \tilde{D}) = c \bar{\Omega}_{G\Pi} ^{n/2} \left  0, 2I_n + Z'_0 M_Z Z_0 + \right.</math><br/> <math>\left. + \hat{\Gamma}'_{G\Pi} Z'_{\tilde{D}} Z_{\tilde{D}} \bar{\Omega}_{G\Pi} \hat{\Gamma}_{G\Pi} \right ^{-(n+1+T)/2}</math></p> <p><math>M_Z Z_{\tilde{D}} = I_T - Z_{\tilde{D}} (Z'_{\tilde{D}} Z_{\tilde{D}})^{-1} Z'_{\tilde{D}},</math></p> <p><math>\hat{\Gamma}_{G\Pi} = (Z'_{\tilde{D}} Z_{\tilde{D}})^{-1} Z'_{\tilde{D}} Z_0</math></p>           |

Opisy do tabeli 2:

Oznaczenia wspólne dla wszystkich modeli:  $Z_0 = (\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_T)'$ ,  $Z_1 = (\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{T-1})'$ ,  $Z_2 = (z_1, z_2, \dots, z_T)'$ ,  $\iota_{T \times 1} = (1, 1, \dots, 1)'$ ,  $\text{vec}(M)$  – wektoryzacja macierzy  $M$ ,  $c = \pi^{-\frac{nT}{2}} |0, 2I_n|^{\frac{n+1}{2}} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma[(n+2+T-i)/2]}{\Gamma[(n+2-i)/2]}$ ,  $\Gamma[a]$  – wartość funkcji gamma Eulera w punkcie  $a$ .

Dla  $r = n$  modele VEC-WF oraz VEC-SF są obserwacyjnie równoważne.

$\tilde{\beta} | \cdot, y \sim mBMF\left(Z_1' Z_1, -\frac{1}{2} D_{(1)} G' \Sigma^{-1} G D_{(1)}', F\right)$  – warunkowym rozkładem *a posteriori* dla  $\tilde{\beta}$  jest macierzowy rozkład

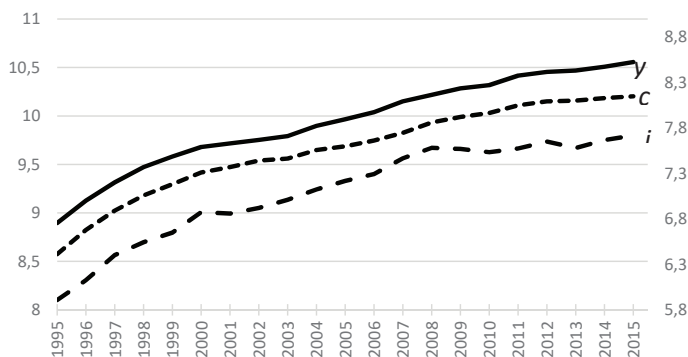
Binghama, von Misesa, Fishera, zwany również macierzowym rozkładem Langevina, Binghama, zdefiniowany dla macierzy o ortonormalnych kolumnach (zob. np. Chikuse, 2002).

Źródło: opracowanie własne.

Po przedstawieniu celu badania i wykorzystanych w nim narzędzi przejdziemy do omówienia analizowanych danych i uzyskanych rezultatów.

#### 4. DANE I REZULTATY EMPIRYCZNE

Badanie zostało przeprowadzane z wykorzystaniem 21 rocznych obserwacji z lat 1995–2015, dotyczących realnych wielkości wydatków konsumpcyjnych ( $C$  w zł na osobę), prywatnych inwestycji krajowych ( $I$  w zł na osobę) oraz produktu krajowego brutto pomniejszonego o wielkość wydatków rządowych ( $Y$  w zł na osobę). Małymi literami ( $c$ ,  $i$ ,  $y$ ) oznaczono logarytm naturalny oryginalnych wielkości. Analizowane szeregi prezentuje rysunek 1.



Rysunek 1. Analizowane szeregi czasowe. Logarytmy PKB ( $y$ ) i wydatków konsumpcyjnych ( $c$ ) – lewa oś, logarytm nakładów inwestycyjnych ( $i$ ) – prawa oś

Źródło: opracowanie własne, na podstawie danych z bazy Eurostat.

Ogólna tendencja rozwojowa badanych wielkości jest podobna, przy czym inwestycje charakteryzują się większymi wahaniami. Wydaje się jednak, że spadki i wzrosty przypadają w tym samym czasie, warto więc wykorzystując narzędzia statystyczne, zbadać czy analizowany 3-wymiarowy szereg czasowy może być uznany za realizację procesu sterowanego wspólnymi trendami stochastycznymi i wspólnymi czynnikami cyklicznymi.

Jak zaznaczono w rozdziale 2, narzędziem wykorzystanym w badaniu jest grupa bayesowskich modeli VAR. Z uwagi na bardzo małą liczbę obserwacji w każdym rozważanym modelu występowały jedynie 2 opóźnienia ( $k = 2$ ). Modele mogły się różnić rodzajem składowych deterministycznych ( $d = 1$  – nieograniczony trend i stała,  $d = 2$  – trend ograniczony do przestrzeni kointegrującej, nieograniczona stała,  $d = 3$  – nieograniczona stała,  $d = 4$  – stała ograniczona do przestrzeni kointegrującej,  $d = 5$  – brak składowych deterministycznych), typem wspólnych czynników cyklicznych ( $typ = 1$  – silne wspólne czynniki cykliczne,  $typ = 2$  – słabe wspólne czynniki cykliczne,  $typ = 3$  – model bez wspólnych czynników cyklicznych), liczbą relacji kointegrujących ( $r \in \{1, 2, 3\}$ ,  $r = 3$  – stabilny model VAR dla poziomów, w którym założono, że  $\Pi' = A$ , a  $B = I_n$ ) oraz liczbą wspólnych czynników cyklicznych ( $n - s \in \{1, 2, 3\}$ ,  $(n - s = 3) \equiv (typ = 3)$ ). Po wykluczeniu modeli równoważnych oraz kombinacji niemożliwych zostało 59 parami wykluczających się modeli, dla których przyjęto równe prawdopodobieństwa *a priori* ( $p(M_{(2,d,typ,n-s,r)}) = 1/59 \approx 0,017$ ). Wyznaczając brzegową gęstość wektora obserwacji,  $p(y|M_{(2,d,typ,n-s,r)})$ , wykorzystano całkowanie analityczne (zob. tabelę 2) uzupełnione całkowaniem numerycznym wykorzystującym estymator średniej arytmetycznej.

W tabeli 3 zebrano modele o prawdopodobieństwie *a posteriori* nie niższym niż  $1/59$ . Łącznie zebrały one około 0,934 prawdopodobieństwa *a posteriori*. Dodatkowo w tabeli 4 zebrano brzegowe prawdopodobieństwa *a posteriori* liczby relacji kointegrujących oraz liczby wspólnych czynników cyklicznych.

Tabela 3.

Modele o najwyższym prawdopodobieństwie *a posteriori* ( $p(M_{(2,d,typ,n-s,r)}|Y) > 0,02$ )

| $k$ | $d$ | $typ$ | $n - s$ | $r$ | $p(M_{(2,d,typ,n-s,r)} Y)$ |
|-----|-----|-------|---------|-----|----------------------------|
| 2   | 4   | 1     | 1       | 1   | 0,188                      |
| 2   | 4   | 1     | 2       | 1   | 0,110                      |
| 2   | 3   | 1     | 1       | 1   | 0,110                      |
| 2   | 4   | 2     | 2       | 1   | 0,084                      |
| 2   | 2   | 1     | 1       | 1   | 0,083                      |
| 2   | 4   | 2     | 1       | 1   | 0,075                      |
| 2   | 4   | 3     | 3       | 1   | 0,074                      |
| 2   | 3   | 1     | 2       | 1   | 0,046                      |
| 2   | 3   | 2     | 1       | 1   | 0,033                      |
| 2   | 3   | 3     | 3       | 1   | 0,033                      |
| 2   | 3   | 2     | 2       | 1   | 0,032                      |
| 2   | 4   | 1     | 2       | 2   | 0,025                      |
| 2   | 5   | 1     | 1       | 1   | 0,022                      |
| 2   | 2   | 1     | 2       | 1   | 0,021                      |

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem całkowania analitycznego połączonego z całkowaniem numerycznym wykorzystującym estymator średniej arytmetycznej.

Tabela 4.

Brzegowe prawdopodobieństwo *a posteriori* liczby relacji kointegrujących  $p(r|Y)$   
i liczby wspólnych czynników cyklicznych  $p(n - s|Y)$

| $r$      | 1     | 2     | 3     | $n - s$      | 1     | 2     | 3     |
|----------|-------|-------|-------|--------------|-------|-------|-------|
| $p(r Y)$ | 0,931 | 0,067 | 0,002 | $p(n - s Y)$ | 0,529 | 0,347 | 0,124 |

Źródło: opracowanie własne.

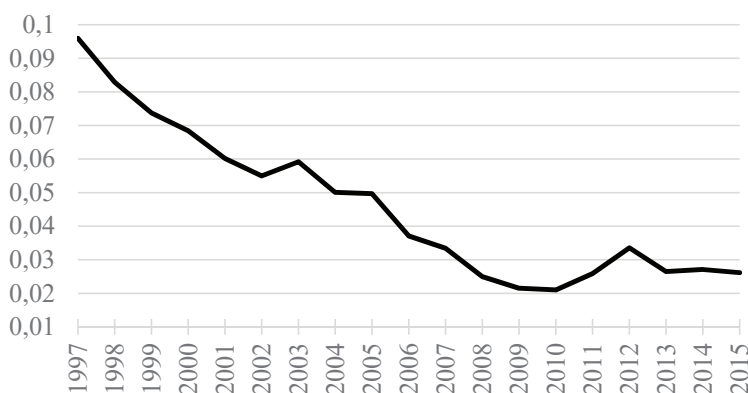
Model bez wspólnych czynników cyklicznych jest dopiero na siódmym miejscu tabeli 3 z prawdopodobieństwem *a posteriori* nieco wyższym niż 0,07. Ogółem modele bez restrykcji krótkookresowych zebrały 0,124 prawdopodobieństwa *a posteriori* (zob. tabelę 4), tak więc dane mocno wspierają hipotezę mówiącą, że przebieg analizowanych szeregów jest sterowany wspólnymi czynnikami cyklicznymi.

Informacja dotycząca rozkładu prawdopodobieństwa *a posteriori* liczby liniowo niezależnych wektorów kointegrujących pozwala zbadać kowariancyjną stacjonarność 3-wymiarowego procesu. Modele z macierzą mnożników długookresowych pełnego rzędu ( $r = 3$ ) łącznie zebrały około 0,003 prawdopodobieństwa *a posteriori*, a więc analizowany szereg można uznać za realizację procesu niestacjonarnego. Model z dwiema relacjami kointegrującymi został sklasyfikowany dopiero na dwunastym miejscu z prawdopodobieństwem *a posteriori* wynoszącym 0,025. Uzyskane rezultaty wskazują zatem na występowanie dwóch wspólnych trendów stochastycznych sterujących zachowaniem analizowanego 3-wymiarowego procesu. Można podać kilka przyczyn takiego, niezgodnego z przedstawioną teorią, rezultatu. Pierwszy związany jest z długością szeregu – analizowany szereg jest krótki, co może istotnie obniżać prawdopodobieństwo „wykrycia” wszystkich relacji długookresowych. Po drugie, model może być zbyt mały (są tylko 3 zmienne) – pominięcie istotnej zmiennej może przejawiać się występowaniem dodatkowego trendu stochastycznego. I po trzecie, King i inni (1991) sygnalizują, że w analizie wielowymiarowego szeregu zawierającego produkcję, konsumpcję i inwestycje niekiedy można spodziewać się dodatkowego uporczywego (a nawet trwałego) wstrząsu, który wpływa na podział dochodów pomiędzy konsumpcję i inwestycje.

W dalszej części badania wykorzystano model o najwyższym prawdopodobieństwie *a posteriori*, tj. model z jedną relacją kointegrującą, jednym wspólnym czynnikiem cyklicznym silnego typu i stałą ograniczoną do przestrzeni kointegrującej.

Wspólny czynnik krótkookresowy jest funkcją obserwacji, a jego ocena punktowa została przedstawiona na rysunku 2.

W modelu VEC dla trzech zmiennych z jedną relacją kointegrującą możemy wyróżnić dwa wstrząsy długookresowe oraz jeden wstrząs przejściowy. Rozważane wstrząsy są nieskorelowane. W tabeli 5 zaprezentowano udział wstrząsu krótkookresowego w wyjaśnianiu wariacji błędu prognoz analizowanych zmiennych.



Rysunek 2. Wspólny czynnik krótkookresowy  
Wartość oczekiwana *a posteriori*.

Źródło: opracowanie własne na podstawie 1 mln losowań po odrzuceniu 1 mln cykli wstępnych.

Tabela 5.

Dekompozycja wariancji błędu prognoz model  $M_{(2,4,1,1,1)}$

| Horyzont | Udział wstrząsu krótkookresowego w wyjaśnianiu wariancji błędu prognoz (%) |         |          |         |          |         |
|----------|----------------------------------------------------------------------------|---------|----------|---------|----------|---------|
|          | <i>c</i>                                                                   |         | <i>i</i> |         | <i>y</i> |         |
| 1        | 36,83                                                                      | (22,00) | 46,01    | (22,19) | 42,41    | (23,09) |
| 2        | 38,78                                                                      | (22,89) | 50,19    | (22,74) | 44,15    | (23,93) |
| 3        | 38,90                                                                      | (23,40) | 52,31    | (23,15) | 44,16    | (24,68) |
| 4        | 38,20                                                                      | (23,62) | 53,38    | (23,33) | 43,42    | (25,25) |
| 5        | 37,12                                                                      | (23,67) | 53,79    | (23,38) | 42,37    | (25,72) |
| 10       | 30,80                                                                      | (23,05) | 50,75    | (23,32) | 36,64    | (27,07) |
| 20       | 13,64                                                                      | (15,31) | 25,81    | (20,63) | 15,62    | (16,85) |

Wartość oczekiwana *a posteriori*. W nawiasach podano odchylenia standardowe *a posteriori*.

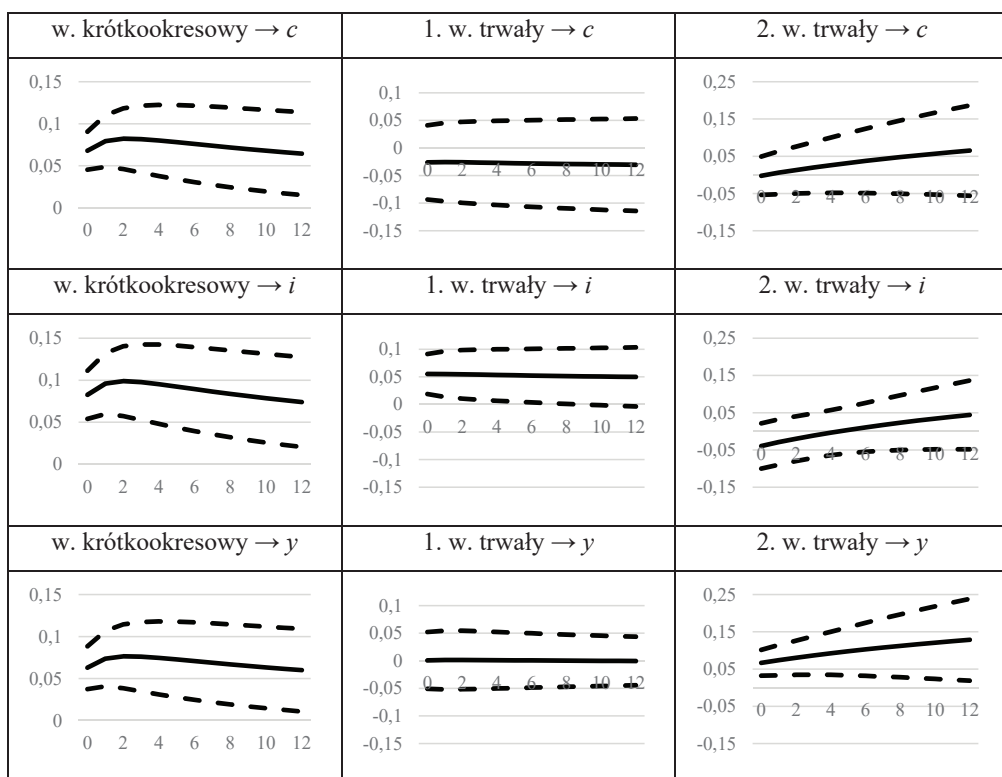
Źródło: opracowanie własne na podstawie 1 mln losowań po odrzuceniu 1 mln cykli wstępnych.

Mimo dużej niepewności estymacji, otrzymane rezultaty sugerują, że innowacje krótkookresowe mają największy wpływ na zmienność inwestycji, a punktowa ocena wskazuje, że wynosi on około 52 procent w prognozie o horyzoncie 3 lat. Inwestycje są dużo bardziej wrażliwe na wahania cykliczne i rzeczywiście udział wstrząsu przejściowego w wyjaśnianiu wariancji prognoz konsumpcji i produkcji jest niższy i wynosi, dla tego samego horyzontu prognozy, około 39 procent dla konsumpcji oraz 44 dla produkcji. Wraz z wydłużaniem horyzontu prognozy obserwujemy powolny wzrost znaczenia wstrząsów długookresowych.<sup>6</sup>

<sup>6</sup> Dla porównania oszacowano również najbardziej prawdopodobny model bez restrykcji wspólnych czynników cyklicznych, tj.  $M_{(2,4,3,3,1)}$ . W modelu tym wpływ wstrząsów przejściowych spadał dużo szyb-



Warto również prześledzić wpływ wyżej wspomnianych wstrząsów na analizowane wielkości. W tym celu oszacowano funkcje reakcji na zaburzenia losowe. Jak wspomniano w modelu mamy dwa wstrząsy długookresowe i jeden krótkookresowy, którego wpływ zanika wraz z upływem czasu, w przeciwieństwie do wpływu wstrząsów trwałych. Ta cecha pozwala nam odróżnić te dwie grupy, by jednak zidentyfikować wstrząsy długookresowe potrzebne są dodatkowe restrykcje (zob. np. Lütkepohl, 2007, str. 368–372). W tym opracowaniu wykorzystano restrykcję zerową – założono, że wpływ pierwszego wstrząsu trwałego na produkcję zanika po nieskończenie wielu okresach. Na rysunku 3 zaprezentowano wartość oczekiwaną *a posteriori* (linia ciągła) wraz z obszarem oddalonym od punktowej oceny o  $\pm$  jedno odchylenie standardowe *a posteriori* (linia przerywana). W kolumnach, a więc dla poszczególnych wstrząsów, zachowano tę samą skalę.



Rysunek 3. Funkcje reakcji na zaburzenia losowe

Wartość oczekiwana *a posteriori* – linia ciągła,  $\pm$  odchylenie standardowe *a posteriori* – linia przerywana.

Źródło: opracowanie własne na podstawie 1 mln losowań po odrzuceniu 1 mln cykli wstępnych.

ciej, np. udział zaburzeń krótkookresowych w wyjaśnianiu wariancji błędu prognozy o horyzoncie 10 dla inwestycji wynosił około 41%, a dla konsumpcji i produkcji po około 20%, natomiast dla prognozy o horyzoncie 20 – 18% i 7%, odpowiednio.

Wstrząs krótkookresowy, w okresie 12 lat, wywiera dodatni efekt na wszystkie analizowane zmienne, a zanikanie jego oddziaływania jest bardzo wolne. Analizując oceny funkcji reakcji na dwa wyróżnione wstrząsy długookresowe, zauważmy, że drugi wstrząs w okresie 12 lat, wywiera dodatni wpływ na modelowane wielkości. Można go więc uznać za wstrząs technologiczny (zob. punkt 2 artykułu). Pierwszy wstrząs prowadzi do nieznacznego spadku konsumpcji<sup>7</sup> i wyraźnego wzrostu inwestycji. Wydaje się więc, że jest to wstrząs zmiany skłonności do konsumpcji i inwestycji, o możliwości istnienia którego, w badaniu dotyczącym gospodarki Stanów Zjednoczonych, wspominają King i inni, 1991.

## 5. PODSUMOWANIE

W niniejszym opracowaniu z wykorzystaniem teorii modelu realnego cyklu koniunkturalnego przeanalizowano naturę i zależności trzech makroekonomicznych szeregów czasowych pochodzących z gospodarki polskiej – wielkości wydatków konsumpcyjnych i prywatnych inwestycji krajowych oraz produktu krajowego brutto pomniejszonego o wydatki rządowe. Dokonując bayesowskiego porównania modeli VEC z restrykcjami nałożonymi zarówno na parametry opisujące dynamikę długo-, jak i krótkookresową wywnioskowano, że zachowanie omawianych wielkości jest sterowane za pomocą jednego wspólnego czynnika cyklicznego (co jest zgodne z przedstawioną teorią ekonomiczną) oraz dwóch wspólnych trendów stochastycznych (analizowany model RBC przewiduje wystąpienie tylko jednego trendu stochastycznego). W omawianym modelu VEC możemy zatem wyróżnić dwa wstrząsy o charakterze trwałym – by je zidentyfikować na jeden z nich nałożono restrykcję zerową, a następnie oszacowano funkcje reakcji zmiennych na tak wyznaczone wstrząsy. Wykorzystując dekompozycję wariancji błędu prognoz pokazano, że w krótkim i średnim horyzoncie czasowym wstrząsy przejściowe mają duże znaczenie w wyjaśnianiu wariancji wszystkich zmiennych, przy czym najwyższe (większe niż 50%) w przypadku inwestycji. Wątpliwości związane z liczbą wspólnych trendów stochastycznych (zob. np. dyskusję w pracy Kinga i innych, 1991) skłaniają do podjęcia dalszych badań w ramach rozszerzonego (np. o zmienne nominalne, takie jak podaż pieniądza, stopa procentowa, poziom cen) modelu RBC.

## LITERATURA

- Beveridge S., Nelson C. R., (1981), A New Approach to the Decomposition of Economic Time Series Into Permanent and Transitory Components with Particular Attention to Measurement of the Business Cycle, *Journal of Monetary Economics*, 7 (2), 151–174.
- Campbell J. Y., Mankiw N. G., (1989), Consumption, Income, and Interest Rates: Reinterpreting the Time Series Evidence, *NBER Macroeconomics Annual 1989*, 4.

<sup>7</sup> Warto zauważyć, że zero znajduje się w obszarze wyznaczonym przez odchylenie standardowe *a posteriori*.

- Centoni M., Cubadda G., (2003), Measuring the Business Cycle Effects of Permanent and Transitory Shocks in Cointegrated Time Series, *Economic Letters*, 80 (1), 45–51.
- Chikuse Y., (2002), *Statistics on Special Manifolds*, Springer, New York.
- Cubadda G., (1999), Common Serial Correlation and Common Business Cycles: A Cautious Note, *Empirical Economics*, 24 (3), 529–535.
- Cubadda G., (2007), A Unifying Framework for Analysing Common Cyclical Features in Cointegrated Time Series, *Computational Statistics & Data Analysis*, 52 (2), 896–906.
- Engle R. F., Granger C. W. J., (1987), Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing, *Econometrica*, 55 (2), 251–276.
- Hecq A., Palm F. C., Urbain J-P., (2000), Permanent-Transitory Decomposition in VAR Models with Cointegration and Common Cycles, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 62 (4), 511–532.
- Hecq A., Palm F. C., Urbain J-P., (2006), Common Cyclical Features Analysis in VAR Models with Cointegration, *Journal of Econometrics*, 132 (1), 117–141.
- Issler J. V., Vahid F., (2001), Common Cycles and the Importance of Transitory Shocks to Macroeconomic Aggregates, *Journal of Monetary Economics*, 74 (3), 449–475.
- Johansen S., (1995), *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*, Oxford University Press, New York.
- King R. G., Plosser C. I., Stock J. H., Watson M. W., (1991), Stochastic Trends and Economic Fluctuations, *The American Economic Review*, 81 (4), 819–840.
- Koop G., León-González R., Strachan R., (2010), Efficient Posterior Simulation for Cointegrated Models with Priors on the Cointegration Space, *Econometric Reviews*, 29 (2), 224–242.
- Lütkepohl H., (2007), *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer-Verlag, Berlin.
- Osiewalski J., Marzec J., (1996–97), Integracja, kointegracja i model korekty błędu dla depozytów gospodarstw domowych, *Folia Oeconomica Cracoviensia*, 39–40, 51–64.
- Sims C. A., (1980), Macroeconomics and Reality, *Econometrica*, 48 (1), 1–48.
- Strachan R., Inder B., (2004), Bayesian Analysis of the Error Correction Model, *Journal of Econometrics*, 123 (2), 307–325.
- Vahid F., Engle R. F., (1993), Common Trends and Common Cycles, *Journal of Applied Econometrics*, 8 (4), 341–360.
- Villani M., (2005), Bayesian Reference Analysis of Cointegration, *Econometric Theory*, 21 (2), 326–357.
- Welfe A., (red.), (2013), *Analiza kointegracyjna w makromodelowaniu*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Wróblewska J., (2011), Bayesian Analysis of Weak Form Reduced Rank Structure in VEC Models, *Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics (CEJEME)*, 3 (3), 169–186.
- Wróblewska J., (2015), Common Trends and Common Cycles – Bayesian Approach, *Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics (CEJEME)*, 7 (2), 91–110.

## ANALIZA MODELU REALNEGO CYKLU KONIUNKTURALNEGO Z WYKORZYSTANIEM BAYESOWSKICH MODELI TYPU VEC

### Streszczenie

Teoria przewiduje występowanie zależności długo- i krótkookresowych dla wielu różnych wielkości ekonomicznych. Wśród przykładów można wymienić różne wersje modelu realnego cyklu koniunkturalnego (modelu RBC). Celem niniejszego opracowania jest empiryczna analiza podstawowego modelu RBC zbudowanego dla produkcji, konsumpcji i inwestycji w gospodarce polskiej w latach 1995–2015. Do zbadania tego zagadnienia wykorzystano grupę bayesowskich modeli typu VEC, w których prócz restrymacji nałożonych na parametry opisujące związki długookresowe, dodatkowo nałożono restrymacje

na parametry opisujące zależności krótkookresowe. Dokonując bayesowskiego porównania wymienionych modeli wywnioskowano, że zachowanie omawianych wielkości jest sterowane za pomocą jednego wspólnego czynnika cyklicznego oraz dwóch wspólnych trendów stochastycznych. Dodatkowo, zbadano udział wstrząsów o charakterze trwałym i przejściowym w wyjaśnianiu wariancji błędu prognoz oraz ich wpływ na analizowane zmienne.

**Słowa kluczowe:** model realnego cyklu koniunkturalnego, kointegracja, wspólne czynniki cykliczne, wnioskowanie bayesowskie

## THE ANALYSIS OF REAL BUSINESS CYCLE MODEL WITH THE USE OF BAYESIAN VEC TYPE MODELS

### Abstract

In many economic theories and models, both long- and short-run relationships between variables are in focus. It is also the case in the real business cycle model (RBC model). The main aim of the paper is empirical analysis of the basic, three-variable RBC model for the Polish data of product, private consumption and investment over the years 1995–2015. A group of Bayesian VEC models with additional short-term restrictions is employed in this research. The Bayesian model comparison leads to the conclusion that the analyzed process is driven by two stochastic trends and one common cycle. Additionally, in order to evaluate the importance of long- and short-run shocks, the forecast error variance decomposition and the impulse response functions are calculated.

**Keywords:** real business cycle model, cointegration, common cyclical features, Bayesian analysis

EWA ROSZKOWSKA<sup>1</sup>O MOŻLIWOŚCIACH WYKORZYSTANIA  
SKIEROWANYCH LICZB ROZMYTYCH  
DO PODEJMOWANIA DECYZJI WIELOKRYTERIALNYCH<sup>2</sup>

## 1. WSTĘP

Model skierowanych liczb rozmytych (*OFN*, ang. *Ordered Fuzzy Numbers*) został zaproponowany, a następnie rozwijany przez Kosińskiego, Prokopowicza oraz Ślęzaka w wielu pracach (Kosiński i inni, 2002, 2003; Kosiński, Prokopowicz, 2004; Kosiński, 2006). Inspiracją jego powstania „było przewyższenie głównych niedoskonałości klasycznego, opartego na zasadzie rozszerzenia Zadeha, rachunku na liczbach rozmytych i takie zdefiniowanie modelu liczb rozmytych, by liczby rzeczywiste można było traktować jako szczególny przypadek liczb rozmytych. Dodatkowo działania algebraiczne w takim modelu powinny być zgodne z działaniami na zwykłych liczbach rzeczywistych i posiadać własność rozdzielnosci mnożenia względem dodawania, a jednocześnie dawać poprawne wyniki dla liczb rozmytych” (Kosiński, Prokopowicz, 2004).

Celem niniejszego opracowania jest prezentacja przykładów interpretacji skierowania liczb rozmytych opartych na literaturze przedmiotu, a także możliwości wykorzystania *OFN* w rozmytych metodach wielokryterialnych. Badania nad wykorzystaniem skierowanych liczb rozmytych zostały zapoczątkowane w pracach Kacprzak, Roszkowska (2016, 2014), gdzie przedstawiono propozycje metod SAW (ang. *Simple Additive Weighting*) oraz TOPSIS (ang. *Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution*) opartych na skierowanych trapezowych liczbach rozmytych. Orientację liczby rozmytej wykorzystano do reprezentacji typu kryterium oraz ocen lingwistycznych wariantów decyzyjnych. W niniejszym opracowaniu pokazano użyteczność obu metod do budowy systemu oceny ofert negocjacyjnych w sytuacji, gdy ocena wariantów porozumienia przebiega w warunkach niepewności, wymaga uwzględnienia danych z różnych źródeł i o różnym charakterze. Skala lingwistyczna oparta na skierowanych liczbach rozmytych okazuje się pomocna w procesie ewaluacji oraz tworzeniu rankingu ofert za pomocą metod FSAW i FTOPSIS. Operowanie

---

<sup>1</sup> Uniwersytet w Białymstoku, Wydział Ekonomii i Zarządzania, Zakład Ekonometrii i Statystyki, ul. Warszawska 63, 15-062 Białystok, Polska, e-mail: e.roszkowska@uwb.edu.pl.

<sup>2</sup> Praca zrealizowana w ramach projektu naukowego nr 2016/21/B/HS4/01583 finansowanego ze środków Narodowego Centrum Nauki.

zmiennymi lingwistycznymi może być pewną alternatywną oceny punktowej ofert negocjacyjnych (np. SAW/SMART) (Górecka i inni, 2016).

Artykuł ma charakter metodologiczny i może stanowić inspirację do dalszych badań nad zastosowaniem skierowanych liczb rozmytych w metodach wielokryterialnych.

W dwóch kolejnych częściach pracy zaprezentowano podstawowe pojęcia i własności skierowanych liczb rozmytych, które będą wykorzystywane w dalszej części pracy. W części czwartej przedstawiono przykłady interpretacji skierowanych liczb rozmytych. W części piątej propozycje metod wielokryterialnych wykorzystujących skierowane liczby rozmyte. Opracowanie kończy przykład obliczeniowy oraz podsumowanie.

## 2. SKIEROWANE LICZBY ROZMYTE I ICH WŁASNOŚCI

Pojęcie zbioru rozmytego zostało wprowadzone przez Lotfi Zadeha w 1965 roku (Zadeh, 1965) do określania znaczeń pojęć nieostrych (przybliżonych) lub pojęć werbalnych.

**Definicja 1** (Zadeh, 1965). Niech  $\mathbb{X}$  będzie przestrzenią obiektów (uniwersum). Zbiorem rozmytym  $A$  w przestrzeni  $\mathbb{X}$  nazywamy zbiór uporządkowanych par

$$A = \{(x, \mu_A(x)); x \in \mathbb{X}\}, \quad (1)$$

gdzie  $\mu_A$  jest funkcją przynależności postaci  $\mu_A: \mathbb{X} \rightarrow [0; 1]$ .

Nośnikiem zbioru rozmytego  $A$  nazywamy następujący zbiór:

$$\text{supp}A = \{x \in X: \mu_A(x) > 0\}. \quad (2)$$

Rodzinę wszystkich zbiorów rozmytych określonych na przestrzeni oznaczamy symbolem  $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ .

Rozmyte wielkości przybliżone będące podzbiarami prostej rzeczywistej definiuje się jako liczby rozmyte (FN).

**Definicja 2** (Dubois, Prade, 1979). Liczbą rozmytą nazywamy wypukły, normalny podzbiór rozmyty  $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ .

Zbiór rozmyty  $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  nazywamy:

- *normalnym* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $x_0 \in \mathbb{R}$  takie, że  $\mu_S(x_0) = 1$ ,
- *wypukłym* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $x, y, z \in \mathbb{R}$  takie, że  $x \leq y \leq z \Rightarrow \mu_S(y) \geq \min\{\mu_S(x), \mu_S(z)\}$ .

Niech  $S$  i  $T$  będą liczbami rozmytymi z funkcjami przynależności  $\mu_S$  i  $\mu_T$ . Wówczas podstawowe operacje: dodawania (+), odejmowania (−), mnożenia (·) i dzielenia (/) wykorzystujące zasadę rozszerzania Zadeha definiujemy następująco (Zimmermann, 2001):

$$\mu_{S*T} = \max_{z=x*y} \min (\mu_S(x), \mu_T(y)), \quad (3)$$

gdzie  $*$  oznacza odpowiednio  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $/$ ,  $x, y, z \in \mathbb{R}$  (przy dzieleniu  $y \neq 0$ ).

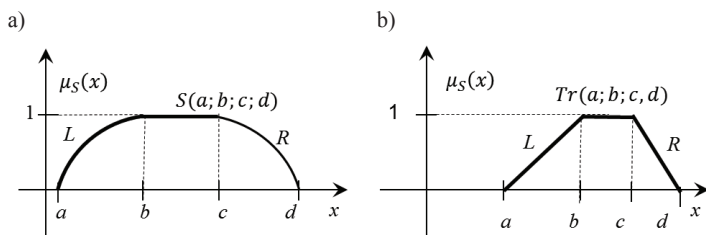
Dubois zaproponował model liczb rozmytych  $LR$  (Dubois, Prade, 1978, 1980, 1988) upraszczający znacznie wykonywanie działań arytmetycznych na liczbach rozmytych<sup>3</sup>.

**Definicja 3** (Dubois, Prade, 1978, 1988). Niech  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  będzie uporządkowaną czwórką taką, że  $a < b \leq c < d$ . Liczbę rozmytą  $S(a; b; c; d)$  nazywamy typu  $LR$ , jeśli funkcja przynależności  $\mu_S: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  ma postać

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ L_S(x) & a \leq x < b, \\ 1 & b \leq x \leq c, \\ R_S(x) & c < x \leq d, \\ 0 & d < x, \end{cases} \quad (4)$$

gdzie funkcja  $L_S: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  jest niemalejąca, a funkcja  $R_S: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  jest nie-rosnąca.

W przypadku, gdy funkcje  $L$  i  $R$  są liniowe wówczas mamy trapezową liczbę rozmytą, którą będziemy oznaczać dalej jako  $Tr(a; b; c; d)$ , jeśli dodatkowo  $b = c$ , to liczbę rozmytą nazywamy trójkątną liczbą rozmytą.



Rysunek 1. Reprezentacja graficzna liczb rozmytych

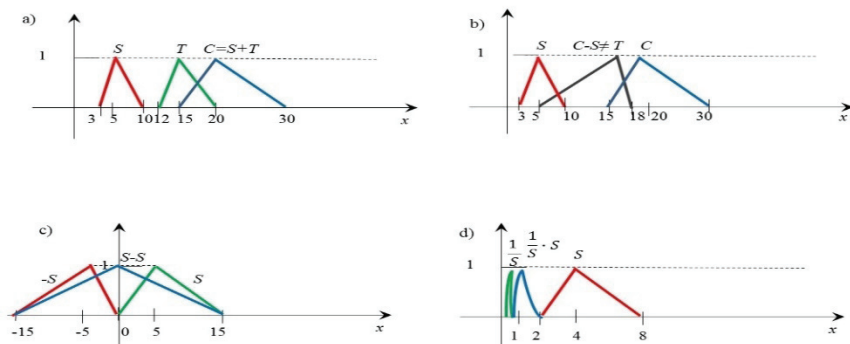
a) Liczba rozmyta  $S(a; b; c; d)$  typu  $LR$ , b) Trapezowa liczba rozmyta  $Tr(a; b; c; d)$ .

Źródło: opracowanie własne.

Należy zaznaczyć, że działaniom na klasycznych liczbach rozmytych towarzyszą pewne niezgodności z intuicją działań na liczbach rzeczywistych (Kosiński, Prokopowicz, 2004). Wykonywanie operacji dodawania lub odejmowania na  $FN$  może pociągać za sobą powiększanie się nośnika liczb wynikowych, czyli zwiększanie rozmytości liczby rozmytej, a w konsekwencji nieprecyzyjności tej liczby (rysunek 2 a).

<sup>3</sup> Zgodnie z definicją (3) działania na liczbach rozmytych wymagają wykonywania szeregu skomplikowanych operacji arytmetycznych na elementach nośników oraz ich stopniach przynależności.

Dla liczb rozmytych, jeśli  $A + B = C$ , to na ogół  $C - B \neq A$ , co powoduje brak możliwości rozwiązywania równań ogólnej postaci, np. typu  $A + X = C$  gdzie  $A$  i  $C$  są liczbami rozmytymi (rysunek 2 a, b). Przy wykorzystaniu operacji arytmetycznych na  $FN$  często nie jest możliwe wyznaczenie elementu neutralnego względem dodawania oraz odwrotnego względem mnożenia (rysunek 2 c, d).



Rysunek 2. Operacje na liczbach rozmytych

- a) Dodawanie liczb rozmytych,  $S + T$ , b) Odejmowanie liczb rozmytych,  $C - S$ , c) Działanie  $S - S$ ,  
d) Działanie  $\frac{1}{S} \cdot S$ .

Źródło: opracowanie własne.

Przedstawione niedoskonałości  $FN$  były bezpośrednią inspiracją powstania modelu skierowanych liczb rozmytych. Skierowaną liczbę rozmytą Kosiński (Kosiński i inni, 2002; 2003; Kosiński, 2006) zdefiniował następująco:

**Definicja 4** (Kosiński, 2006). *Skierowaną liczbą rozmytą (OFN) nazywamy uporządkowaną parę  $(f_S, g_S)$  ciągłych funkcji  $f_S: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_S: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $f_S$  – nazywamy częścią wznoszącą ( $UP_S$ ),  $g_S$  – częścią opadającą ( $DOWN_S$ )<sup>4</sup>.*

Jeżeli funkcje  $f_S, g_S$  są ściśle monotoniczne, to istnieją do nich funkcje odwrotne  $f_S^{-1}(x)$ ,  $g_S^{-1}(x)$  określone na odpowiednich przedziałach  $UP_S = [f_S(0), f_S(1)]$  oraz  $DOWN_S = [g_S(1), g_S(0)]$ . Do zbiorów  $UP_S$  oraz  $DOWN_S$  dodajemy na przedziale  $[f_S(1), g_S(1)]$  funkcję stałą  $CONST$  równą 1. Skierowaną liczbę rozmytą  $OFN$  będziemy oznaczali dalej w postaci ogólnej przez  $\vec{S}(f_S(0); f_S(1); g_S(1); g_S(0))$ .

W przypadku, gdy funkcje  $f_S^{-1}(x)$ ,  $g_S^{-1}(x)$  są liniowe  $OFN$  nazywamy trapezową liczbą rozmytą i oznaczamy symbolem  $\vec{Tr}(f_S(0); f_S(1); g_S(1); g_S(0))$ . Skierowana liczba rozmyta  $\vec{Tr}(f_S(0); f_S(1); g_S(1); g_S(0))$  jest wyznaczona wówczas jednoznacznie za pomocą czterech liczb  $f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0)$  gdzie  $UP_S = [f_S(0), f_S(1)]$ ,

<sup>4</sup> Od konferencji ICAISC w 2015 dla uhonorowania i podkreślenia wkładu Profesora Kosińskiego (1946–2014) w rozwój modelu skierowanych liczb rozmytych powstała propozycja zmiany nazwy Skierowanych Liczb Rozmytych (ang. *Ordered Fuzzy Numbers*), na Liczby Rozmyte Kosińskiego (ang. *Kosinski's Fuzzy Numbers* – KFN).



$DOWN_S = [g_S(1), g_S(0)]$ . Dowolna liczba rzeczywista  $a \in \mathbb{R}$  jest reprezentowana przez OFN jako  $\overleftrightarrow{Tr}(a; a; a)$ .

Wykorzystując funkcje odwrotne  $f_S^{-1}(x)$ ,  $g_S^{-1}(x)$  funkcję przynależności skierowanej liczby rozmytej Kosiński (2006) określił następująco:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} f_S^{-1}(x) & \text{gdy } x \in UP_S, \\ 1 & \text{gdy } f_S(1) \leq x \leq g_S(1), \\ g_S^{-1}(x) & \text{gdy } x \in DOWN_S, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases} \quad (5)$$

Kolejność funkcji odwrotnych wyznacza skierowanie (orientację) liczby rozmytej, którą w interpretacji graficznej przedstawia się za pomocą strzałki. W przypadku orientacji dodatniej kierunek OFN jest zgodny z kierunkiem osi  $OX$  liczb rzeczywistych, a orientacji ujemnej kierunek OFN jest przeciwny do kierunku osi  $OX$  liczb rzeczywistych. Przykłady skierowanych liczb rozmytych oraz odpowiadających im funkcji wyznaczonych za pomocą wzoru (5) zaprezentowano na rysunku 3. Warto tutaj zwrócić uwagę, na różnice między koncepcją skierowanych liczb rozmytych a koncepcją zbiorów rozmytych, czy też liczb rozmytych Zadeha. Zauważmy, że jeśli spełniony jest warunek (6) lub (7),

$$f_S(0) \leq f_S(1) \leq g_S(1) \leq g_S(0), \quad (6)$$

$$f_S(0) \geq f_S(1) \geq g_S(1) \geq g_S(0) \quad (7)$$

to funkcja postaci (5) odpowiada funkcji przynależności w klasycznym modelu liczb rozmytych (por. rysunek 3 b, d).

Warunek (6) oznacza, że funkcja  $f_S$  jest ściśle rosnąca lub stała, a funkcja  $g_S$  jest ściśle malejąca, natomiast warunek (7), że funkcja  $f_S$  jest ściśle malejąca lub stała, a funkcja  $g_S$  jest ściśle rosnąca lub stała. Jeśli ponadto  $f_S(0) < g_S(0)$  to mówimy o orientacji dodatniej liczby rozmytej, jeśli  $f_S(0) > g_S(0)$  o orientacji ujemnej, a gdy  $f_S(0) = g_S(0)$  o braku orientacji.

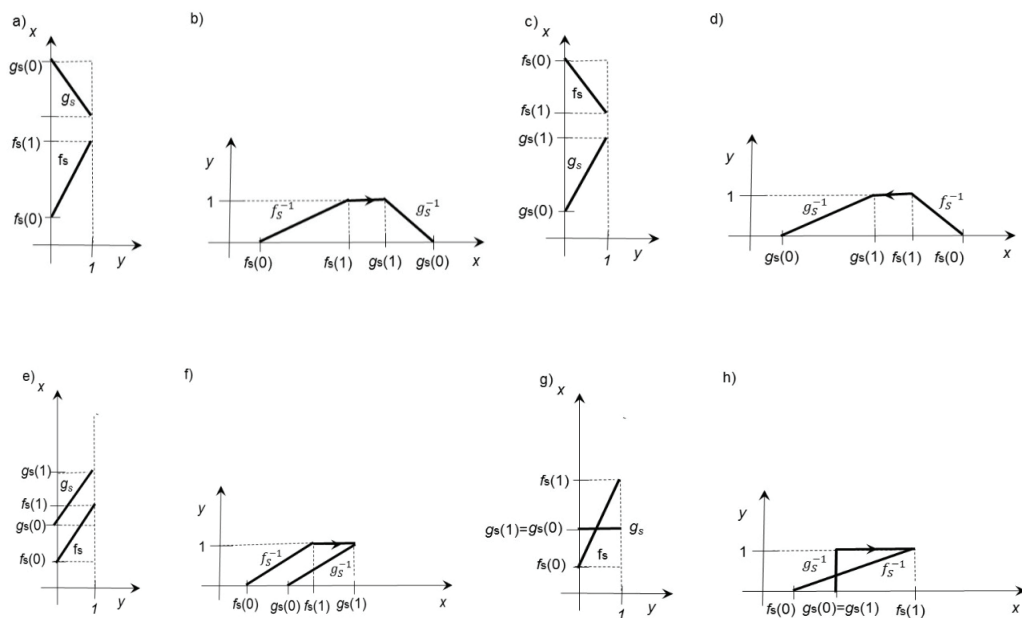
Ponadto OFN  $\tilde{S}(f_S(0); f_S(1); g_S(1); g_S(0))$  spełniająca warunek (6) wyznacza FN  $S(f_S(0); f_S(1); g_S(1); g_S(0))$  opisaną przez  $\mu_S: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  następująco:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & x < f_S(0), \\ f_S^{-1}(x) & f_S(0) \leq x < f_S(1), \\ 1 & f_S(1) \leq x \leq g_S(1), \\ g_S^{-1}(x) & g_S(1) < x \leq g_S(0), \\ 0 & g_S(0) < x. \end{cases} \quad (8)$$

Natomiast  $OFN \vec{S}(f_S(0); f_S(1); g_S(1); g_S(0))$  spełniająca warunek (7) wyznacza  $FN S(f_S(0); f_S(1); g_S(1); g_S(0))$  opisaną przez  $\mu_S: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  następująco.

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & x < g_S(0), \\ g_S^{-1}(x) & g_S(0) \leq x < g_S(1), \\ 1 & g_S(1) \leq x \leq f_S(1), \\ f_S^{-1}(x) & f_S(1) < x \leq f_S(0), \\ 0 & f_S(0) < x. \end{cases} \quad (9)$$

Skierowaną liczbę rozmytą, dla której funkcja (5) nie wyznacza funkcji przynależności w klasycznym ujęciu Kosińskiego nazywa *niewłaściwą* (np. rysunek 3 f, h).



Rysunek 3. Przykłady skierowanych liczb rozmytych i odpowiadających im funkcji określonych wzorem (5)

Źródło: opracowanie własne.

### 3. DZIAŁANIA NA SKIEROWANYCH LICZBACH ROZMYTYCH

Poniżej przedstawimy definicje i podstawowe własności operacji arytmetycznych na skierowanych liczbach rozmytych.

**Definicja 5** (Kosiński, 2006). Niech  $\vec{A} = (f_A, g_A)$ ,  $\vec{B} = (f_B, g_B)$ ,  $\vec{C} = (f_C, g_C) \in \mathfrak{K}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Podstawowe operacje na skierowanych liczbach rozmytych: dodawanie ( $\oplus$ ), odejmowanie ( $\ominus$ ), mnożenie ( $\odot$ ) dzielenie ( $\oslash$ ) definiuje się następująco:

#### 1. Suma

$$\vec{C} = \vec{A} \oplus \vec{B}, \quad (10)$$

$$\text{gdzie } f_C(y) = f_A(y) + f_B(y) \wedge g_C(y) = g_A(y) + g_B(y). \quad (11)$$

#### 2. Różnica

$$\vec{C} = \vec{A} \ominus \vec{B}, \quad (12)$$

$$\text{gdzie } f_C(y) = f_A(y) + f_B(y) \wedge g_C(y) = g_A(y) + g_B(y). \quad (13)$$

#### 3. Iloczyn

$$\vec{C} = \vec{A} \odot \vec{B}, \quad (14)$$

$$\text{gdzie } f_C(y) = f_A(y) \cdot f_B(y) \wedge g_C(y) = g_A(y) \cdot g_B(y). \quad (15)$$

#### 4. Iloraz

$$\vec{C} = \vec{A} \oslash \vec{B}, \quad (16)$$

$$\text{gdzie } \vec{B} \neq 0 \text{ oraz } f_C(y) = f_A(y)/f_B(y) \wedge g_C(y) = g_A(y)/g_B(y). \quad (17)$$

#### 5. Iloczyn $\vec{A}$ przez liczbę $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \circ \vec{A} = \vec{S}(\alpha; \alpha; \alpha; \alpha) \odot \vec{A}.$$

Algebra skierowanych liczb rozmytych umożliwia posługiwanie się pojęciami rozmytymi, ilościowo nieostrymi, w sposób podobny do rachunku na liczbach rzeczywistych. Jedną z ważniejszych zalet OFN jest to, że nie zawsze wynikiem operacji na nich jest liczba o większym nośniku. Wykonując operację arytmetyczną można także otrzymać liczbę, którą interpretuje się jako liczbę rzeczywistą i nazywa *singletonem*, co

było niemożliwe w wyniku wykonywania działań na klasycznych liczbach rozmytych. Dowolna liczba rozmyta posiada także liczbę przeciwną oraz odwrotną.

Warto w tym miejscu nadmienić, że operacje arytmetyczne wprowadzone przez Kosińskiego są tożsame z operacjami zdefiniowanymi przez Dubois and Prade (1978) w sytuacji, gdy *OFN* posiadają tę samą orientację. Natomiast, gdy liczby rozmyte posiadają przeciwne orientacje wynikiem działania mogą być *niewłaściwe* skierowane liczby rozmyte (Kosiński i inni, 2003), które nie poddają się już prostej interpretacji.<sup>5</sup> Przykładowo, niewłaściwe skierowane liczby rozmyte otrzymamy w wyniku operacji dodawania  $\vec{Tr}(1; 3; 7; 8) \oplus \vec{Tr}(5; 4; 4; 2)$  oraz mnożenia  $\vec{Tr}(1; 3; 5; 6) \odot \vec{Tr}(4; 3; 3; 1)$ .

W praktycznych zastosowaniach spotykamy się z zagadnieniem porównywania skierowanych liczb rozmytych. Najczęściej wykorzystuje się do tego celu operację wyostrzania polegającą na przypisaniu skierowanej liczbie rozmytej liczby rzeczywistej. W literaturze przedmiotu można znaleźć szereg propozycji wyostrzania liczb rozmytych (Chen, Hwang, 1992; Yager, Filev, 1994). Podawane są także ogólne kryteria metod wyostrzania stanowiące wytyczne pozwalające tworzyć poprawne modele. Brak jest jednak jednej uniwersalnej metody wyostrzania, a jej wybór uzależniony jest do analizowanego problemu oraz pożądaných przez decydenta własności procedury. Podane niżej formuły wyostrzania dotyczą dodatnich skierowanych liczb rozmytych.

**Twierdzenie 1** (Kosiński, Wilczyńska-Sztyma, 2010). Niech  $\vec{S}(f_S(0); f_S(1); g_S(1); g_S(0))$ . Wówczas

$$\phi_{WM}(\vec{S}) = \lambda \cdot f_S(1) + (1 - \lambda) \cdot g_S(1), \quad \lambda \in [0; 1], \quad (18)$$

np:  $\phi_{FM}(\vec{S}) = f_S(1)$ ,  $\phi_{LM}(\vec{S}) = g_S(1)$ ,  $\phi_{MM}(\vec{S}) = \frac{1}{2} \cdot (f_S(1) + g_S(1))$ ,

$$\phi_{CG}(\vec{S}) = \begin{cases} \frac{\int_0^1 \frac{f_S(y) + g_S(y)}{2} (f_S(y) - g_S(y)) dy}{\int_0^1 (f_S(y) - g_S(y)) dy} & f_S(0) \neq g_S(0), \\ f_S(0) & f_S(0) = g_S(0), \end{cases} \quad (19)$$

$$\phi_{GM}(f_S, g_S) = \begin{cases} \frac{g_S(1)g_S(0) - f_S(0)f_S(1)}{g_S(1) + g_S(0) - f_S(0) - f_S(1)} & f_S(0) \neq g_S(0), \\ f_S(0) & f_S(0) = g_S(0). \end{cases} \quad (20)$$

<sup>5</sup> Ciekawą propozycję modyfikacji teorii skierowanych liczb rozmytych, w której przestrzeń liczb Kosińskiego jest zamknięta ze względu na zmodyfikowane działania arytmetyczne zaproponowano w pracy Piasecki (2017).

Odległość między skierowanymi liczbami rozmytymi  $\overrightarrow{Tr}(a; b; c; d)$ ,  $\overrightarrow{Tr}(p; q; r; s)$  wyznacza się zgodnie ze wzorem:

$$\begin{aligned} d\left(\overrightarrow{Tr}(a; b; c; d), \overrightarrow{Tr}(p; q; r; s)\right) = \\ = \sqrt{0,25((a-p)^2 + (b-q)^2 + (c-r)^2 + (d-s)^2)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Ponadto

$$\begin{aligned} \max\left(\overrightarrow{Tr}(a; b; c; d), \overrightarrow{Tr}(p; q; r; s)\right) = \\ = \overrightarrow{Tr}(\max(a, p); \max(b, q); \max(c, r); \max(d, s)), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \min\left(\overrightarrow{Tr}(a; b; c; d), \overrightarrow{Tr}(p; q; r; s)\right) = \\ = \overrightarrow{Tr}(\min(a, p); \min(b, q); \min(c, r); \min(d, s)). \end{aligned} \quad (23)$$

#### 4. PRZYKŁADY INTERPRETACJI ORIENTACJI SKIEROWANYCH LICZB ROZMYTYCH

Bilgiç, Türken (2000) wyróżniają pięć sposobów interpretacji informacji przenoszonej przez zbiory rozmyte: w terminach wiarygodności, zbiorów losowych, podobieństwa, użyteczności oraz pomiaru. Metody konstrukcji funkcji przynależności mogą wykorzystywać oceny eksperta (zespołu ekspertów) a także wyniki obiektywnych pomiarów. W swojej pracy Bilgiç i Türken opisują także główne metody oceny funkcji przynależności tj. metoda ankietowa, bezpośredniej oceny, oceny odwrotnej, oceny przedziałowej, metodę egzemplifikacji oraz metodę porównań parami.

Dwie podstawowe interpretacje liczby rozmytej, to: *stopień*, w jakim zmienna posiada pewną własność oraz *możliwość*, z jaką pewna wielkość przyjmie określoną wartość. Interpretację tę można także przenieść na skierowane liczby rozmyte, którym odpowiada klasyczna funkcja przynależności. Dodatkowo skierowanie liczby rozmytej rozszerza potencjalne możliwości interpretacji, a także zastosowań liczb rozmytych. W pracach Kosiński (2006), Kacprzak (2010) znajdziemy przykłady wykorzystania orientacji skierowanej liczby rozmytej np. do opisu prognoz, tendencji, ocen, charakteru zmian wartości cechy czy parametrów. Sytuację pożądanego wzrostu wartości cechy reprezentuje dodatnia orientacja skierowanej liczby rozmytej, a niepożądanego wzrostu ujemna orientacja liczby rozmytej. W pracy Wilczyńska-Sztyma (2009) przedstawiono rozważania na temat obserwacji rozmytej, gdzie „czas lub monotoniczność (narastanie, zanikanie zjawiska) może być dla projektanta systemu decydującym czynnikiem wpływającym na skierowanie liczb”, możliwości interpretacji skierowania liczby rozmytej jako wyznacznika kierunku ruchu, do analizy tendencji oraz dynamiki badanego zjawiska.

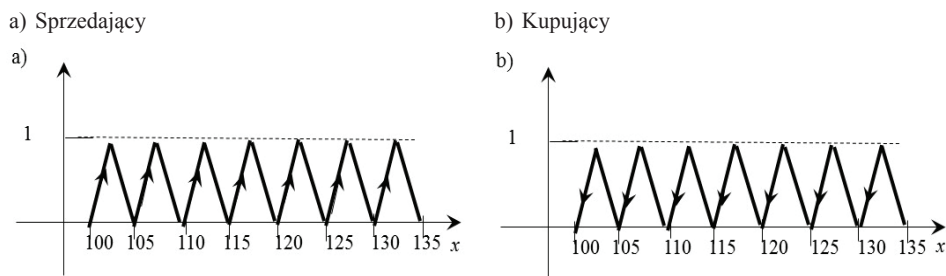
Orientację skierowanej liczby rozmytej można także wykorzystać do reprezentacji typu kryterium w rozmytych metodach wielokryterialnych. W przypadku kryterium typu zysk, tzn. „im więcej tym lepiej” dane mogą być reprezentowane przez skierowane liczby rozmyte o dodatniej orientacji, a typu strata, tzn. „im mniej tym lepiej” o ujemnej orientacji (Kacprzak, Roszkowska, 2014, 2016).

Poniżej zaprezentowano wybrane przykłady wskazujące na różne możliwości interpretacji orientacji skierowanych liczb rozmytych.

**Przykład 1.** Liczba rozmyta może oznaczać stopień, w jakim obiekt posiada pewną własność. Cena towaru na poziomie „około 102,5 PLN”, wahająca się między wartościami 100 PLN i 105 PLN może być reprezentowana przez skierowaną trapezową liczbę rozmytą. Wartość 102,5 PLN oznacza dokładnie cenę 102,5 PLN, czyli własność spełniona jest w stopniu 1, wartości poniżej 102 PLN oraz powyżej 105 PLN już brak tej własności (*około* 102,5 PLN), czyli własność w stopniu 0. Wartości pomiędzy 100 PLN oraz 105 PLN będą ceną *około* w różnym stopniu, przy czym im cena bliższa jest 102 PLN, tym stopień bliższy jest 1. Ponieważ dla Sprzedającego „im wyższa cena tym lepiej”, więc cena „około 102,5 PLN” będzie reprezentowana przez skierowaną liczbę rozmytą  $\overrightarrow{Tr}(100; 102,5; 102,5; 105)$  o dodatniej orientacji. Z kolei dla Kupującego, gdzie „im niższa cena tym lepiej” – przez skierowaną liczbę rozmytą  $\overleftarrow{Tr}(105; 102,5; 102,5; 100)$  o ujemnej orientacji.

Kupujący może także uważać, cenę zakupu na poziomie „około 102,5 PLN” za cenę „wysoką”, wówczas liczba rozmyta  $\overrightarrow{Tr}(100; 102,5; 102,5; 105)$  reprezentuje wyrażenie „cena wysoka”. Z kolei Sprzedający cenę sprzedaży „około 102,5 PLN” uznaje za *niską*. Wówczas liczba rozmyta  $\overleftarrow{Tr}(105; 102,5; 102,5; 100)$  reprezentuje dla Sprzedającego wyrażenie „cena niska”.

**Przykład 2.** Skierowanie liczby rozmytej może określać rodzaj kryterium w rozmytych metodach wielokryterialnych, tzn. w przypadku kryterium typu zysk zmienne reprezentowane są przez skierowane liczby rozmyte o dodatniej orientacji, a kryterium typu strata przez skierowane liczby rozmyte o ujemnej orientacji (rysunek 4).



Rysunek 4. Reprezentacja ceny towaru w negocjacjach między kupującym i sprzedającym za pomocą skierowanych liczb rozmytych

Źródło: opracowanie własne.

**Przykład 3.** Liczba rozmyta może być pewnego rodzaju odpowiednikiem rozkładu prawdopodobieństwa i przedstawiać rozkład możliwości zaistnienia pewnego zdarzenia. Przyjmijmy, że trapezowa skierowana liczba rozmyta  $\vec{Tr}(a; b; c; d)$  przedstawia rozkład możliwości przyszłego np. przychodu, kosztu czy zyskiem firmy, który w danym momencie jest nieznan, a został wygenerowanego na podstawie dialogu z ekspertami, ich wiedzy lub subiektywnego odczucia (Norwich, Turksen, 2004). Ekspert uważa, iż wartości poza przedziałem  $(a, d)$  są niemożliwe, wartości z przedziału  $(c, d)$  są możliwe w stopniu 1, a pozostałe wartości w różnym stopniu, ale tym większym, im bliższe są one liczbie z przedziału  $(c, d)$ . Skierowanie liczby rozmytej wykorzystuje się do zobrazowania tendencji wzrostowej lub spadkowej. Jeśli istnieje przypuszczenie, że przychód/zyski/dochód/ będą rosły w czasie wtedy skierowanie liczby rozmytej będzie dodatnie, przeciwnym przypadku – ujemne. Tabela 1 zawiera wyznaczony przewidywalny dochód firmy, gdzie przychody i koszty wyrażone zostały za pomocą skierowanych liczb rozmytych (por. Wilczyńska-Sztyma, 2009).

Tabela 1.

Reprezentacja prognozowanego przychodu, kosztów oraz dochodu firmy  
za pomocą skierowanych liczb rozmytych

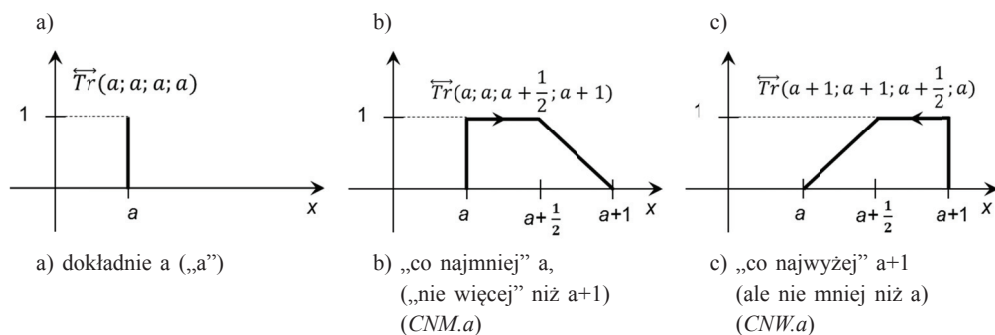
| Lp. | Przychód (P)                   | Koszty (K)                 | Dochód (D = P – K)         |
|-----|--------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1.  | $\vec{Tr}(100; 102; 104; 110)$ | $\vec{Tr}(50; 51; 52; 55)$ | $\vec{Tr}(50; 51; 52; 55)$ |
| 2.  | $\vec{Tr}(100; 102; 104; 110)$ | $\vec{Tr}(50; 60; 62; 70)$ | $\vec{Tr}(50; 42; 42; 40)$ |
| 3.  | $\vec{Tr}(100; 102; 104; 110)$ | $\vec{Tr}(50; 48; 46; 45)$ | $\vec{Tr}(50; 54; 58; 65)$ |
| 4.  | $\vec{Tr}(100; 102; 104; 110)$ | $\vec{Tr}(50; 65; 66; 70)$ | $\vec{Tr}(50; 37; 38; 40)$ |

Źródło: opracowanie własne.

Założmy, że przychód firmy został przedstawiony za pomocą liczby  $\vec{Tr}(100; 102; 104; 110)$ . Wartość 100 jest wyjściowym punktem, dla którego prognozowane przychody mają wzrosnąć, a przedział przedział  $(102, 104)$  informuje o prognozowanych optymalnych wartościach przychodu.

- 1) Prognozowane koszty zostały przedstawione za pomocą liczby  $\vec{Tr}(50; 55; 58; 60)$ . Wówczas wzrostowi kosztów od 50 do 55, odpowiada wzrost prognozowanych przychodów od 100 do 110, ale także wzrost prognozowanego dochodu od 50 do 55.
- 2) Prognozowane koszty zostały przedstawione za pomocą liczby  $\vec{Tr}(50; 60; 62; 70)$ . Wówczas wzrostowi kosztów od 50 do 70 odpowiada wzrost prognozowanych przychodów od 100 do 110, ale spadek dochodu od 50 do 40.
- 3) Prognozowane koszty zostały przedstawione za pomocą liczby  $\vec{Tr}(50; 48; 46; 45)$ . Wówczas spadkowi kosztów od 50 do 45 odpowiada wzrost prognozowanych przychodów od 100 do 110 oraz wzrost dochodu od 50 do 65.
- 4) Prognozowane koszty zostały przedstawione za pomocą liczby  $\vec{Tr}(50; 65; 66; 70)$ . W wyniku działania odejmowania na liczbach skierowanych otrzymujemy niewłaściwą liczbę rozmytą.

**Przykład 4.** Zbiory rozmyte umożliwiają opis zjawisk przy użyciu określeń jakościowych. Pojęcie zmiennej lingwistycznej, która przyjmuje jako swe wartości wyrażenia z języka naturalnego, utożsamiane z określonymi zbiorami rozmytymi zostało wprowadzone przez Zadeha (1975). Wyrażenia z języka potocznego np.: *bardzo słaby*, *słaby*, *średni*, *dobry*, *bardzo dobry* itp. mogą być zapisane formalnie w postaci odpowiednio skonstruowanych zbiorów rozmytych. Poniżej przedstawimy propozycję skali numerycznej oraz opartej na niej lingwistycznej wykorzystującej skierowane liczby rozmyte. Skierowanie liczby rozmytej pozwala na rozszerzenie skali numerycznej zadanej określeniami typu *dokładnie a*, przez wyrażenia *co najmniej a* oraz *co najwyżej a*, a w konsekwencji rozszerzenie skali lingwistycznej zadanej określeniami np. *dobry*, przez wyrażenia *co najwyżej dobry*, *co najmniej dobry*. Do określenia wartości liczbowej wyrażeń lingwistycznych wykorzystamy skierowane trapezowe liczby rozmyte (rysunek 5, tabela 2), (Kacprzak, Roszkowska, 2014, 2016).



Rysunek 5. Skierowane liczby rozmyte i ich numeryczna interpretacja

Źródło: opracowanie własne (por. Kacprzak, Roszkowska, 2016).

Zaletą proponowanego podejścia jest fakt, że, w wyniku działań na wyrażeniach typu „co najmniej” oraz „co najwyżej” możliwe jest otrzymanie ocen dokładnych, reprezentowanych przez *singletony*. Mamy mianowicie:

$$\vec{Tr}(a; a; a + 0,5; a + 1) \oplus \vec{Tr}(b; b; b - 0,5; b - 1) = \vec{Tr}(a + b; a + b; a + b; a + b).$$

Tabela 2.

Skala lingwistyczna oraz skala numeryczna oparta na skierowanych liczbach rozmytych

| Zmienne lingwistyczne    | Skala lingwistyczna | Skala Numeryczna | Skierowana trapezowa liczba rozmyta     |
|--------------------------|---------------------|------------------|-----------------------------------------|
| <b>Bardzo słaby</b>      | <b>BS</b>           | <b>1</b>         | $\vec{X}_1 = \vec{Tr}(1; 1; 1; 1)$      |
| Co najmniej Bardzo Słaby | <i>L.BS</i>         | CNM.1            | $\vec{X}_{G1} = \vec{Tr}(1; 1; 1,5; 2)$ |
| Co najwyżej Słaby        | <i>M.S</i>          | CNW.2            | $\vec{X}_{L2} = \vec{Tr}(2; 2; 1,5; 1)$ |



Tabela 2. (cd.)

| Zmienne lingwistyczne    | Skala lingwistyczna | Skala Numeryczna | Skierowana trapezowa liczba rozmyta     |
|--------------------------|---------------------|------------------|-----------------------------------------|
| Słaby                    | <b>S</b>            | <b>2</b>         | $\vec{X}_2 = \vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$      |
| Co najmniej Słaby        | <i>L.S</i>          | <i>CN.2</i>      | $\vec{X}_{G2} = \vec{Tr}(2; 2; 2,5; 3)$ |
| Co najwyżej Średni       | <i>M.SR</i>         | <i>CNW.3</i>     | $\vec{X}_{L3} = \vec{Tr}(3; 3; 2,5; 2)$ |
| Średni                   | <b>SR</b>           | <b>3</b>         | $\vec{X}_3 = \vec{Tr}(3; 3; 3; 3)$      |
| Co najmniej Średni       | <i>L.SR</i>         | <i>CNW.3</i>     | $\vec{X}_{G3} = \vec{Tr}(3; 3; 3,5; 4)$ |
| Co najwyżej Dobry        | <i>M.D</i>          | <i>CN.4</i>      | $\vec{X}_{L4} = \vec{Tr}(4; 4; 3,5; 3)$ |
| Dobry                    | <b>D</b>            | <b>4</b>         | $\vec{X}_4 = \vec{Tr}(4; 4; 4; 4)$      |
| Co najmniej Dobry        | <i>L.D</i>          | <i>CNW.4</i>     | $\vec{X}_{G4} = \vec{Tr}(4; 4; 4,5; 5)$ |
| Co najwyżej Bardzo Dobry | <i>M.BD</i>         | <i>LE.5</i>      | $\vec{X}_{L5} = \vec{Tr}(5; 5; 4,5; 4)$ |
| Bardzo Dobry             | <b>BD</b>           | <b>5</b>         | $\vec{X}_5 = \vec{Tr}(5; 5; 5; 5)$      |

Zmienne lingwistyczne pogrubione odpowiadają skali numerycznej „dokładnie a”, a = 1,2,3,4,5.

Źródło: opracowanie własne (por. Kacprzak, Roszkowska, 2016).

Podstawowa 5-stopniowa skala numeryczna oraz lingwistyczna oparta na skierowanych liczbach rozmytych ma postać:

$$PSL = \{\vec{X}_j = \vec{Tr}(j; j; j; j) : j = 1, 2, \dots, 5\}. \quad (24)$$

Rozszerzona 5-skala numeryczna oraz lingwistyczna oparta na skierowanych liczbach rozmytych ma postać:

$$SL = \{\vec{X}_j : j = 1, \dots, 5\} \cup \{\vec{X}_{Lj} : j = 2, \dots, 5\} \cup \{\vec{X}_{Gj} : j = 1, \dots, 4\}, \quad (25)$$

gdzie:  $\vec{X}_j = \vec{Tr}(j; j; j; j)$ ,  $\vec{X}_{Lj} = \vec{Tr}(j; j; j - 0,5; j - 1)$ ,  $\vec{X}_{Gj} = \vec{Tr}(j; j; j + 0,5; j + 1)$ .

## 5. METODY WIELOKRYTERIALNE OPARTE NA SKIEROWANYCH LICZBACH ROZMYTYCH

Wielokryterialne wspomaganie decyzji jest dyscypliną naukową wywodzącą się z badań operacyjnych i definiowaną jako rozwiązywanie złożonych problemów decyzyjnych, w których uwzględnia się wiele, często przeciwstawnych punktów widzenia. Metodami wielokryterialnymi określane są metody konstrukcji rankingu, wyboru lub klasyfikacji, które uwzględniają istnienie wielu kryteriów podlegających optymalizacji (Chen, Hwang, 1992; Trzaskalik, 2014). Wariant decyzyjny na etapie wstępnym składać się może z wartości nieporównywalnych ze sobą np. wartości rzeczywistych,

przedziałowych, rozmytych czy zmiennych lingwistycznych. Stąd niezbędna jest jego konwersja do postaci umożliwiającej operacje porównawcze. Przyjmujemy, że dowolny wariant decyzyjny jest reprezentowany przez skierowane trapezowe liczby rozmyte.

Problem decyzyjny można opisać następująco:

Niech

- $\mathcal{F} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$  – zbiór kryteriów,
- $\mathcal{X} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  – zbiór wariantów decyzyjnych,
- $A_i = (\vec{X}_{i,1}, \vec{X}_{i,2}, \dots, \vec{X}_{i,n})$  – reprezentacja wariantu decyzyjnego przez skierowane trapezowe liczby rozmyte, gdzie  $\vec{X}_{i,j} = \vec{Tr}(a_{ij}; b_{ij}; c_{ij}; d_{ij})$  – reprezentacja  $i$ -tego wariantu decyzyjnego ze względu na  $j$ -te kryterium,  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} \in \mathbb{R}, a_{ij} > 0$ . Dodatkowo, w przypadku, gdy  $j$  jest kryterium typu zysk  $\vec{X}_{i,j}$  jest trapezową liczbą rozmytą o dodatniej orientacji, a gdy  $j$  – kryterium typu strata – o ujemnej orientacji.
- $w = [w_1, w_2, \dots, w_n]$  – wektor wag,  $w_i \in \mathbb{R}$  oraz  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ .

W metodach wielokryterialnym istotną rolę odgrywa operacja normalizacji zmiennych. Poniżej prezentujemy dwie formuły normalizacyjne dla skierowanych liczb rozmytych, które są odpowiednikami formuł normalizacyjnych dla klasycznych liczb rozmytych (Chen, 2000; Roszkowska, 2014):

a)

$$\begin{aligned} \vec{Xn}_{i,j} &= \left( \frac{a_{ij}}{d_j^{max}}; \frac{b_{ij}}{d_j^{max}}; \frac{c_{ij}}{d_j^{max}}; \frac{d_{ij}}{d_j^{max}} \right) \text{ jeśli } j \text{ jest kryterium typu zysk,} \\ \vec{Xn}_{i,j} &= \left( \frac{a_j^{min}}{a_{ij}}; \frac{a_j^{min}}{b_{ij}}; \frac{a_j^{min}}{c_{ij}}; \frac{a_j^{min}}{d_{ij}} \right) \text{ jeśli } j \text{ jest kryterium typu strata,} \end{aligned} \quad (26)$$

gdzie  $a_j^{min} = \min_i a_{ij}$ ,  $d_j^{max} = \max_i d_{ij}$ .

b)

$$\begin{aligned} \vec{Xn}_{i,j} &= \left( \frac{a_{ij}-a_j^{min}}{d_j^{max}-a_j^{min}}; \frac{b_{ij}-a_j^{min}}{d_j^{max}-a_j^{min}}; \frac{c_{ij}-a_j^{min}}{d_j^{max}-a_j^{min}}; \frac{d_{ij}-a_j^{min}}{d_j^{max}-a_j^{min}} \right) \text{ jeśli } j \text{ jest kryterium typu zysk,} \\ \vec{Xn}_{i,j} &= \left( \frac{d_j^{max}-a_{ij}}{d_j^{max}-a_j^{min}}; \frac{d_j^{max}-b_{ij}}{d_j^{max}-a_j^{min}}; \frac{d_j^{max}-c_{ij}}{d_j^{max}-a_j^{min}}; \frac{d_j^{max}-d_{ij}}{d_j^{max}-a_j^{min}} \right) \text{ jeśli } j \text{ jest kryterium typu strata,} \end{aligned} \quad (27)$$

gdzie  $a_j^{min} = \min_i a_{ij}$ ,  $d_j^{max} = \max_i d_{ij}$  wyznaczone są z wykorzystaniem wzorów (23)–(22).

#### FSAW OPARTA NA SKIEROWANYCH LICZBACH ROZMYTYCH

W rozmytej procedurze SAW (FSAW) wariantowi decyzyjnemu przypisuje się kombinację liniową wektora wagowego oraz znormalizowanych wartości opcji wariantów decyzyjnych zgodnie ze wzorem (por. Kacprzak, Roszkowska, 2016):

$$FSAW(A_i) = w_1 \circ \vec{Xn}_{i,1} \oplus w_2 \circ \vec{Xn}_{i,2} \oplus \dots \oplus w_n \circ \vec{Xn}_{i,n}, \quad (28)$$

gdzie  $w_i \in \mathbb{R}$  oraz  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ .

W sytuacji, gdy warianty decyzyjne są oceniane na wspólnej skali lingwistycznej, czyli

$$\vec{X}_{i,j} \in LS = \{\vec{X}_j: j = 1, 2, \dots, r\} \cup \{\vec{X}_{Lj}: j = 2, 3, 4, r\} \cup \{\vec{X}_{Gj}: j = 1, 2, 3, r-1\},$$

gdzie:  $\vec{X}_j = \vec{Tr}(j; j; j; j)$ ,  $\vec{X}_{Lj} = \vec{Tr}(j; j; j-0,5; j-1)$ ,  $\vec{X}_{Gj} = \vec{Tr}(j; j; j+0,5; j+1)$  możemy przyjąć:

$$FSAW_L(A_i) = w_1 \circ \vec{X}_{i,1} \oplus w_2 \circ \vec{X}_{i,2} \oplus \dots \oplus w_n \circ \vec{X}_{i,n}, \quad (29)$$

gdzie  $w_i \in \mathbb{R}$  oraz  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ .

Następnie do porównania liczb skierowanych liczb rozmytych można wykorzystać jedną z operacji wyostrzania skierowanych liczb rozmytych ((18)–(20)).

#### FTOPSIS OPARTA NA SKIEROWANYCH LICZBACH ROZMYTYCH

W przypadku rozmytej metody *FTOPSIS* z wykorzystaniem skierowanych trapezowych liczb rozmytych wyznacza się dodatkowo rozwiązanie idealne oraz anty-idealne.

Rozwiązanie idealne ma postać:

$$FPIS = (\vec{I}_1; \vec{I}_2; \dots; \vec{I}_n) \in \mathfrak{R}^n, \quad (30)$$

gdzie  $\vec{I}_r = \max_i \vec{Xn}_{i,r}$  z wykorzystaniem wzoru (22).

Rozwiązanie anty-idealne ma postać:

$$FNIS = (\vec{AI}_1, \vec{AI}_2, \dots, AI_n) \in \mathfrak{R}^n, \quad (31)$$

gdzie  $\vec{AI}_r = \min_i \vec{Xn}_{i,r}$  z wykorzystaniem wzoru (23).

Jeśli warianty decyzyjne są oceniane na wspólnej skali lingwistycznej (22), czyli

$$\vec{X}_{i,j} \in LS = \{\vec{X}_j: j = 1, 2, \dots, r\} \cup \{\vec{X}_{Lj}: j = 2, 3, 4, r\} \cup \{\vec{X}_{Gj}: j = 1, 2, 3, r-1\},$$

przyjmujemy

$$\vec{I}_r = \vec{X}_r \text{ oraz } \vec{A}\vec{I}_r = \vec{X}_1 \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (32)$$

Wartość syntetycznego miernika (oceny)  $i$ -tego wariantu  $A_i$  obliczamy zgodnie ze wzorem (por. Kacprzak, Roszkowska, 2014):

$$FTOPSIS(A_i) = \frac{d(A_i, FNIS)}{d(A_i, FNIS) + d(A_i, FPIS)}, \quad (33)$$

gdzie:

$d(A_i, FPIS) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot d(\vec{X}_{n_{i,j}}, \vec{I}_r)$  – odległość wariantu decyzyjnego  $A_i$  od  $FPIS$ ,  
 $d(A_i, FNIS) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot d(\vec{X}_{i,j}, \vec{A}\vec{I}_1)$  – odległość wariantu decyzyjnego  $A_i$  od  $FNIS$   
 $(i = 1, 2, \dots, m)$  z wykorzystaniem wzoru (21).

Warianty decyzyjne ze zbioru  $\mathcal{X} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  porządkujemy następnie liniowo ze względu na malejącą wartość miernika ich oceny  $FTOPSIS(A_i)$ .

Warto przy tym zaznaczyć, że zaletą skali lingwistycznej (24) jest to, iż w wyniku operacji na skierowanych trapezowych liczbach rozmytych w procedurze FSAW lub FTOPSIS otrzymujemy tylko właściwe skierowane liczby rozmyte. Proponowane podejście budowy skali lingwistycznej wykorzystującej skierowanie liczby rozmytej może być modyfikowane, trzeba jednak uwzględnić problem wystąpienia i ewentualnej interpretacji niewłaściwej skierowanej liczby rozmytej jako wynik cząstkowych operacji procedury agregującej cząstkowe oceny.

## 6. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

W niniejszym opracowaniu użyteczność metody FSAW oraz FTOPSIS zaprezentowano na przykładzie budowy systemu oceny ofert negocjacyjnych. Narzędzia wielokryterialnej analizy decyzyjnej (Kilgour i inni, 2010; Salo, Hämäläinen, 2010) są z powodzeniem do budowy systemu oceny ofert ze względu na fakt, że analiza negocjacyjna wymaga zwykle uwzględnienia jednocześnie wielu konfliktowych kwestii stanowiących przedmiot rozmów. Metody rozmyte, tj. FSAW oraz FTOPSIS mogą być przydatne szczególnie do oceny ofert negocjacyjnych w słabo ustrukturyzowanych problemach negocjacyjnych, tzn. w sytuacji, gdy informacja o wartościach opcji jest nieprecyzyjna, niedokładna lub określona za pomocą wyrażen werbalnych, a także gdy ocena wariantów porozumienia wymaga uwzględnienia danych z różnych źródeł i o różnym charakterze.

Prezentowany przykład, oparty na danych umownych, nie wykorzystuje wszystkich potencjalnych zastosowań metod: FSAW i FTOPSIS opartych na *OFN* do analizy

procesu negocjacji i służy jedynie jako jej ilustracja<sup>6</sup>. W pracy rozważamy problem negocjacji kontraktu menedżerskiego między firmą a potencjalnym dyrektorem (por. Wachowicz, 2010). Budujemy system oceny kontraktu kandydata na dyrektora ze względu na trzy kwestie:  $f_1$  – wysokość zarobków [w PLN],  $f_2$  – pensum urlopu gwarantowanego [w dniach] oraz  $f_3$  – warunki ubezpieczenia na życie w ramach kontraktu. Przyjmujemy, że obszary negocjacji dla poszczególnych kwestii mają postać:  $f_1 < 10\ 000\ \text{PLN}, 24\ 000\ \text{PLN} >$  dla  $f_1$ ;  $< 20, 37 >$  dla  $f_2$ ; {pracownik, 20% pracownik, 80% pracodawca; 50% pracownik, 50% pracodawca; 80% pracownik, 20% pracodawca; pracodawca} dla  $f_3$ . Dla kandydata na dyrektora kwestie  $f_1, f_2$  są typu zysk,  $f_3$  jest kwestią opisaną werbalnie.

**Przypadek 1** (skierowane liczby rozmyte). Przyjmujemy, że kandydat na dyrektora zdecydował się na werbalną ocenę kwestii przy wykorzystaniu skali lingwistycznej (tabela 2). Kandydat na dyrektora jest w stanie zaakceptować pewne ustępstwa blisko opcji opisujących werbalnie warunki ubezpieczenia np. traktując opcję ubezpieczenia: 50% pracownik, 50% pracodawca jako  $Q$ ; warunek 60% pracownik, 60% pracodawca ocenia jako *prawie*  $Q$  (będziemy go oznaczać jako  $L.Q$ ), a 40% pracownik, 60% pracodawca ocenia jako trochę lepszy niż  $Q$  oznaczając  $M.Q$ . Przyjmujemy, że wektor określający istotność kwestii ma postać:  $w = [0,5; 0,3; 0,2]$ . Mechanizm ewaluacji opcji negocjacyjnych kandydata na dyrektora zawarto w tabeli 3.

Tabela 3.

Mechanizm ewaluacji opcji negocjacyjnych przez kandydata na dyrektora  
z wykorzystaniem skali lingwistycznej

| Zarobki     | Skala lingwistyczna | Urlop     | Skala lingwistyczna | Ubezpieczenie na życie        | Skala lingwistyczna |
|-------------|---------------------|-----------|---------------------|-------------------------------|---------------------|
| $<10-12>$   | <b><i>BS</i></b>    | $<20-21>$ | <b><i>BS</i></b>    | pracownik                     | <b><i>BS</i></b>    |
| $<12-12,5>$ | <i>L.BS</i>         | 22        | <i>L.BS</i>         | 90% pracownik, 10% pracodawca | <i>L.BS</i>         |
| $<12,5-13>$ | <i>M.S</i>          | 23        | <i>M.S</i>          | 85% pracownik, 15% pracodawca | <i>M.S</i>          |
| $<13-15>$   | <b><i>S</i></b>     | $<24-25>$ | <b><i>S</i></b>     | 80% pracownik, 20% pracodawca | <b><i>S</i></b>     |
| $<15-15,5>$ | <i>L.S</i>          | 26        | <i>L.S</i>          | 70% pracownik, 30% pracodawca | <i>L.S</i>          |
| $<15,5-16>$ | <i>M.SR</i>         | 27        | <i>M.SR</i>         | 60% pracownik, 40% pracodawca | <i>M.SR</i>         |

<sup>6</sup> Szerzej o zastosowaniach metod wielokryterialnych do analizy procesu negocjacji np. Salo, Hämmäläinen (2010), Roszkowska, Wachowicz (2016), fuzzy TOPSIS (Roszkowska, Wachowicz, 2015a), fuzzy SAW (Roszkowska, 2014).

Tabela 3. (cd.)

| Zarobki   | Skala lingwistyczna | Urlop   | Skala lingwistyczna | Ubezpieczenie na życie        | Skala lingwistyczna |
|-----------|---------------------|---------|---------------------|-------------------------------|---------------------|
| <16–18)   | <b>SR</b>           | <28–29) | <b>SR</b>           | 50% pracownik, 50% pracodawca | <b>SR</b>           |
| <18–18,5) | <i>L. SR</i>        | 30      | <i>L. SR</i>        | 40% pracownik, 60% pracodawca | <i>L. SR</i>        |
| <18,5–19) | <i>M. D</i>         | 31      | <i>M. D</i>         | 30% pracownik, 70% pracodawca | <i>M. D</i>         |
| <19–21)   | <b>D</b>            | <32–33) | <b>D</b>            | 20% pracownik, 80% pracodawca | <b>D</b>            |
| <21–21,5) | <i>L. D</i>         | 34      | <i>L. D</i>         | 15% pracownik, 85% pracodawca | <i>L. D</i>         |
| <21,5–22) | <i>M. BD</i>        | 35      | <i>M. BD</i>        | 50% pracownik, 50% pracodawca | <b>SR</b>           |
| <22–24>   | <b>BD</b>           | <36–37) | <b>BD</b>           | pracodawca                    | <b>BD</b>           |

Źródło: opracowanie własne.

Przyjmujemy następnie, że kandydat na dyrektora ocenia dziesięć wstępnie wybranych ofert. Oferty te wraz z ich ocenami lingwistycznymi zaprezentowano w tabeli 4. W kolejnym kroku analizy dokonano transformacji ocen lingwistycznych na skierowane trapezowe liczby rozmyte zgodnie z przyjętą skalą lingwistyczną (26), a następnie dokonano agregacji ocen cząstkowych za pomocą rozmytej metody FSAW oraz FTOPSIS.

Tabela 4.

Ocena wybranych ofert kontraktu menadżerskiego

| Oferta         | Zarobki [PLN] |                     | Urlop [dni] |                     | Ubezpieczenie na życie        |                     |
|----------------|---------------|---------------------|-------------|---------------------|-------------------------------|---------------------|
|                | Opcja         | Ocena lingwistyczna | Opcja       | Ocena lingwistyczna | Opcja                         | Ocena lingwistyczna |
| A <sub>1</sub> | 11            | <b>BS</b>           | 36          | <b>BD</b>           | 90% pracownik, 10% pracodawca | <i>L. BS</i>        |
| A <sub>2</sub> | 13            | <b>S</b>            | 30          | <i>L. SR</i>        | pracodawca                    | <b>BD</b>           |
| A <sub>3</sub> | 13            | <b>S</b>            | 30          | <i>L. SR</i>        | 40% pracownik, 60% pracodawca | <i>L. SR</i>        |
| A <sub>4</sub> | 14            | <b>S</b>            | 30          | <i>L. SR</i>        | 30% pracownik, 70% pracodawca | <i>M. D</i>         |
| A <sub>5</sub> | 14            | <b>S</b>            | 31          | <i>M. D</i>         | 40% pracownik, 60% pracodawca | <i>L. SR</i>        |

Tabela 4. (cd.)

| Oferta          | Zarobki [PLN] |                     | Urlop [dni] |                     | Ubezpieczenie na życie        |                     |
|-----------------|---------------|---------------------|-------------|---------------------|-------------------------------|---------------------|
|                 | Opcja         | Ocena lingwistyczna | Opcja       | Ocena lingwistyczna | Opcja                         | Ocena lingwistyczna |
| A <sub>6</sub>  | 14            | <b>S</b>            | 31          | <i>M. D</i>         | 30% pracownik, 70% pracodawca | <i>M. D</i>         |
| A <sub>7</sub>  | 17            | <b>SR</b>           | 26          | <i>L. S</i>         | 40% pracownik, 60% pracodawca | <i>L. SR</i>        |
| A <sub>8</sub>  | 18,5          | <i>M. D</i>         | 24          | <b>S</b>            | 85% pracownik, 15% pracodawca | <i>M. S</i>         |
| A <sub>9</sub>  | 20            | <b>D</b>            | 24          | <b>S</b>            | 50% pracownik, 50% pracodawca | <b>SR</b>           |
| A <sub>10</sub> | 22            | <b>BD</b>           | 20          | <b>BS</b>           | pracownik                     | <b>BS</b>           |

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5 zawiera reprezentację ofert za pomocą skierowanych trapezowych liczb rozmytych oraz ich ocenę otrzymaną za pomocą metody FSAW (por. (27)).

Tabela 5.

Ewaluacja ofert za pomocą skierowanych liczb rozmytych  
oraz ocena ofert wyznaczona metodą FSAW

| Oferta          | Zarobki                  | Urlop                    | Ubezpieczenie            | $FSAW(A_i)$                     |
|-----------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|---------------------------------|
| A <sub>1</sub>  | $\vec{Tr}(1; 1; 1; 1)$   | $\vec{Tr}(5; 5; 5; 5)$   | $\vec{Tr}(1; 1; 1,5; 2)$ | $\vec{Tr}(2,2; 2,2; 2,3; 2,4)$  |
| A <sub>2</sub>  | $\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$   | $\vec{Tr}(3; 3; 3,5; 4)$ | $\vec{Tr}(5; 5; 5; 5)$   | $\vec{Tr}(2,9; 2,9; 3,05; 3,2)$ |
| A <sub>3</sub>  | $\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$   | $\vec{Tr}(3; 3; 3,5; 4)$ | $\vec{Tr}(3; 3; 3,5; 4)$ | $\vec{Tr}(2,5; 2,5; 2,75; 3,0)$ |
| A <sub>4</sub>  | $\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$   | $\vec{Tr}(3; 3; 3,5; 4)$ | $\vec{Tr}(4; 4; 3,5; 3)$ | $\vec{Tr}(2,7; 2,7; 2,75; 2,8)$ |
| A <sub>5</sub>  | $\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$   | $\vec{Tr}(4; 4; 3,5; 3)$ | $\vec{Tr}(3; 3; 3,5; 4)$ | $\vec{Tr}(2,8; 2,8; 2,75; 2,7)$ |
| A <sub>6</sub>  | $\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$   | $\vec{Tr}(4; 4; 3,5; 3)$ | $\vec{Tr}(4; 4; 3,5; 3)$ | $\vec{Tr}(3,0; 3,0; 2,75; 2,5)$ |
| A <sub>7</sub>  | $\vec{Tr}(3; 3; 3; 3)$   | $\vec{Tr}(2; 2; 2,5; 3)$ | $\vec{Tr}(3; 3; 3,5; 4)$ | $\vec{Tr}(2,7; 2,7; 2,95; 3,2)$ |
| A <sub>8</sub>  | $\vec{Tr}(4; 4; 3,5; 3)$ | $\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$   | $\vec{Tr}(3; 3; 2,5; 2)$ | $\vec{Tr}(3,2; 3,2; 2,85; 2,5)$ |
| A <sub>9</sub>  | $\vec{Tr}(4; 4; 4; 4)$   | $\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$   | $\vec{Tr}(3; 3; 3; 3)$   | $\vec{Tr}(3,2; 3,2; 3,2; 3,2)$  |
| A <sub>10</sub> | $\vec{Tr}(5; 5; 5; 5)$   | $\vec{Tr}(1; 1; 1; 1)$   | $\vec{Tr}(1; 1; 1; 1)$   | $\vec{Tr}(3,0; 3,0; 3,0; 3,0)$  |

Źródło: opracowanie własne.

Ocenę i ranking ofert otrzymanych metodą FSAW przy wykorzystaniu metod wyostrzania (18)–(20) zawarto w tabeli 6.

Tabela 6.

Ocena i ranking ofert otrzymanych metodą FSAW przy wykorzystaniu różnych metod wyostrzania  
(WM dla  $\lambda = 0,1$ )

| Oferta          | FM   | Ranga | LM   | Ranga | MM   | Ranga | WM<br>( $\lambda = 0,1$ ) | Ranga | CG   | Ranga | GM   | Ranga |
|-----------------|------|-------|------|-------|------|-------|---------------------------|-------|------|-------|------|-------|
| A <sub>1</sub>  | 2,20 | 10    | 2,30 | 10    | 2,25 | 10    | 2,29                      | 10    | 2,28 | 10    | 2,27 | 10    |
| A <sub>2</sub>  | 2,90 | 5     | 3,05 | 2     | 2,98 | 4     | 3,04                      | 2     | 3,02 | 2     | 3,00 | 2     |
| A <sub>3</sub>  | 2,50 | 9     | 2,75 | 6     | 2,63 | 9     | 2,73                      | 9     | 2,69 | 9     | 2,67 | 9     |
| A <sub>4</sub>  | 2,70 | 7     | 2,75 | 6     | 2,73 | 8     | 2,75                      | 8     | 2,74 | 8     | 2,73 | 8     |
| A <sub>5</sub>  | 2,80 | 6     | 2,75 | 6     | 2,78 | 7     | 2,76                      | 7     | 2,76 | 7     | 2,77 | 7     |
| A <sub>6</sub>  | 3,00 | 3     | 2,75 | 6     | 2,88 | 5     | 2,78                      | 6     | 2,81 | 6     | 2,83 | 6     |
| A <sub>7</sub>  | 2,70 | 7     | 2,95 | 4     | 2,83 | 6     | 2,93                      | 4     | 2,89 | 5     | 2,87 | 5     |
| A <sub>8</sub>  | 3,20 | 1     | 2,85 | 5     | 3,03 | 2     | 2,89                      | 5     | 2,93 | 4     | 2,97 | 4     |
| A <sub>9</sub>  | 3,20 | 1     | 3,20 | 1     | 3,20 | 1     | 3,20                      | 1     | 3,20 | 1     | 3,20 | 1     |
| A <sub>10</sub> | 3,00 | 3     | 3,00 | 3     | 3,00 | 3     | 3,00                      | 3     | 3,00 | 3     | 3,00 | 2     |

Źródło: opracowanie własne.

Zauważmy, że wybór techniki wyostrzania wymaga od decydenta pewnego kompromisu pomiędzy stratą informacji zawartych w wielkościach rozmytych a nieumożnością podjęcia decyzji. Stąd wybór ten powinien być przemyślany i dokonany z uwzględnieniem zarówno własności poszczególnych formuł jak i preferencji decydenta. W naszym przypadku, niezależnie od wyboru metody wyostrzania najlepszą ofertą okazała się oferta A<sub>9</sub>, najgorszą oferta A<sub>1</sub>.

Ranking ofert otrzymany przy zastosowaniu procedury FTOPSIS (30) zawiera tabela 7.

Tabela 7.

Ocena i ranking ofert otrzymanych metodą FTOPSIS (przypadek 1)

| Oferta         | $d(A_i, FPIS)$ | $d(A_i, FNIS)$ | $FTOPSIS(A_i)$ | Ranga |
|----------------|----------------|----------------|----------------|-------|
| A <sub>1</sub> | 5,459          | 2,624          | 0,325          | 10    |
| A <sub>2</sub> | 4,006          | 4,047          | 0,503          | 2     |
| A <sub>3</sub> | 4,677          | 3,411          | 0,422          | 9     |
| A <sub>4</sub> | 4,581          | 3,510          | 0,434          | 8     |
| A <sub>5</sub> | 4,533          | 3,559          | 0,440          | 7     |
| A <sub>6</sub> | 4,436          | 3,658          | 0,452          | 6     |



Tabela 7. (cd.)

| Oferta   | $d(A_i, FPIS)$ | $d(A_i, FNIS)$ | $FTOPSIS(A_i)$ | Ranga |
|----------|----------------|----------------|----------------|-------|
| $A_7$    | 4,265          | 3,826          | 0,473          | 5     |
| $A_8$    | 4,201          | 3,928          | 0,483          | 4     |
| $A_9$    | 3,600          | 4,400          | 0,550          | 1     |
| $A_{10}$ | 4,000          | 4,000          | 0,500          | 3     |

Źródło: opracowanie własne.

Także i w przypadku metody FTOPSIS najlepszą ofertą okazała się oferta  $A_9$ , najgorszą  $A_1$ . Zaletą metody FTOPSIS jest możliwość oceny odległości analizowanej oferty od oferty idealnej. Wartość wskaźnika 0,555 wskazuje, że oferta  $A_9$ , chociaż najlepsza spośród 10 ocenianych, jest jednak daleka od oferty idealnej, której wartość wynosi 1.

**Przypadek 2** (liczby rozmyte). Załóżmy teraz, że kandydat na dyrektora stosując werbalną ocenę opcji stosuje uproszczoną skalę werbalną opartą na liczbach rozmytych. Przyjmujemy, że obie oceny werbalne *trochę mniej niż j* reprezentowaną przez skierowaną liczbę rozmytą  $\vec{X}_{Lj} = \vec{Tr}(j; j; j - 0,5; j - 1)$  oraz *trochę więcej niż j - 1* reprezentowaną przez skierowaną liczbę rozmytą  $\vec{Tr}(j - 1; j - 1; j - 0,5; j)$  zastępowane są oceną pomiędzy  $j - 1$  oraz  $j$ , reprezentowaną przez skierowaną liczbę rozmytą postaci  $\vec{Tr}(j - 1; j + 0,5; j + 0,5; j)$  (będącą liczbą rozmytą w klasycznym ujęciu). Wówczas rozszerzona 5-skala numeryczna oraz lingwistyczna oparta na liczbach rozmytych ma postać:

$$SL = \{\vec{X}_j; j = 1, \dots, 5\} \cup \{\vec{X}_{P:j-1,j}; j = 2, \dots, 5\}, \quad (34)$$

gdzie:  $\vec{X}_j = \vec{Tr}(j; j; j; j)$ ,  $\vec{X}_{P:j-1,j} = \vec{Tr}(j - 1; j - 0,5; j - 0,5; j)$ .

Tabela 8 zawiera reprezentację ofert za pomocą trapezowych liczb rozmytych wyznaczonych w oparciu o skalę (34) oraz ich ocenę otrzymaną za pomocą metody FSAW (por. (29)).

Tabela 8.

Ewaluacja ofert za pomocą liczb rozmytych oraz ocena i ranking ofert wyznaczona metodą FSAW (przypadek 2)

| Oferta | Zarobki                | Urlop                      | Ubezpieczenie              | $FSAW(A_i)$                      | $W^*$ | Ranga |
|--------|------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------------|-------|-------|
| $A_1$  | $\vec{Tr}(1; 1; 1; 1)$ | $\vec{Tr}(5; 5; 5; 5)$     | $\vec{Tr}(1; 1,5; 1,5; 2)$ | $\vec{Tr}(2,2; 2,3; 2,3; 2,4)$   | 2,30  | 10    |
| $A_2$  | $\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$ | $\vec{Tr}(3; 3,5; 3,5; 4)$ | $\vec{Tr}(5; 5; 5; 5)$     | $\vec{Tr}(2,9; 3,05; 3,05; 3,2)$ | 3,05  | 2     |
| $A_3$  | $\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$ | $\vec{Tr}(3; 3,5; 3,5; 4)$ | $\vec{Tr}(3; 3,5; 3,5; 4)$ | $\vec{Tr}(2,5; 2,75; 2,75; 3,0)$ | 2,75  | 6     |

Tabela 8. (cd.)

| Oferta   | Zarobki                               | Urlop                                 | Ubezpieczenie                         | $FSAW(A_i)$                                 | $W^*$ | Ranga |
|----------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------------|-------|-------|
| $A_4$    | $\overrightarrow{Tr}(2; 2; 2; 2)$     | $\overrightarrow{Tr}(3; 3,5; 3,5; 4)$ | $\overrightarrow{Tr}(3; 3,5; 3,5; 4)$ | $\overrightarrow{Tr}(2,5; 2,75; 2,75; 3,0)$ | 2,75  | 6     |
| $A_5$    | $\overrightarrow{Tr}(2; 2; 2; 2)$     | $\overrightarrow{Tr}(3; 3,5; 3,5; 4)$ | $\overrightarrow{Tr}(3; 3,5; 3,5; 4)$ | $\overrightarrow{Tr}(2,5; 2,75; 2,75; 3,0)$ | 2,75  | 6     |
| $A_6$    | $\overrightarrow{Tr}(2; 2; 2; 2)$     | $\overrightarrow{Tr}(3; 3,5; 3,5; 4)$ | $\overrightarrow{Tr}(3; 3,5; 3,5; 4)$ | $\overrightarrow{Tr}(2,5; 2,75; 2,75; 3,0)$ | 2,75  | 6     |
| $A_7$    | $\overrightarrow{Tr}(3; 3; 3; 3)$     | $\overrightarrow{Tr}(2; 2,5; 2,5; 3)$ | $\overrightarrow{Tr}(3; 3,5; 3,5; 4)$ | $\overrightarrow{Tr}(2,7; 2,95; 2,95; 3,2)$ | 2,95  | 4     |
| $A_8$    | $\overrightarrow{Tr}(3; 3,5; 3,5; 4)$ | $\overrightarrow{Tr}(2; 2; 2; 2)$     | $\overrightarrow{Tr}(2; 2,5; 2,5; 3)$ | $\overrightarrow{Tr}(2,5; 2,85; 2,85; 3,2)$ | 2,85  | 5     |
| $A_9$    | $\overrightarrow{Tr}(4; 4; 4; 4)$     | $\overrightarrow{Tr}(2; 2; 2; 2)$     | $\overrightarrow{Tr}(3; 3; 3; 3)$     | $\overrightarrow{Tr}(3,2; 3,2; 3,2; 3,2)$   | 3,20  | 1     |
| $A_{10}$ | $\overrightarrow{Tr}(5; 5; 5; 5)$     | $\overrightarrow{Tr}(1; 1; 1; 1)$     | $\overrightarrow{Tr}(1; 1; 1; 1)$     | $\overrightarrow{Tr}(3,0; 3,0; 3,0; 3,0)$   | 3,00  | 3     |

\*  $W \in \{FOM, LM, MN, WM \lambda - \text{dowolne}, CG, GM\}$ .

Źródło: opracowanie własne.

Ranking ofert otrzymany przy zastosowaniu procedury FTOPSIS (30) zawiera tabela 9.

Tabela 9.

Ocena i ranking ofert otrzymanych metodą FTOPSIS (przypadek 2)

| Oferta   | $d(A_i, FPIS)$ | $d(A_i, FNIS)$ | $FTOPSIS(A_i)$ | Ranga |
|----------|----------------|----------------|----------------|-------|
| $A_1$    | 5,407          | 2,645          | 0,328          | 10    |
| $A_2$    | 3,925          | 4,115          | 0,512          | 2     |
| $A_3$    | 4,541          | 3,525          | 0,437          | 6     |
| $A_4$    | 4,541          | 3,525          | 0,437          | 6     |
| $A_5$    | 4,541          | 3,525          | 0,437          | 6     |
| $A_6$    | 4,541          | 3,525          | 0,437          | 6     |
| $A_7$    | 4,131          | 3,935          | 0,488          | 4     |
| $A_8$    | 4,351          | 3,741          | 0,462          | 5     |
| $A_9$    | 3,600          | 4,400          | 0,550          | 1     |
| $A_{10}$ | 4,000          | 4,000          | 0,500          | 3     |

Źródło: opracowanie własne.

Zauważmy, że skala oparta tylko na liczbach rozmytych jest uboższa, gdyż nie pozwala na rozróżnienie wartości ofert  $A_3$ – $A_6$  zarówno przy stosowaniu procedury FSAW jak i FTOPSIS. Co więcej, wszystkie metody wyostrzania dla FSAW prowadzą do takiej samej oceny ofert.

Poniższy przykład wskazuje, że obie metody FSAW oraz FTOPSIS mogą być użytecznym narzędziem do oceny ofert negocjacyjnych ze względu na prostotę obliczeniową, a także łatwość interpretacji otrzymanych wyników. Metody te mogą znaleźć szczególnie zastosowanie w sytuacjach, gdy zagadnienia negocjacyjne są opisane w różny sposób, tj. przez wartości precyzyjne, przybliżone, czy wyrażone werbalnie. Przyjęta w przykładzie skala lingwistyczna rozszerzyła zakres ocen poziomów realizacji kwestii negocjacyjnych, a także umożliwiła, dzięki przyjętemu mechanizmowi niezależną ocenę każdej z ofert, co może być użyteczne w ocenie ofert.

Badania Roszkowska, Wachowicz (2015b) wskazują na liczne problemy związane z procesem tworzenia systemu oceny ofert negocjacyjnych, niewłaściwe operowanie punktami ratingowymi SAW oraz błędne interpretacje ocen tego systemu. Negocjatorzy stosują różne błędy percepcyjne związane z heurystykami, które mogą prowadzić do braku spójności preferencji oraz błędów przy podejmowaniu decyzji. Z drugiej strony decydenci chętnie posługują się ocenami werbalnymi w procesie decyzyjnym, stąd użyteczne wydaje się wykorzystanie metod opartych na zmiennych lingwistycznych do oceny ofert negocjacyjnych.

## 7. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono przykłady wykorzystania skierowanych liczb rozmytych do modelowania decyzji wielokryterialnych. Główne zalety wykorzystania skierowanych liczb rozmytych w problemach decyzyjnych to: możliwość wykonywania działań na *OFN* w sposób podobny do rachunku na liczbach rzeczywistych, reprezentacja typu kryterium przez skierowanie liczby rozmytej, rozszerzenie skali numerycznej oraz lingwistycznej. Niemniej należy też zwrócić uwagę na pewne ograniczenia modelu skierowanych liczb rozmytych (zasygnalizowane także w pracy), a związane z interpretacją tzw. *niewłaściwych* liczb rozmytych, szczególnie w sytuacji wykonywania operacji arytmetycznych (w szczególności, gdy otrzymujemy je podczas wykonywania operacji arytmetycznych na właściwych *OFN*). Problematyka *niewłaściwych skierowanych liczb rozmytych* powinna być zatem przedmiotem dalszych badań, nie tylko w odniesieniu do podejmowania decyzji wielokryterialnych.

## LITERATURA

- Bilgiç T., Türken I. B., (2000), Measurement of Membership Functions: Theoretical and Empirical Work, w: Dubois D., Prade H., (red.), *Fundamental of Fuzzy Sets, The Handbook of Fuzzy Sets*, 7, Kluwer, Dordrecht.
- Chen S. J., Hwang C. L., (1992), *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*, Springer Verlag, Berlin.
- Dubois D., Prade H., (1979), Fuzzy Real Algebra: Some Results, *Fuzzy Sets and Systems*, 2 (4), 327–348.
- Dubois D., Prade H., (1980), *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Application*, Academic Press, New York.
- Dubois D., Prade H., (1988), *Possibility Theory*, New York, London.

- Górecka D., Roszkowska E., Wachowicz T., (2016), The MARS Approach in the Verbal and Holistic Evaluation of the Negotiation Template, *Group Decision and Negotiation*, 25 (138), 1–40.
- Herrera F., Herrera-Viedma E., (2000), Linguistic Decision Analysis: Steps for Solving Decision Problems under Linguistic Information, *Fuzzy Sets and Systems*, 115, 67–82.
- Kacprzak D., (2010), Skierowane liczby rozmyte w modelowaniu ekonomicznych, *Optimum, Studia Ekonomiczne*, 3, 263–281.
- Kacprzak D., Roszkowska E., (2014), *The Application of Ordered Fuzzy Numbers in the SAW Procedure*, The Sixth Podlasie Conference on Mathematics, czerwiec 1–4, 2014, Białystok.
- Kacprzak D., Roszkowska E., (2016), The Fuzzy Saw and Fuzzy TOPSIS Procedures Based on Ordered Fuzzy Numbers, *Information Sciences*, 369, 564–584.
- Kosiński W., (2006), On Fuzzy Number Calculus, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 16 (1), 51–57.
- Kosiński W., Prokopowicz P., (2004), Algebra liczb rozmytych, *Matematyka Stosowana*, 5 (46), 37–63.
- Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., (2002), *Drawback of Fuzzy Arithmetics – New Intuitions and Propositions*, w: Burczyński T., Cholewa W., Moczulski W., (red.), *Methods of Artificial Intelligence*, Gliwice.
- Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., (2003), Ordered Fuzzy Numbers, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematic*, 52 (3), 327–338.
- Kosiński W., Wilczyńska-Sztyma D., (2010), Defuzzification and Implication within Ordered Fuzzy Numbers, w: *WCCI 2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence*, Barcelona, Spain, 1073–1079.
- Norwich A. M., Türken I. B., (1998), A Model for the Measurement of Membership and the Consequences of is Empirical Implementation, *Fuzzy Sets and Systems*, 12, 1–25.
- Piasecki K., (2017), O pewnych modyfikacjach teorii skierowanych liczb rozmytych, *Optimum. Studia Ekonomiczne*, 3 (87), 3–18.
- Prokopowicz P., Pedrycz W., (2015), The Directed Compatibility Between Ordered Fuzzy Numbers – A Base Tool for a Direction Sensitive Fuzzy Information Processing, *Artificial Intelligence and Soft Computing*, 9119, 249–259.
- Roszkowska E., (2014), Ocena ofert negocjacyjnych w słabo ustrukturyzowanych problemach negocjacyjnych z wykorzystaniem rozmytej procedury SAW, *Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu*, 327, 237–247.
- Roszkowska E., Wachowicz T., (2015a), Application of Fuzzy TOPSIS to Scoring the Negotiation Offers in III-Structured Negotiation Problems, *European Journal of Operational Research*, 242 (3), 920–932.
- Roszkowska E., Wachowicz T., (2015b), Inaccuracy in Defining Preferences by the Electronic Negotiation System Users, w: Kamiński B., Kersten G., Szapiro T., (red.), *Outlooks and Insights on Group Decision and Negotiation*, GDN 2015, Lecture Notes in Business Information Processing, 218, Springer, Cham.
- Roszkowska E., Wachowicz T., (2016), *Negocjacje: analiza i wspomaganie decyzji*, Warszawa, Wolters Kluwer.
- Salo A., Hämäläinen R. P., (2010), Multicriteria Decision Analysis in Group Decision Processes, w: Kilgour D. M., Eden C., (red.), *Handbook of Group Decision and Negotiation*, Springer, New York, 269–283.
- Trzaskalik T., (2014), *Wielokryterialne wspomaganie decyzji. Metody i zastosowania*, PWE.
- Wachowicz T., (2010), Metody i narzędzia wspomagania fazy prenegocjacyjnej, *Decyzje* 14, 55–84.
- Wilczyńska-Sztyma D., (2010), Direction of Research into Methods of Defuzzification for Ordered Fuzzy Numbers, XII International PhD Workshop OWD 2010.
- Wilczyńska-Sztyma D., (2009), Idea skierowanych liczb rozmytych. Przykłady interpretacji. I International PhD Workshop OWD 2009.
- Yager R. R., Filev D. P., (1994), *Essentials of Fuzzy Modeling and Control*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Zadeh L. A., (1965), Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, 338–353.

- Zadeh L. A., (1975), The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning, Part I, Information Linguistic Variable, *Expert Systems with Applications*, 36 (2), 3483–3488.
- Zimmermann H. J., (2001), *Fuzzy Set Theory and Applications*, 4th Rev. ed. Boston: Kluwer Academic Publishers.

## O MOŻLIWOŚCIACH WYKORZYSTANIA SKIEROWANYCH LICZB ROZMYTYCH DO PODEJMOWANIA DECYZJI WIELOKRYTERIALNYCH

### Streszczenie

Celem opracowania jest prezentacja możliwości wykorzystania skierowanych liczb rozmytych (*OFN*) do podejmowania decyzji wielokryterialnych. W pracy przedstawiono przykłady interpretacji *OFN*, propozycje wykorzystania *OFN* w rozmytych metodach wielokryterialnych do reprezentacji typu kryterium oraz wyrażeń lingwistycznych. Omówiono rozmyte procedury SAW oraz TOPSIS oparte na *OFN*, które pozwalają na uwzględnienie niejednoznaczności, nieprecyzyjności oraz opisów werbalnych w ocenie wariantów decyzyjnych. Artykuł ma charakter metodologiczny i może stanowić inspirację do dalszych badań nad zastosowaniem *OFN* w metodach wielokryterialnych.

**Słowa kluczowe:** metody wielokryterialne, skierowane liczby rozmyte, zmienne lingwistyczne, rozmyta SAW, rozmyta TOPSIS

## THE APPLICATION ORDERED FUZZY NUMBERS TO MULTI-CRITERIA DECISION MAKING

### Abstract

The main goal of the paper is presentation some possibilities of application ordered fuzzy numbers in multi-criteria decision making. In the paper we present several examples of interpretation ordering fuzzy numbers, propositions application ordered fuzzy numbers in multi-criteria decision making for representation type of criterion as well verbal description. The fuzzy saw and fuzzy TOPSIS methods based on ordered fuzzy numbers were presented. The paper have a methodological character and can inspire to future research concerning application ordered numbers in multi-criteria decision making.

**Keywords:** multi-criteria decision making, ordered fuzzy numbers, linguistic variables, fuzzy SAW, fuzzy TOPSIS



PIOTR KĘBŁOWSKI<sup>1</sup>INNOWACYJNOŚĆ PRZEDSIĘBIORSTW PRZEMYSŁOWYCH PAŃSTW  
GRUPY WYSZEHRADZKIEJ A NAKŁADY NA BADANIA I ROZWÓJ<sup>2</sup>

## 1. WPROWADZENIE

Jednym z głównych paradygmatów w budowie współczesnych strategii długookresowego rozwoju społeczno-gospodarczego państw i ich stowarzyszeń jest uznanie działalności innowacyjnej za jeden z kluczowych czynników warunkujących ich skuteczność. Strategie narodowe państw Grupy Wyszehradzkiej (o zróżnicowanym horyzoncie), jak i strategie rozwoju Unii Europejskiej (konstruowane dla 10-letniego horyzontu) zawierają zwykle podobne cele, jak i środki ich osiągnięcia. Przykładowo, w ramach celu „zwiększenie innowacyjności gospodarki” w Strategii Rozwoju Kraju 2020 zaproponowanej dla Polski, zakłada się: „wzrost nakładów na badania i rozwój”, „budowanie kultury innowacji (...)”, czy też „zapewnienie regulacji stymulujących postęp technologiczny i innowacyjność przedsiębiorstw”. Z kolei, Strategia Europa 2020 zakłada trzy priorytety, tj. rozwój: (i) inteligentny, (ii) zrównoważony oraz (iii) sprzyjający włączeniu społecznemu, przy czym pierwszy priorytet zdefiniowano jako „rozwój gospodarki opartej na wiedzy i innowacji”, a w celach szczegółowych założono m.in. wzrost nakładów na badania i rozwój do 3% PKB Unii Europejskiej oraz wzrost odsetka osób zdobywających wykształcenie wyższe do co najmniej 40%.

Przyjmując, że wynalazczość stanowi kluczowy wymiar działalności innowacyjnej, a jej podstawowym miernikiem jest statystyka patentów, należy zauważyć, iż niemal 90% wszystkich zgłoszeń patentowych do Europejskiego Urzędu Patentowego (European Patent Office – EPO), jak i do Urzędu Patentów i Znaków Towarowych Stanów Zjednoczonych (United States Patent and Trademark Office – USPTO) stanowią zgłoszenia przedsiębiorstw. W związku z powyższym, analiza procesów warunkujących kształtowanie się aktywności wynalazczej w przedsiębiorstwach stanowi ważną część badań podstaw endogenicznego wzrostu gospodarki opartej na wiedzy, zob. Welfe (2007, 2009), Świeczewska (2007, 2009).

Pomiar działalności innowacyjnej poszczególnych przedsiębiorstw, gałęzi przemysłu lub całych gospodarek dokonywany jest albo pośrednio, na podstawie udziału

<sup>1</sup> Uniwersytet Łódzki, Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny, Katedra Modeli i Prognoz Ekonometrycznych, ul. Rewolucji 1905 r. nr 41, 90-214 Łódź, Polska, email: piotr.keblowski@uni.lodz.pl.

<sup>2</sup> Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji D/HS4/01767.

nakładów na badania i rozwój (B+R) w nakładach ogółem, udziału pracowników zatrudnionych w sekcjach B+R, udziału produkcji sprzedanej wyrobów nowych i zmodernizowanych (zob. np. Heller, Bogdański, 2005), albo bezpośrednio na podstawie liczby zgłoszeń patentowych, wzorów użytkowych, czy wzorów przemysłowych (zob. np. Griliches, 1990 oraz Szajt, 2015, 2016). Dla celów porównań międzynarodowych konstruowane są też indeksy i rankingi, łączące dane z bezpośrednich i pośrednich mierników działalności innowacyjnej z informacjami na temat otoczenia instytucjonalnego, infrastrukturalnego, itd. (zob. np. Okoń-Horodyńska i inni, 2012). Niemniej, istniejące badania determinant działalności innowacyjnej przeprowadzane są zwykle na wysokim stopniu agregacji, tj. dotyczą całego sektora B+R, bez rozróżnienia: sektorów instytucjonalnych, źródeł finansowania, czy też poziomów zaawansowania technicznego. Podczas gdy, jak zostanie wykazane w pracy, powyższe podziały są istotne dla analizy działalności innowacyjnej i badawczo-rozwojowej.

W niniejszej pracy analizie poddano mechanizm warunkujący aktywność wynalazczą przedsiębiorstw przemysłowych w państwach Grupy Wyszehradzkiej (V4), mierzoną za pomocą liczby zgłoszeń patentowych do EPO, w podziale ze względu na poziom zaawansowania technicznego według klasyfikacji Organizacji Współpracy Gospodarczej i Rozwoju (OECD) (Hatzichronoglou, 1997). Odrębnie rozważane są zatem obszary działalności dla: wysoko, średniowysoko, średnionisko i nisko zaawansowanej techniki. Przyjęto, że podstawowym czynnikiem determinującym aktywność wynalazczą przedsiębiorstw są nakłady na badania i rozwój. Weryfikowano przy tym, czy długookresowa elastyczność liczby zgłoszeń patentowych względem nakładów na B+R pochodzących z różnych źródeł (środki własne, dofinansowanie ze środków publicznych) jest zbliżona, czy różna. Szczygielski i inni (2015) sugerują na podstawie analizy mikroekonometrycznej, że dofinansowanie działalności badawczo-rozwojowej ze środków Komisji Europejskiej może wręcz wpływać negatywnie na działalność innowacyjną przedsiębiorstw w Polsce.

Wybór państw Grupy Wyszehradzkiej do analizy aktywności wynalazczej przedsiębiorstw podyktowany jest, z jednej strony, potrzebą porównania międzynarodowego mechanizmu warunkującego tę aktywność. Przy czym gospodarki państw grupy V4 cechują się zbliżonym poziomem rozwoju gospodarczego oraz wykazują zwykle, do pewnego stopnia, homogeniczność międzyprzekrojową (zob. np. Kęblowski, 2011). Z drugiej strony, odpowiednio zdezagregowane szeregi czasowe dotyczące działalności wynalazczej i badawczo-rozwojowej dla poszczególnych krajów tej grupy, w tym Polski, są mało liczne, co utrudnia przeprowadzenie analizy ekonometrycznej wyłącznie na podstawie wymiaru czasowego.

Prezentacji i omówieniu danych otrzymanych w wyniku odpowiednich agregacji danych surowych z Eurostat i EPO poświęcono dwie krótkie części (2 i 3), warto bowiem wskazać wyraźne tendencje, które w nich występują i są wspólne dla całego panelu. A zatem, w części drugiej, omówiono klasyfikację poziomów zaawansowania technicznego oraz przedstawiono kształtowanie się liczby zgłoszeń patentowych do EPO przedsiębiorstw przemysłowych w państwach grupy V4. W części trzeciej, omó-



wiono strukturę nakładów na B+R według poziomów zaawansowania technicznego i źródeł finansowania. W części czwartej, przedstawiono wyniki analizy empirycznej postulowanego związku liczby zgłoszeń patentowych i nakładów na badania i rozwój. W części piątej, zawarto podsumowanie.

## 2. POZIOM ZAAWANSOWANIA TECHNICZNEGO A LICZBA ZGŁOSZEŃ PATENTOWYCH W PRZEDSIĘBIORSTWACH PRZEMYSŁOWYCH PAŃSTW GRUPY WYSZEHRADZKIEJ

Klasyfikacja zaawansowania technicznego powinna uwzględniać zróżnicowanie oferty produktów przedsiębiorstw ze względu na ich funkcję i zaawansowanie techniczne. Przykładem klasyfikacji spełniającej te warunki jest klasyfikacja techniczna zgłoszeń patentowych zaproponowana przez Schmocha (2008), w której wyodrębniono 5 głównych dziedzin techniki, tj. (i) elektrotechnika i elektronika, (ii) przyrządy, (iii) chemia, (iv) mechanika, (v) pozostałe dziedziny techniki, które dalej podzielone są na 35 dziedzin szczegółowych, zob. tabelę 1. Powyższa klasyfikacja oparta jest na Międzynarodowej Klasyfikacji Patentowej (IPC) opracowanej przez Światową Organizację Własności Intelektualnej (WIPO) oraz tablicach zgodności opracowanych przez Schmocha (2008).

Tabela 1.

Klasyfikacja dziedzin techniki

| Dziedziny ogólne              | Dziedziny szczegółowe                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Elektrotechnika i elektronika | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. elektrotechnika</li> <li>2. techniki audiowizualne</li> <li>3. telekomunikacja</li> <li>4. komunikacja cyfrowa</li> <li>5. podstawowe procesy komunikacyjne</li> <li>6. informatyka</li> <li>7. informatyka w zarządzaniu</li> <li>8. półprzewodniki</li> </ol>                                                                                                                                                                      |
| Przyrządy                     | <ol style="list-style-type: none"> <li>9. optyka</li> <li>10. technika pomiaru</li> <li>11. analiza materiałów biologicznych</li> <li>12. kontrola i sterowanie</li> <li>13. technika medyczna</li> </ol>                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Chemia                        | <ol style="list-style-type: none"> <li>14. syntetyczna chemia organiczna i kosmetyki</li> <li>15. biotechnologia</li> <li>16. farmaceutyki</li> <li>17. chemia makrocząsteczek i polimerów</li> <li>18. chemia spożywcza</li> <li>19. chemia materiałów podstawowych</li> <li>20. materiały i metalurgia</li> <li>21. technika powlekania</li> <li>22. mikro- i nanotechnika</li> <li>23. inżynieria chemiczna i procesowa</li> <li>24. technika ochrony środowiska</li> </ol> |

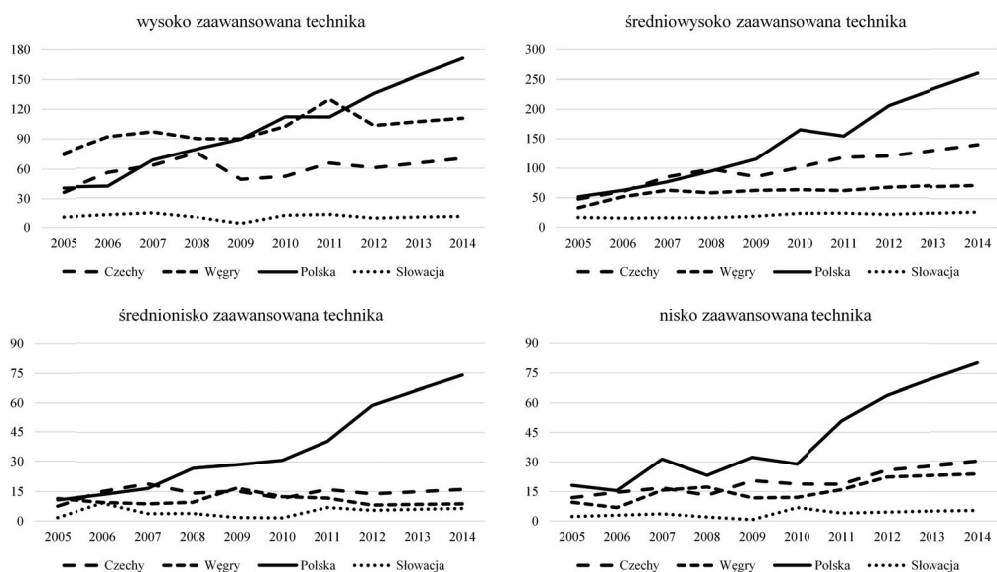
Tabela 1. (cd.)

| Dziedziny ogólne             | Dziedziny szczegółowe                                                                                                                                                                                                                                          |
|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Mechanika                    | 25. mechatronika<br>26. technika obróbki metali<br>27. technika maszyn nonelektrycznych<br>28. technika maszyn włókienniczych i papierniczych<br>29. technika pozostałych maszyn specjalistycznych<br>30. termika<br>31. elementy mechaniczne<br>32. transport |
| Pozostałe dziedziny techniki | 33. meble i gry<br>34. pozostałe towary konsumpcyjne<br>35. inżynieria lądowa i wodna                                                                                                                                                                          |

Źródło: Schmoch (2008).

Z drugiej strony, podstawową klasyfikacją działalności przedsiębiorstw przemysłowych rozważaną w bazach statystycznych oraz badaniach empirycznych jest klasyczna klasyfikacja sektorowa, która jest zorientowana na typowe produkty wytwarzane w przedsiębiorstwach. Przykładem jest klasyfikacja NACE stosowana w Unii Europejskiej. Według tej klasyfikacji dostępne są statystyki dotyczące aktywności ekonomicznej przedsiębiorstw, w tym dane dotyczące nakładów na badania i rozwój. Jakkolwiek klasyfikacje: dziedzin techniki i sektorowa (działów gospodarki, w tym gałęzi przemysłu) są co do zasady odmienne, co wyklucza istnienie jednoznacznych tablic zgodności, to jednak Eurostat zaproponował sposób agregacji danych z klasyfikacji sektorowej, który pozwala dokonać aproksymacji danych dla czteropoziomowej klasyfikacji zaawansowania technicznego zaproponowanej przez Hatzichronoglou (1997), zob. *High-tech Aggregation by NACE Rev. 2*. Przykładowo, do działalności wysoko zaawansowanej technicznie zaliczono: (i) produkcję podstawowych substancji farmaceutycznych oraz leków i pozostałych wyrobów farmaceutycznych oraz (ii) produkcję komputerów, wyrobów elektronicznych i optycznych. Ze względu na fakt, że Eurostat przeprowadza wyżej wspomnianą agregację jedynie dla najwyższego poziomu w klasyfikacji zaawansowania technicznego, konieczne okazało się samodzielne dokonanie agregacji dla poszczególnych poziomów. Szeregi przekrojowo-czasowe uzyskane na podstawie bazy danych Eurostatu dla lat 2005–2014 (szeregi z sekcji pat\_ep\_nnac2) przedstawia rysunek nr 1a.

Na podstawie liczby zgłoszeń patentowych agregowanych z bazy danych Eurostatu należy zauważyć po pierwsze, że w państwach Grupy Wyszehradzkiej zgłoszenia w dziedzinie wysoko i średniowysoko zaawansowanej techniki stanowią dość stabilnie ponad 80% ogółu zgłoszeń (z wyjątkiem Słowacji – ok. 75%) w całym rozważanym okresie, a jednocześnie wspólną cechą całego panelu jest wzrost udziału zgłoszeń w dziedzinie średniowysoko zaawansowanej techniki oraz spadek w dziedzinie wysoko zaawansowanej techniki. Udział zgłoszeń w dziedzinie średniowysoko zaawansowanej techniki wzrósł odpowiednio:



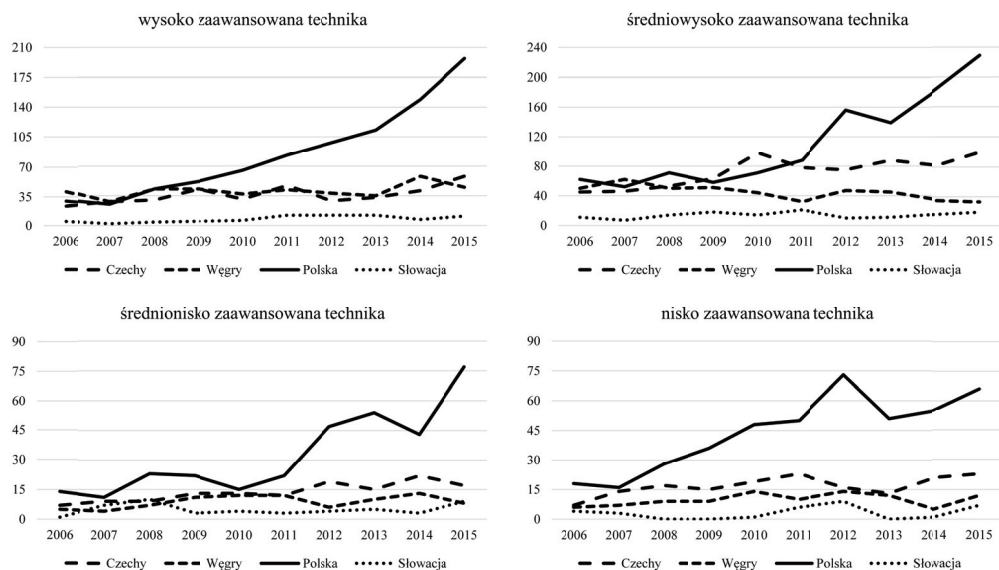
Rysunek 1a. Liczba zgłoszeń patentowych w EPO wg poziomu zaawansowania technicznego

Źródło: opracowanie własne na podstawie bazy danych Eurostat, agregacja danych z klasyfikacji sektorowej.

- w Czechach, z 46% w roku 2005 do 55% w roku 2014 (przy analogicznym spadku w dziedzinie wysoko zaawansowanej techniki z 35% do 27%),
- na Węgrzech, z 26% do 34% (spadek z 58% do 51%),
- w Polsce, z 49% do 51% (spadek z 39% do 34%),
- na Słowacji, z 48% do 53% (spadek z 42% do 23%).

Po drugie, zdecydowanie najwyższa dynamika liczby zgłoszeń patentowych występuje w Polsce – wzrost o 283% zgłoszeń ogółem w analizowanym okresie. W pozostałych państwach regionu wzrost liczby zgłoszeń patentowych jest bardziej umiarkowany i wynosi odpowiednio: w Czechach – 47%, na Węgrzech – 67%, na Słowacji – 56%. Należy jednak zauważyć, że wysoki wzrost liczby zgłoszeń patentowych w Polsce związany jest z relatywnie niską liczbą zgłoszeń patentowych na początku próby, szczególnie przy uwzględnieniu rozmiaru poszczególnych gospodarek i ich rynków pracy.

Po trzecie, struktura zgłoszeń patentowych według sektorów instytucjonalnych jest względnie stabilna (zob. rysunek A1 w Aneksie), przy czym w państwach grupy V4 przeciętnie 72% liczby zgłoszeń patentowych przypada na sektor przedsiębiorstw, za kolejne 20% odpowiadają sektory „nieznane” i osoby indywidualne, a pozostałe 8% zgłaszają: sektor rządowy i organizacje non-profit, szkolnictwo wyższe oraz szpitale. Powyższe pozwala przyjąć, że dynamika liczby zgłoszeń patentowych przedsiębiorstw jest zbliżona do dynamiki liczby zgłoszeń ogółem, co pozwala rozwiązać problem braku dostępności danych w jednoczesnym podziale na sektory instytucjonalne i sektory gospodarki (gałęzie przemysłu).



Rysunek 1b. Liczba zgłoszeń patentowych w EPO wg poziomu zaawansowania technicznego

Źródło: opracowanie własne na podstawie bazy danych EPO, agregacja danych z klasyfikacji dziedzin techniki.

Po czwarte, należy zauważyć, że agregacja danych z klasyfikacji sektorowej zaproponowana przez Eurostat nie stanowi w pełni satysfakcjonującej aproksymacji klasyfikacji zaawansowania technicznego. Agregacja zgłoszeń patentowych z bazy danych EPO na podstawie 35-elementowej klasyfikacji dziedzin techniki Schmocha (2008) do czteropoziomowej klasyfikacji zaawansowania technicznego wskazuje bowiem na odmienne, do pewnego stopnia, kształtowanie się liczby zgłoszeń patentowych na poszczególnych poziomach zaawansowania technicznego, co wynika z przeszacowania udziału dziedzin wysoko zaawansowanej techniki oraz niedoszacowania udziału średniowysoko zaawansowanej techniki na początku próby, zob. rysunek 1b. W szczególności, zgodnie z danymi EPO udział zgłoszeń patentowych w dziedzinie wysoko zaawansowanej techniki w latach 2006–2015 w Czechach i na Słowacji pozostawał na względnie stabilnym poziomie, odpowiednio 26% i 25% (52% i 48% dla dziedzin średniowysoko zaawansowanej techniki), z kolei na Węgrzech i w Polsce wzrósł odpowiednio z 40% do 46% i z 24% do 35% (przy spadku liczby zgłoszeń w dziedzinie średniowysoko zaawansowanej techniki odpowiednio z 49% do 34% i z 50% do 40%). Poszczególne dziedziny szczegółowe sklasyfikowano przy tym następująco, wysoko zaawansowana technika: 2–11, 13, 15, 16, 21, 22; średniowysoko zaawansowana technika: 1, 12, 14, 17, 23–30, 32; średnionisko zaawansowana technika: 18 – 20, 31; nisko zaawansowana technika: 33–35, zob. tabelę 1.

Należy jednak wskazać, że wyniki obu podejść klasyfikacji poziomów zaawansowania technicznego mogą się różnić nie tylko ze względu na odmienność klasyfikacji sektorowej i klasyfikacji dziedzin techniki, ale również ze względu na różny sposób

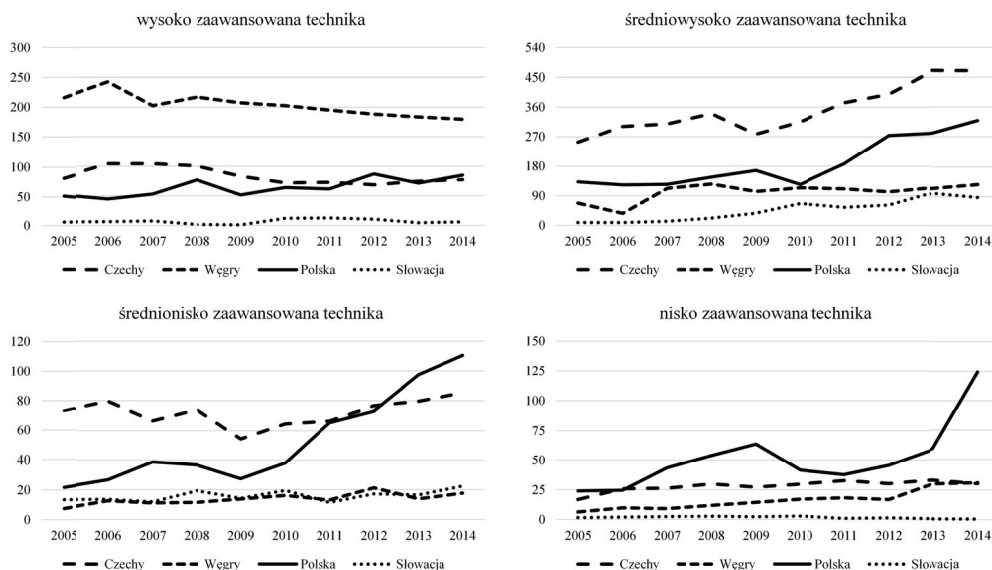
agregacji danych z bazy PATSTAT EPO (w bazie danych Eurostat uwzględniane są udziały poszczególnych zgłaszających, podczas gdy w klasyfikacji dziedzin techniki EPO uwzględniany jest jedynie pierwszy wśród autorów zgłoszenia) oraz arbitralność przyporządkowania poszczególnych gałęzi gospodarki i dziedzin techniki do poziomów zaawansowania technicznego. W celu zachowania spójności przyporządkowania zarówno dla zgłoszeń patentowych, jak i dla nakładów na badania i rozwój, analizę empiryczną oparto na szeregach agregowanych z bazy danych Eurostat.

### 3. POZIOM ZAAWANSOWANIA TECHNICZNEGO A NAKŁADY NA BADANIA I ROZWÓJ WG ŹRÓDEŁ FINANSOWANIA

Źródłem finansowania nakładów na badania i rozwój w przedsiębiorstwach są: (i) środki przedsiębiorstw krajowych (przede wszystkim środki własne, w niewielkim stopniu środki innych przedsiębiorstw), (ii) dofinansowanie z sektora rządowego, (iii) środki pochodzące z zagranicy (w przypadku przedsiębiorstw przemysłowych w grupie V4 są to przede wszystkim środki otrzymane od Komisji Europejskiej, organizacji międzynarodowych oraz przedsiębiorstw zagranicznych), (iv) środki otrzymane od szkolnictwa wyższego, (v) środki otrzymane od krajowych prywatnych instytucji niekomercyjnych. Środki krajowych przedsiębiorstw przemysłowych w grupie V4 stanowią w latach 2005–2014 przeciętnie ok. 86% ogółu nakładów przedsiębiorstw przemysłowych na badania i rozwój, dofinansowanie z sektora rządowego odpowiada przeciętnie za ok. 8% nakładów, środki pochodzące z zagranicy finansują przeciętnie ponad 6% nakładów, z kolei środki otrzymane od szkolnictwa wyższego oraz środki otrzymane od krajowych prywatnych instytucji niekomercyjnych stanowią pomijalne źródła finansowania, zob. rysunek A2 w Aneksie.

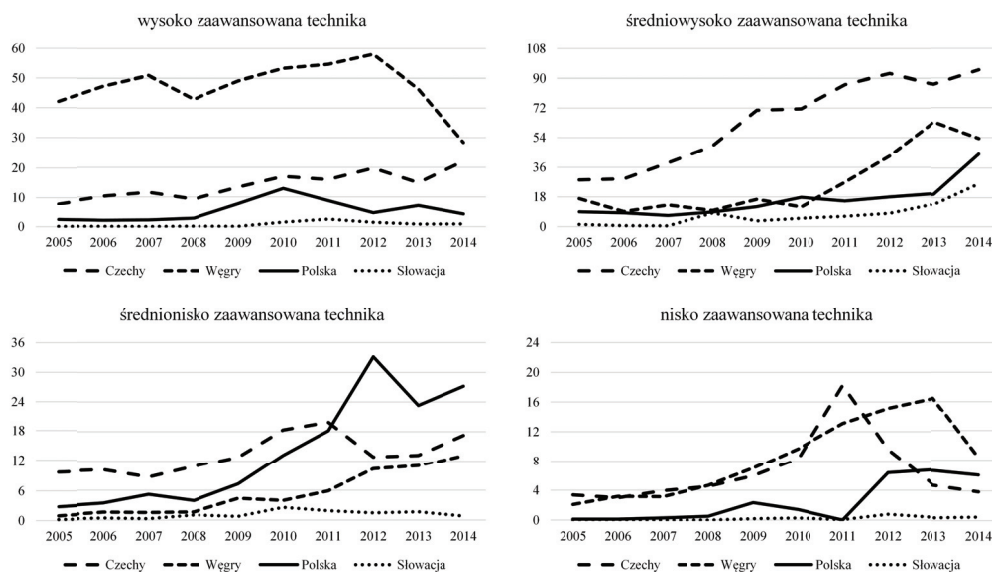
Dla potrzeb badania strumień nakładów na B+R podzielony został na dwa źródła: (i) środki przedsiębiorstw krajowych (w uproszczeniu środki własne), (ii) środki z sektora rządowego i zagranicy (głównie dofinansowanie ze środków publicznych – krajowych i z Komisji Europejskiej). Kształtowanie się wolumenów powyższych strumieni nakładów na B+R w przedsiębiorstwach przemysłowych w grupie V4 w podziale według poziomu zaawansowania technicznego przedstawiono na rysunkach 2 i 3 (agregacja szeregów z sekcji *rd\_e\_berdfundr2* bazy danych Eurostat, w mln euro, stały kurs walutowy, ceny stałe z 2010 roku deflowane indeksem cen CPI).

Należy zauważyć po pierwsze, że dynamika nakładów na B+R jest różna w zależności od źródła finansowania. W przypadku środków z sektora rządowego i zagranicy, zob. rysunek 3., nakłady w dziedzinie wysoko, średniowysoko i średnionisko zaawansowanej techniki charakteryzują się wysokim wzrostem w latach 2008–2012, tj. w okresie w którym dostępne były zatwierdzone krajowe programy operacyjne dla finansowania z budżetu Komisji Europejskiej oraz uruchomiono konkursy na dofinansowanie projektów badawczych. Z kolei w przypadku środków przedsiębiorstw, zob. rysunek 2., wzrost nakładów na B+R zachodzi w okresie 2010–2014 (z wyjątkiem wysoko zaawansowanej techniki).



Rysunek 2. Nakłady na B+R w przedsiębiorstwach przemysłowych ze środków przedsiębiorstw wg poziomu zaawansowania technicznego (w mln euro)

Źródło: opracowanie własne na podstawie bazy danych Eurostat, agregacja danych z klasyfikacji sektorowej, stały kurs walutowy, ceny stałe z roku 2010.



Rysunek 3. Nakłady na B+R w przedsiębiorstwach przemysłowych ze środków sektora rządowego i zagranicy wg poziomu zaawansowania technicznego (w mln euro)

Źródło: opracowanie własne na podstawie bazy danych Eurostat, agregacja danych z klasyfikacji sektorowej, stały kurs walutowy, ceny stałe z roku 2010.



Po drugie, dynamika nakładów na B+R jest różna ze względu na poziom zaawansowania technicznego. W dziedzinie wysoko zaawansowanej techniki zaobserwować można względną stagnację do roku 2012 oraz przeciętnie ujemny wzrost w kolejnych dwóch latach (po zamknięciu konkursów na dofinansowanie projektów badawczych z budżetu Komisji Europejskiej). Dziedziny średniowysoko i średnionisko zaawansowanej techniki cechują się przeciętnie dość trwałym wzrostem nakładów na B+R w latach 2005–2014. Nakłady w dziedzinie nisko zaawansowanej techniki kształtują się odmiennie w zależności od państwa grupy V4 oraz ich źródła.

Po trzecie, jednoznacznie największe nakłady na B+R w dziedzinie wysoko zaawansowanej techniki w przedsiębiorstwach przemysłowych w grupie V4 ponoszone są na Węgrzech (farmaceutyki, elektronika, komunikacja cyfrowa). W dziedzinie średniowysoko zaawansowanej techniki największe nakłady na B+R ponoszone są w Czechach (motoryzacja). Z kolei liderem nakładów na średnionisko i nisko zaawansowaną technikę jest obecnie Polska (chemia spożywcza, chemia materiałów podstawowych, elementy mechaniczne, meble, pozostałe towary konsumpcyjne).

Należy jednak zastrzec, że podobnie jak w przypadku zgłoszeń patentowych, agregacja danych z klasyfikacji sektorowej również i tu nie stanowi w pełni satysfakcjonującej aproksymacji klasyfikacji zaawansowania technicznego. Jednocześnie klasyfikacja nakładów na B+R według dziedzin nauki (zob. Revised Field of Science..., 2007) nie odpowiada klasyfikacji dziedzin techniki wg EPO, a przyjęte dziedziny nauki dotyczą działalności w obszarach o różnym poziomie zaawansowania technicznego (np. elektronika i elektrotechnika).

#### 4. ZGŁOSZENIA PATENTOWE A NAKŁADY NA BADANIA I ROZWÓJ

W analizie mechanizmu kształtującego aktywność wynalazczą przedsiębiorstw przemysłowych państw grupy V4, mierzoną za pomocą liczby zgłoszeń patentowych, przyjęto, że jej podstawową długookresową determinantą są nakłady na badania i rozwój. Postawiono przy tym dwie hipotezy. W pierwszej, stosunkowo oczywistej *a priori*, założono, że długookresowa elastyczność liczby zgłoszeń patentowych względem nakładów na badania i rozwój jest różna w zależności od poziomu zaawansowania technicznego danego obszaru działalności gospodarczej. Zakłada się zatem, że nakłady na badania i rozwój w dziedzinie nisko zaawansowanej techniki prowadzą raczej do zgłoszeń nowych wzorów użytkowych, wzorów przemysłowych i znaków towarowych, niż do zgłoszeń patentowych. Z kolei, nakłady na B+R w dziedzinie wysoko zaawansowanej techniki skutkują relatywnie częściej zgłoszeniami patentowymi.

W drugiej hipotezie założono, że długookresowa elastyczność liczby zgłoszeń patentowych względem nakładów na badania i rozwój może być różna w zależności od ich źródła finansowania (środki własne a dofinansowanie ze środków publicznych w tym z budżetu Komisji Europejskiej). W uzasadnieniu tej hipotezy należy wskazać po pierwsze, że wynalazki uzyskiwane w wyniku prac badawczych mogą być chronione nie tylko za pomocą patentowania, ale również poprzez tajemnicę przedsiębior-

stwa, która w przeciwieństwie do ochrony patentowej nie jest ograniczona w czasie, nie wymaga ujawnienia i nie pociąga za sobą kosztów związanych z ochroną patentową. Założyć należy, że ta forma ochrony dotyczyć może przede wszystkim aktywności wynalazczej finansowanej ze środków własnych. Po drugie, należy przyjąć, że strumień nakładów na B+R ze środków publicznych może częściowo finansować badania, które obciążone są większym ryzykiem niepowodzenia (nieuzyskania wynalazku), i jako takie nie zostałyby zrealizowane ze środków własnych przedsiębiorstw.

W związku z wyżej postawionymi hipotezami oraz biorąc pod uwagę ograniczenia związane z liczebnością próby – roczne dane przekrojowo-czasowe dla lat 2005–2014 i czterech państw Grupy Wyszehradzkiej, zob. rysunki 1a, 2 i 3, rozważono następującą postać związku długookresowego dla aktywności wynalazczej:

$$patepo_{it}^{TL} = const_i^{TL} + \beta_1^{TL} \cdot berdbe_{it}^{TL} + \beta_2^{TL} \cdot berdga_{it}^{TL} + v_{it}, \quad (1)$$

gdzie  $patepo_{it}^{TL}$  oznacza liczbę zgłoszeń patentowych do EPO na danym poziomie zaawansowania technicznego,  $TL = HT, MHT, MLT, LT$  odpowiednio dla: wysoko, średniowysoko, średnionisko, nisko zaawansowanej techniki,  $berdbe_{it}^{TL}$  to nakłady na badania i rozwój przedsiębiorstw na danym poziomie zaawansowania technicznego, finansowane ze środków przedsiębiorstw, tj. głównie środki własne,  $berdga_{it}^{TL}$  to nakłady na B+R przedsiębiorstw na danym poziomie zaawansowania technicznego, finansowane przez sektor rządowy i zagranicę (w tym przez Komisję Europejską), czyli głównie środki publiczne, a  $v_{it}$  oznacza słabostacjonarny składnik losowy związku długookresowego. Małymi literami oznaczono logarytmy zmiennych.

Analiza własności dynamicznych procesów generujących rozważane zmienne, przeprowadzona za pomocą testu stacjonarności Hadriego (2000) i testów pierwiastka jednostkowego Levina, Lina, Chu (2002) oraz Ima, Pesarana, Shina (2003), wskazuje na ich niestacjonarność i zintegrowanie w stopniu pierwszym, tj. w każdym przypadku przynajmniej 2 z 3 testów wskazują na występowanie pierwiastka jednostkowego w procesie, zob. tabelę 2. Jednocześnie brak jest podstaw do wskazania występowania podwójnych pierwiastków jednostkowych.

Tabela 2.

Wnioskowanie o stopniu integracji

| Zmienna             | Hadri          | Levin-Lin-Chu   | Im-Pesaran-Shin |
|---------------------|----------------|-----------------|-----------------|
| $patepo_{it}^{HT}$  | 3,75<br>(0,00) | -1,85<br>(0,03) | -0,40<br>(0,35) |
| $patepo_{it}^{MHT}$ | 3,81<br>(0,00) | -1,08<br>(0,14) | 0,83<br>(0,80)  |
| $patepo_{it}^{MLT}$ | 2,73<br>(0,00) | -0,86<br>(0,20) | -0,45<br>(0,33) |



Tabela 2. (cd.)

| Zmienna             | Hadri          | Levin-Lin-Chu   | Im-Pesaran-Shin |
|---------------------|----------------|-----------------|-----------------|
| $patepo_{it}^{LT}$  | 3,16<br>(0,00) | 4,99<br>(1,00)  | 3,12<br>(1,00)  |
| $berdbe_{it}^{HT}$  | 0,87<br>(0,19) | 0,43<br>(0,67)  | 0,39<br>(0,65)  |
| $berdbe_{it}^{MHT}$ | 3,45<br>(0,00) | -0,53<br>(0,30) | 1,22<br>(0,89)  |
| $berdbe_{it}^{MLT}$ | 3,54<br>(0,00) | 0,96<br>(0,83)  | 0,56<br>(0,71)  |
| $berdbe_{it}^{LT}$  | 3,33<br>(0,00) | 2,55<br>(0,99)  | 1,44<br>(0,93)  |
| $berdga_{it}^{HT}$  | 2,37<br>(0,01) | -1,79<br>(0,04) | 0,16<br>(0,56)  |
| $berdga_{it}^{MHT}$ | 3,35<br>(0,00) | -3,34<br>(0,00) | 0,10<br>(0,54)  |
| $berdga_{it}^{MLT}$ | 3,25<br>(0,00) | -1,07<br>(0,14) | 0,54<br>(0,70)  |
| $berdga_{it}^{LT}$  | 3,22<br>(0,00) | -1,56<br>(0,06) | -2,54<br>(0,01) |

W nawiasach podano graniczne poziomy istotności.

Źródło: opracowanie własne.

Zintegrowanie procesu generującego szereg przekrojowo-czasowy implikuje wykorzystanie metod wnioskowania długookresowego, opartych na zjawisku kointegracji. Z uwagi na ograniczoną liczebność próby przekrojowo-czasowej, ale też potencjalną korelację przekrojową krótko- i długoterminową rozważanych zmiennych, przyjęto dwutorową strategię wnioskowania o związku długookresowym. W pierwszym kroku, zastosowano jednorównaniową analizę kointegracyjną danych panelowych dla wyjściowych danych rocznych (10 lat, 4 kraje), korzystając z faktu, że estymator MNK dla danych panelowych generowanych przez procesy niestacjonarne jest zgodny, a jego wersje – dynamiczna MNK (DOLS), czyli MNK z wyprzedzeniami i opóźnieniami, oraz w pełni zmodyfikowana MNK (FMOLS), tj. MNK z korektą endogeniczności i korelacji seryjnej, cechują się satysfakcjonującymi własnościami małopróbkowymi, zob. Kęłowski (2007, 2009). W drugim kroku, uwzględniając potencjalną korelację przekrojową krótko- i długoterminową zmiennych, zastosowano wielorównaniową analizę kointegracyjną danych panelowych (panelowy wektorowy model korekty błędem – PVEC) dla interpolowanych danych miesięcznych. Jednorównaniową analizę kointegracyjną przeprowadzono w pakiecie Eviews. Analizę wielorównaniową (model PVEC) wykonano na podstawie procedur w języku programowania Gauss (własnych oraz udostępnionych przez J. Lyhagena).

## 4.1. ANALIZA JEDNORÓWNANIOWA

Wnioskowanie o kointegracji w środowisku jednorównaniowym przeprowadzono za pomocą testów Kao (1999) oraz Pedroniego (2004), które stanowią panelowe uogólnienia kointegracyjnych testów pierwiastka jednostkowego typu Dickey'a i Fullera dla składnika losowego weryfikowanego związku. Zastosowano zatem zarówno test oparty na idei panelowego ujednorodniania dla wnioskowania na podstawie szeregu przekrojowo-czasowego (test Kao), jak i testy wyprowadzone dla panelowego uśredniania wnioskowania o szeregach czasowych (testy Pedroniego), zob. tabelę 3.

Tabela 3.

Wnioskowanie o kointegracji, model jednorównaniowy

| Sektor | Kao             | Pedroni<br>wspólny pierwiastek | Pedroni<br>indywidualne pierwiastki |
|--------|-----------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| HT     | -1,39<br>(0,08) | -4,59<br>(0,00)                | -5,22<br>(0,00)                     |
| MHT    | -2,40<br>(0,01) | -3,52<br>(0,00)                | -6,67<br>(0,00)                     |
| MLT    | -3,19<br>(0,00) | -0,56<br>(0,29)                | -0,52<br>(0,30)                     |
| LT     | -1,77<br>(0,04) | -0,97<br>(0,17)                | -2,00<br>(0,02)                     |

W nawiasach podano graniczne poziomy istotności.

Źródło: opracowanie własne.

Test Kao prowadzi do wniosku o występowaniu związku długookresowego na wszystkich poziomach zaawansowania technicznego, przy 10-procentowym poziomie istotności. Z drugiej strony, test Pedroniego typu ADF, prowadzi do wniosku o istnieniu związku długookresowego jedynie w dziedzinie wysoko i średniowysoko zaawansowanej techniki, zarówno przy założeniu wspólnego pierwiastka w hipotezie alternatywnej testu, jak i bez tego założenia. Powyższe wskazania, jakkolwiek oparte na podejściu jednorównaniowym, to jednak łącznie stanowią dość silne wskazanie występowania relacji kointegrującej, przynajmniej na dwóch najwyższych poziomach zaawansowania technicznego.

Wyniki estymacji parametrów związku (1), za pomocą estymatorów dynamicznej MNK (DOLS) oraz MNK z korektą endogeniczności i korelacji seryjnej (FMOLS), są spójne ze wskazaniami testu Pedroniego, potwierdzając istnienie związku długookresowego w dziedzinie wysoko i średniowysoko zaawansowanej techniki, zob. tabelę 4. Należy przy tym zauważyć, że długookresowa elastyczność liczby zgłoszeń patentowych względem nakładów na badania i rozwój jest wyższa, po pierwsze, w przypadku działalności w dziedzinie wysoko zaawansowanej techniki, niż w dzie-

dzinie średniowysoko zaawansowanej techniki, po drugie, w przypadku aktywności badawczej finansowanej ze środków własnych, niż w przypadku badań finansowanych ze środków publicznych, przy czym różnica ta jest statystycznie istotna jedynie dla wysoko zaawansowanej techniki.

Tabela 4.

Wnioskowanie o kointegracji, model jednorównaniowy

| Sektor | Oszacowany związek długookresowy                                                                       | Test Walda ( $\chi^2_2$ )<br>dla hipotezy $\beta_1 = \beta_2$ | Test Jarque-Bera ( $\chi^2_2$ ) |
|--------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| HT     | DOLS                                                                                                   |                                                               |                                 |
|        | $patepo_{it} = const_i + 0,680 \cdot berdbe_{it} + 0,294 \cdot berdga_{it} + ec_{it}$<br>(3,24) (2,75) | 5,03<br>(0,03)                                                | 5,92<br>(0,05)                  |
|        | FMOLS                                                                                                  |                                                               |                                 |
|        | $patepo_{it} = const_i + 0,445 \cdot berdbe_{it} + 0,263 \cdot berdga_{it} + ec_{it}$<br>(3,68) (4,24) | 2,83<br>(0,09)                                                | 5,70<br>(0,06)                  |
| MHT    | DOLS                                                                                                   |                                                               |                                 |
|        | $patepo_{it} = const_i + 0,387 \cdot berdbe_{it} + 0,279 \cdot berdga_{it} + ec_{it}$<br>(2,92) (3,04) | 0,26<br>(0,61)                                                | 3,83<br>(0,15)                  |
|        | FMOLS                                                                                                  |                                                               |                                 |
|        | $patepo_{it} = const_i + 0,383 \cdot berdbe_{it} + 0,261 \cdot berdga_{it} + ec_{it}$<br>(5,39) (5,92) | 1,28<br>(0,26)                                                | 4,32<br>(0,12)                  |

W nawiasach podano graniczne poziomy istotności dla testu Walda i testu Jarque-Bera oraz statystyki typu  $t$  dla ocen związku długookresowego.

Źródło: opracowanie własne.

Należy jednak zastrzec, po pierwsze, że powyższe wyniki oparte są na stosunkowo mało licznej próbie (10 lat, 4 kraje). Po drugie, w powyższej analizie nie wydzielono *explicite* (ze względu na krótką próbę) wpływu zmian kapitału ludzkiego na aktywność wynalazczą, który w przypadku analizy opartej na długiej próbie czasowej powinien zostać uwzględniony.

#### 4.2. ANALIZA WIELORÓWNANIOWA

Postępujący proces umiędzynarodowienia działalności przedsiębiorstw przemysłowych oraz konieczność zachowania nie tylko konkurencyjności cenowej lecz również konkurencyjności technicznej prowadzi do występowania krótko- i długookresowej korelacji przekrojowej zarówno nakładów na badania i rozwój (na danym poziomie zaawansowania technicznego), jak i powstających w ich wyniku wynalazków. Występowanie niezerowej korelacji przekrojowej krótko- i długookresowej prowadzi jednak do utraty efektywności wnioskowania w oparciu o podejście jednorówna-

niowe, w przeciwieństwie do podejścia wielorównaniowego (wektorowego), w którym występowanie krótko- i długookresowej korelacji przekrojowej poprawia własności małopróbkowego wnioskowania. Dlatego też w kolejnym kroku weryfikację istnienia postulowanego związku (1) na poszczególnych poziomach zaawansowania technicznego przeprowadzono za pomocą panelowego wektorowego modelu korekty błędem.

Niech  $\mathbf{y}_{it} = [y_{1it} \ y_{2it} \ \dots \ y_{pit}]'$  oznacza wektor zmiennych w przekroju  $i$  oraz okresie  $t$ , generowanych przez proces wektorowy zintegrowany w stopniu pierwszym, a  $\mathbf{y}_t = [\mathbf{y}'_{1t} \ \mathbf{y}'_{2t} \ \dots \ \mathbf{y}'_{It}]'$  definiuje wektor zmiennych w poszczególnych przekrojach w okresie  $t$ . Wektorowy model panelowy, uwzględniający występowanie krótko- i długookresowej korelacji przekrojowej, można zapisać następująco:

$$\Delta \mathbf{y}_t = \mathbf{\Pi} \mathbf{y}_{t-1} + \sum_{k=1}^{K-1} \mathbf{\Gamma}_k \Delta \mathbf{y}_{t-k} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (2)$$

gdzie  $\mathbf{\Pi}$  oraz  $\mathbf{\Gamma}_k$  są macierzami parametrów o wymiarach  $IP \times IP$ ,  $\Delta \mathbf{y}_t, \dots, \Delta \mathbf{y}_{t-k}$  oznaczają wektory pierwszych przyrostów zmiennych,  $\boldsymbol{\varepsilon}_t = [\boldsymbol{\varepsilon}'_{1t} \ \boldsymbol{\varepsilon}'_{2t} \ \dots \ \boldsymbol{\varepsilon}'_{It}]'$  oraz  $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N_{IP}(\mathbf{0}; \boldsymbol{\Omega})$ . Jeżeli w analizowanym systemie występują związki długookresowe, to możliwa jest dekompozycja macierzy mnożników długookresowych  $\mathbf{\Pi}$  na macierz parametrów związków długookresowych  $\mathbf{B}$  oraz macierz wag  $\mathbf{A}$ . Panelowy wektorowy model korekty błędem (PVEC) można wówczas zapisać następująco (zob. Kęblowski, 2016):

$$\Delta \mathbf{y}_t = \mathbf{A} \mathbf{B}' \mathbf{y}_{t-1} + \sum_{k=1}^{K-1} \mathbf{\Gamma}_k \Delta \mathbf{y}_{t-k} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (3)$$

lub ekwiwalentnie:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{y}_{1t} \\ \Delta \mathbf{y}_{2t} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{y}_{It} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1I} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{I1} & \mathbf{A}_{I2} & \dots & \mathbf{A}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}'_{11} & \mathbf{B}'_{12} & \dots & \mathbf{B}'_{1I} \\ \mathbf{B}'_{21} & \mathbf{B}'_{22} & \dots & \mathbf{B}'_{2I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}'_{I1} & \mathbf{B}'_{I2} & \dots & \mathbf{B}'_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{1,t-1} \\ \mathbf{y}_{2,t-1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{I,t-1} \end{bmatrix} + \\ &+ \sum_{k=1}^{K-1} \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_{11,k} & \mathbf{\Gamma}_{12,k} & \dots & \mathbf{\Gamma}_{1I,k} \\ \mathbf{\Gamma}_{21,k} & \mathbf{\Gamma}_{22,k} & \dots & \mathbf{\Gamma}_{2I,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{\Gamma}_{I1,k} & \mathbf{\Gamma}_{I2,k} & \dots & \mathbf{\Gamma}_{II,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{y}_{1,t-k} \\ \Delta \mathbf{y}_{2,t-k} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{y}_{I,t-k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{1t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{2t} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{It} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie macierz wariancji-kowariancji wielowymiarowego składnika losowego dana

jest jako  $\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{11} & \boldsymbol{\Omega}_{12} & \dots & \boldsymbol{\Omega}_{1I} \\ \boldsymbol{\Omega}_{21} & \boldsymbol{\Omega}_{22} & \dots & \boldsymbol{\Omega}_{2I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\Omega}_{I1} & \boldsymbol{\Omega}_{I2} & \dots & \boldsymbol{\Omega}_{II} \end{bmatrix}$ .

Podjęcie wielorównaniowe uwzględnia zatem występowanie: (i) międzyprzekrojowego wpływu wielowymiarowego składnika losowego, (ii) międzyprzekrojowych związków dynamiki krótkookresowej, (iii) międzyprzekrojowych związków mechanizmów korekty błędem oraz potencjalnie (iv) międzyprzekrojowych związków długookresowych. Występowanie powyższych zależności w procesie generującym szereg przekrojowo czasowy implikuje istnienie krótko- i długookresowej korelacji przekrojowej.

W analizie aktywności wynalazczej założyć można brak występowania międzyprzekrojowych związków długookresowych. Przyjmuje się bowiem, że wydatki przedsiębiorstw z danego kraju na badania i rozwój przełożą się w długim okresie na zgłoszenia patentowe z przedsiębiorstw tego samego kraju. Zatem struktura macierzy związków długookresowych ma postać blokowo-diagonalną:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{22} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{B}_{II} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

W przypadku blokowo-diagonalnej struktury macierzy związków długookresowych w modelu PVEC zasadne może być postawienie i weryfikowanie hipotezy o wspólnej przestrzeni kointegrującej dla wszystkich przekroi:  $H_0 : \mathbf{B}_{11} = \mathbf{B}_{22} = \dots = \mathbf{B}_{II}$ . Macierz

wektorów kointegrujących ma wówczas postać  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{II} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{II} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{B}_{II} \end{bmatrix}$ , a model PVEC można zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{y}_{1t} \\ \Delta \mathbf{y}_{2t} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{y}_{It} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1I} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{I1} & \mathbf{A}_{I2} & \cdots & \mathbf{A}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}'_{II} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}'_{II} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{B}'_{II} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{1,t-1} \\ \mathbf{y}_{2,t-1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{I,t-1} \end{bmatrix} + \\ + \sum_{k=1}^{K-1} \begin{bmatrix} \Gamma_{11,k} & \Gamma_{12,k} & \cdots & \Gamma_{1I,k} \\ \Gamma_{21,k} & \Gamma_{22,k} & \cdots & \Gamma_{2I,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{I1,k} & \Gamma_{I2,k} & \cdots & \Gamma_{II,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{y}_{1,t-k} \\ \Delta \mathbf{y}_{2,t-k} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{y}_{I,t-k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{1t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{2t} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{It} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

z niezmienną strukturą macierzy wariancji-kowariancji składnika losowego.

Ze względu na wymiar modelu (3), wnioskowanie o występowaniu związku długookresowego przeprowadzono oddzielnie dla poszczególnych poziomów zaawansowania techniki. Założono zatem, że krótko- i długookresowa korelacja przekrojowa dotyczy przede wszystkim obszarów działalności o zbliżonym poziomie zaawansowania technicznego.

W pierwszym kroku weryfikowano występowanie wspólnego rzędu kointegracji dla danego poziomu zaawansowania techniki. Weryfikowano zatem hipotezę zerową  $H_0 : rz(\Pi_{ii}) = R_i \leq R$  dla  $i = 1, 2, \dots, I$  przeciwko  $H_1 : rz(\Pi_{ii}) = P$  dla  $i = 1, 2, \dots, I$  za pomocą statystyki ilorazu wiarygodności, która przy prawdziwości hipotezy zerowej dąży asymptotycznie do złożenia rozkładu  $\chi^2$  i rozkładu typu Dickey'a-Fullera:

$$LR \xrightarrow{d} \chi^2_{I(I-1)R(P-R)} + \text{tr} \left( \int_0^1 d\mathbf{W}\mathbf{W}' \left[ \int_0^1 \mathbf{W}\mathbf{W}' du \right]^{-1} \int_0^1 \mathbf{W} d\mathbf{W}' \right) \quad (7)$$

gdzie  $T \rightarrow \infty$ , dla ustalonego  $I$ ,

gdzie  $\mathbf{W}$  to  $I(P-R)$ -wymiarowy ruch Browna, a symbol  $\xrightarrow{d}$  oznacza zbieżność według rozkładu, zob. Larsson and Lyhagen (2007).

W przypadku zidentyfikowania wspólnego rzędu kointegracji, w drugim kroku badano zasadność hipotezy o wspólnej przestrzeni kointegrującej dla wszystkich przekroi:  $H_0 : \mathbf{B}_{11} = \mathbf{B}_{22} = \dots = \mathbf{B}_{II}$  za pomocą statystyki ilorazu wiarygodności, która przy prawdziwości hipotezy zerowej dąży asymptotycznie do rozkładu  $\chi^2$ :

$$LR \xrightarrow{d} \chi^2_{(I-1)R(P-R)} \quad \text{gdzie } T \rightarrow \infty, \text{ dla ustalonego } I, \quad (8)$$

zob. Larsson and Lyhagen (2007).

Wyniki przedstawione w tabeli 5 wskazują, że dla dziedziny wysoko zaawansowanej techniki istnieje wspólny rząd kointegracji równy 1 (przy uwzględnieniu poprawki Bartletta dla statystyki ilorazu wiarygodności –  $LR^{BC}$ ) dla panelu państw grupy V4. Jednakże hipoteza o wspólnej przestrzeni kointegrującej dla wszystkich przekroi (wspólnego wektora kointegrującego dla  $R = 1$ ) jest odrzucana przy 5% poziomie istotności. Usunięcie z panelu danych Słowacji, która cechuje się niewielką liczbą zgłoszeń patentowych, pozwala jednak na zidentyfikowanie wspólnego związku długookresowego dla Czech, Węgier i Polski. Należy zauważyć, że nakłady na badania i rozwój pochodzące zarówno ze środków własnych, jak i z dofinansowania publicznego, wywierają istotny wpływ na liczbę zgłoszeń patentowy, przy czym ocena długookresowej elastyczności względem nakładów na badania i rozwój pochodzących ze środków własnych jest wyższa, choć dla danej mało licznej próby i precyzji szacunku różnica ta nie jest istotna statystycznie przy 10% poziomie istotności.

Tabela 5.

Wnioskowanie o strukturze długookresowej, model PVEC,  
wysoko zaawansowana technika

| Wspólny rząd kointegracji (CZ, HU, PL, SK)                                    |         |           |        |
|-------------------------------------------------------------------------------|---------|-----------|--------|
| $H_0$                                                                         | $LR$    | $LR^{BC}$ | $c.v.$ |
| $R = 0$                                                                       | 5502,83 | 1963,27   | 307,00 |
| $R = 1$                                                                       | 286,25  | 137,08    | 169,15 |
| Wspólny wektor kointegrujący (CZ, HU, PL, SK)                                 |         |           |        |
| $H_0$                                                                         | $LR$    | $p.val.$  |        |
| $\mathbf{B}_{11} = \mathbf{B}_{22} = \mathbf{B}_{33} = \mathbf{B}_{44}$       | 38,52   | 0,03      |        |
| Wspólny rząd kointegracji (CZ, HU, PL)                                        |         |           |        |
| $H_0$                                                                         | $LR$    | $LR^{BC}$ | $c.v.$ |
| $R = 0$                                                                       | 4149,39 | 1535,40   | 177,49 |
| $R = 1$                                                                       | 207,01  | 93,65     | 97,38  |
| Wspólny wektor kointegrujący (CZ, HU, PL)                                     |         |           |        |
| $H_0$                                                                         | $LR$    | $p.val.$  |        |
| $\mathbf{B}_{11} = \mathbf{B}_{22} = \mathbf{B}_{33}$                         | 17,21   | 0,14      |        |
| $patepo_u = const_i + 0,489_{(3,47)}berdbe_u + 0,396_{(2,29)}berdga_u + ec_u$ |         |           |        |

W nawiasach podano statystyki typu  $t$  dla ocen związku długookresowego,  $c.v.$  oraz  $p.val.$  oznaczają odpowiednio: symulowaną wartość krytyczną oraz graniczny poziom istotności.

Źródło: opracowanie własne.

Wyniki dla średniowysoko zaawansowanej techniki, zob. tabelę 6., prowadzą do zbliżonego wniosku. Zidentyfikowano istnienie wspólnego rzędu kointegracji równego 1, przy czym dla panelu ograniczonego do Czech, Węgier i Polski potwierdzono istnienie wspólnego mechanizmu długookresowego, którego parametry również wskazują na nieznacznie wyższą długookresową elastyczność względem nakładów na B+R finansowanych ze środków własnych, choć ponownie różnica ta nie jest istotna statystycznie.

Tabela 6.

Wnioskowanie o strukturze długookresowej, model PVEC,  
średniowysoko zaawansowana technika

| Wspólny rząd kointegracji (CZ, HU, PL, SK)                                                |         |           |        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|---------|-----------|--------|
| $H_0$                                                                                     | $LR$    | $LR^{BC}$ | $c.v.$ |
| $R = 0$                                                                                   | 7187,00 | 2612,59   | 307,00 |
| $R = 1$                                                                                   | 375,63  | 159,03    | 169,15 |
| Wspólny wektor kointegrujący (CZ, HU, PL, SK)                                             |         |           |        |
| $H_0$                                                                                     | $LR$    | $p.val.$  |        |
| $\mathbf{B}_{11} = \mathbf{B}_{22} = \mathbf{B}_{33} = \mathbf{B}_{44}$                   | 81,64   | 0,00      |        |
| Wspólny rząd kointegracji (CZ, HU, PL)                                                    |         |           |        |
| $H_0$                                                                                     | $LR$    | $LR^{BC}$ | $c.v.$ |
| $R = 0$                                                                                   | 4733,13 | 2092,03   | 177,49 |
| $R = 1$                                                                                   | 185,20  | 78,41     | 97,38  |
| Wspólny wektor kointegrujący (CZ, HU, PL)                                                 |         |           |        |
| $H_0$                                                                                     | $LR$    | $p.val.$  |        |
| $\mathbf{B}_{11} = \mathbf{B}_{22} = \mathbf{B}_{33}$                                     | 12,75   | 0,39      |        |
| $patepo_{it} = const_i + 0,406_{(5,05)}berdbe_{it} + 0,357_{(4,87)}berdga_{it} + ec_{it}$ |         |           |        |

W nawiasach podano statystyki typu  $t$  dla ocen związku długookresowego,  $c.v.$  oraz  $p.val.$  oznaczają odpowiednio: symulowaną wartość krytyczną oraz graniczny poziom istotności.

Źródło: opracowanie własne.

W przypadku dziedziny średnionisko oraz nisko zaawansowanej techniki nie stwierdzono występowania wspólnego rzędu kointegracji (a zatem również wspólnego związku długookresowego), co jest spójne z wynikami analizy jednorównaniowej. W konsekwencji należy przyjąć, że nakłady na badania i rozwój w nisko i średnionisko zaawansowanej technice nie determinują jednoznacznie (ograniczonej) aktywności wynalazczej w tych dziedzinach, tak jak to zachodzi w przypadku dziedzin wysoko i średniowysoko zaawansowanej techniki.



## 5. PODSUMOWANIE

W artykule analizowano związek aktywności wynalazczej w przedsiębiorstwach przemysłowych państw Grupy Wyszehradzkiej, mierzonej za pomocą liczby zgłoszeń do Europejskiego Urzędu Patentowego, z wielkością nakładów na badania i rozwój ponoszonych na poszczególnych poziomach zaawansowania technicznego. Analizę przeprowadzono dla czterostopniowej klasyfikacji zaawansowania technicznego, zaproponowanej przez Hatzichronoglou (1997). Rozważono również, czy rodzaj źródła nakładów na B+R (środki własne, dofinansowanie publiczne) ma wpływ na wynik działalności wynalazczej, tj. na liczbę zgłoszeń patentowych.

Wyniki jedno- i wielorównaniowej analizy kointegracyjnej wskazują, po pierwsze, że długookresowa elastyczność liczby zgłoszeń patentowych względem nakładów na badania i rozwój jest wyższa w przypadku działalności w dziedzinie wysoko zaawansowanej techniki, niż w dziedzinie średniowysoko zaawansowanej techniki. Z kolei, w przypadku średnionisko i nisko zaawansowanej techniki, nakłady na badania i rozwój nie determinują jednoznacznie liczby zgłoszeń patentowych. Po drugie, stosując jednorównaniową analizę kointegracyjną stwierdzono występowanie wyższej elastyczności liczby zgłoszeń patentowych w dziedzinie wysoko zaawansowanej techniki w przypadku aktywności badawczej finansowanej ze środków własnych, niż w przypadku badań finansowanych ze środków publicznych. Należy jednak zastrzec, że z uwagi na ograniczony zakres czasowy danych, powyższe wnioski mogą być jednak specyficzne dla rozważanych metod oraz mało licznej próby i wymagają potwierdzenia dla szeregów o większej liczbie obserwacji w wymiarze czasowym.

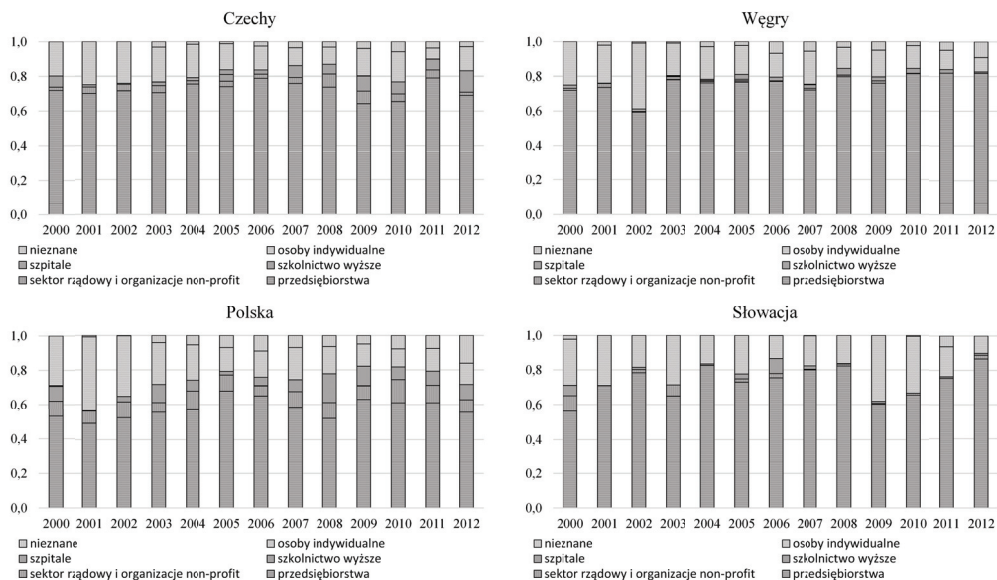
Należy zauważyć, że przeprowadzone badanie może być w przyszłości rozszerzone, przede wszystkim poprzez oddzielne uwzględnienie nakładów na B+R ponoszonych na personel badawczy oraz aparaturę i pozostałe koszty. Po drugie, dłuższe próby powinny móc pozwolić na uwzględnienie zmian poziomowi wiedzy personelu badawczego, tj. zmian kapitału ludzkiego.

## LITERATURA

- Griliches Z., (1990), Patent Statistics as Economic Indicators: A Survey, *Journal of Economic Literature*, 28 (4), 1661–1707.
- Hadri K., (2000), Testing for Stationarity in Heterogeneous Panel Data, *Econometrics Journal*, 3, 148–161.
- Hatzichronoglou T., (1997), Revision of the High-Technology Sector and Product Classification, *OECD Science, Technology and Industry Working Papers*, 1997/02.
- Heller J., Bogdański M., (2005), Nakłady na badania i rozwój w Polsce na tle wybranych państw europejskich, *Studia Regionalne i Lokalne*, 4 (22), 59–76.
- High-tech Aggregation by NACE Rev. 2*, ec.europa.eu/eurostat/cache/metadata/Annexes/ htec\_esms\_an3.pdf, Eurostat.
- Im K. S., Pesaran M. H., Shin Y., (2003), Testing for Unit Roots in Heterogeneous Panels, *Journal of Econometrics*, 115, 53–74.

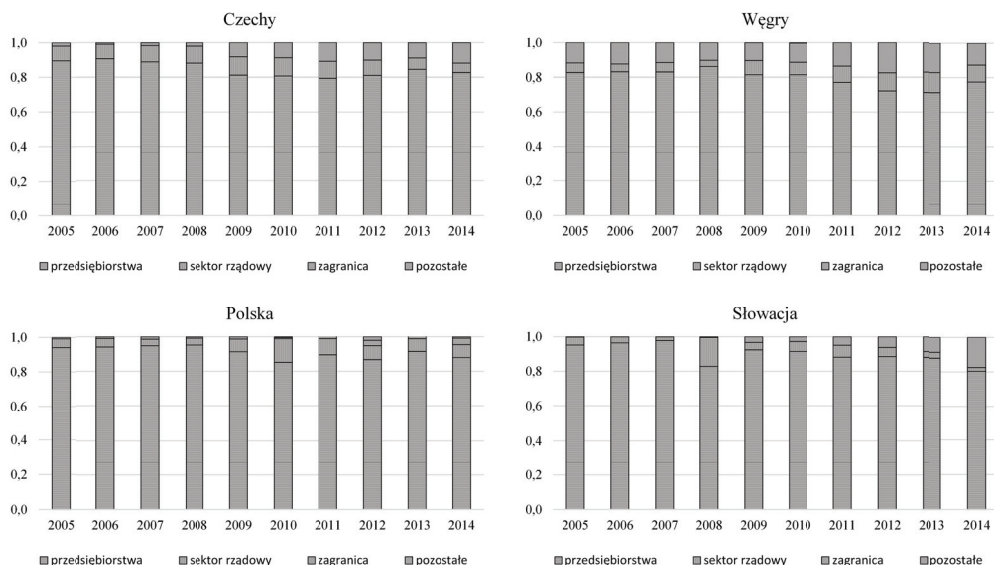
- Kao C., (1999), Spurious Regression and Residual-Based Tests for Cointegration in Panel Data, *Journal of Econometrics*, 90, 1–44.
- Kębłowski P., (2007), Modelowanie zintegrowanych szeregów przekrojowo-czasowych, w: W. Welfe (red.), *Gospodarka oparta na wiedzy*, PWE, Warszawa.
- Kębłowski P., (2009), Modelling Integrated Panel Data: An Overview, w: Welfe W., (red.), *Knowledge-based Economics*, Peter Lang, Frankfurt.
- Kębłowski P., (2011), The Behaviour of Exchange Rates in the Central European Countries and Credit Default Risk Premiums, *Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics*, 3, 221–236.
- Kębłowski P., (2016), Canonical Correlation Analysis in Panel Vector Error Correction Model. Performance Comparison, *Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics*, 8, 203–217.
- Larsson R., Lyhagen J., (2007), Inference in Panel Cointegration Models with Long Panels, *Journal of Business & Economic Statistics*, 25 (4), 473–483.
- Levin A., Lin C.-F., Chu C.-S. J., (2002), Unit Root Tests in Panel Data: Asymptotic and Finite-Sample Properties, *Journal of Econometrics*, 108, 1–24.
- Okoń-Horodyńska E., Sierotowicz T., Wisła R., (2012), *Pomiar aktywności patentowej gałęzi gospodarki z wykorzystaniem tablic konkordancyjnych*, PTE, Warszawa.
- Pedroni P., (2004), Panel Cointegration: Asymptotic and Finite Sample Properties of Pooled Time Series Tests with an Application to the PPP Hypothesis, *Econometric Theory*, 20, 597–625.
- Revised Field of Science and Technology (FOS) Classification in the Frascati Manual*, (2007), [www.oecd.org/science/inno/38235147.pdf](http://www.oecd.org/science/inno/38235147.pdf), OECD.
- Schmoch U., (2008), *Concepts of a Technology Classification for Country Comparisons*, Faunhofer Institute for Systems and Innovation Research, Karlsruhe.
- Szajt M., (2015), Przestrzenne zróżnicowanie w finansowaniu działalności B+R jako miara potencjału innowacyjnego, *Prace naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu*, 392, 119–128.
- Szajt M., (2016), Przestrzenno-czasowa analiza aktywności patentowej regionów Unii Europejskiej, *Prace Komisji Geografii Przemysłu Polskiego Towarzystwa Geograficznego*, 30, 91–104.
- Szczygielski K., Grabowski W., Pamukcu M. T., Tandogan V. S., (2015), Does Government Support for Private Innovation Matter? Firm-Level Evidence from Two Catching-up Countries, *Research Policy*, 46, 219–237.
- Świeczewska I., (2007), Łączna produktywność czynników produkcji. Ucieleśniony kapitał wiedzy, w: Welfe W., (red.), *Gospodarka oparta na wiedzy*, PWE, Warszawa.
- Świeczewska I., (2009), Total Factor Productivity. The Embodied Capital of Knowledge, w: Welfe W., (red.), *Knowledge-Based Economics*, Peter Lang, Frankfurt.
- Welfe W., (2007), Przesłanki modelowania gospodarki opartej na wiedzy, w: Welfe W., (red.), *Gospodarka oparta na wiedzy*, PWE, Warszawa.
- Welfe W., (2009), The Foundations of Modelling a Knowledge-Based Economy, w: Welfe W., (red.), *Knowledge-Based Economics*, Peter Lang, Frankfurt.

# ANEKS



Rysunek A1. Struktura zgłoszeń patentowych w EPO wg sektorów instytucjonalnych

Źródło: opracowanie własne na podstawie bazy danych Eurostat.



Rysunek A2. Struktura nakładów na B+R przedsiębiorstw przemysłowych wg źródeł finansowania

Źródło: opracowanie własne na podstawie bazy danych Eurostat.

## INNOWACYJNOŚĆ PRZEDSIĘBIORSTW PRZEMYSŁOWYCH PAŃSTW GRUPY WYSZEHRADZKIEJ A NAKŁADY NA BADANIA I ROZWÓJ

### Streszczenie

W artykule przedstawiono wyniki badania związku aktywności wynalazczej przedsiębiorstw przemysłowych państw Grupy Wyszehradzkiej, mierzonej za pomocą liczby zgłoszeń do Europejskiego Urzędu Patentowego, z wielkością nakładów na badania i rozwój ponoszonych w obszarach działalności gospodarczej o różnym poziomie zaawansowania technicznego. Wyniki jedno- i wielorównaniowej analizy kointegracyjnej danych panelowych dla lat 2005–2014 wskazują, że długookresowa elastyczność liczby zgłoszeń patentowych względem nakładów na badania i rozwój jest wyższa, po pierwsze, w przypadku działalności w dziedzinie wysoko zaawansowanej techniki, niż w dziedzinie średniowysoko zaawansowanej techniki, po drugie, w dziedzinie wysoko zaawansowanej techniki dla aktywności badawczej finansowanej ze środków własnych, niż w przypadku badań finansowanych ze środków publicznych. Stwierdzono również, że w przypadku średnionisko i nisko zaawansowanej techniki, nakłady na badania i rozwój nie determinują jednoznacznie liczby zgłoszeń patentowych.

**Słowa kluczowe:** innowacyjność, zgłoszenia patentowe, poziom zaawansowania technicznego, nakłady na badania i rozwój

## INNOVATIVENESS OF INDUSTRIAL ENTERPRISES OF THE VISEGRAD GROUP AND THE EXPENDITURES ON RESEARCH AND DEVELOPMENT

### Abstract

In the article the relationship between the inventive activity of the Visegrad Group industrial enterprises and the research and development outlays is investigated. The analysis is conducted for different levels of technological sophistication (high, medium-high, medium-low, low) and patent applications to the European Patent Office are used as a measure of the inventive activity. The results of uni- and multivariate panel cointegration analysis of the yearly data from 2005 to 2014 point out that the long-run elasticity of patent applications to R&D outlays is higher, firstly, for high-technology economic activity than for medium-high, and secondly, for research activity within high-technology level financed from own resources, rather than by public funds. It was also found that in the case of medium-low and low technology level, the R&D outlays do not uniquely determine the number of patent applications.

**Keywords:** innovativeness, patent applications, technology level, R&D outlays

IWONA MÜLLER-FRĄCZEK<sup>1</sup>

## PROPOZYCJA MIARY SYNTETYCZNEJ

## 1. WSTĘP

Analiza wielu zagadnień życia społeczno-gospodarczego wymaga uporządkowania liniowego obiektów wielocechowych. Jedną z możliwości rozwiązania tego problemu jest wykorzystanie zmiennych syntetycznych, które są jednowymiarowym obrazem niemierzalnego zjawiska złożonego, reprezentowanego przez wiele zmiennych diagnostycznych. Sztuką jest skonstruowanie „dobrej” zmiennej syntetycznej, a nauka polska ma ogromne osiągnięcia w tej dziedzinie.

Po pionierskiej propozycji Hellwiga (1968) powstało wiele jej rozwinięć, jak również nowatorskich pomysłów. Wśród nich warto wymienić prace (chronologicznie): Cieślak (1974), Dittmann, Pisz (1975), Bartosiewicz (1976), Pluta (1976), Nowak (1977), Strahl (1978), Panek (1984), Jajuga (1986), Lira i inni (2002), Strahl (2006), Strahl, Markowska (2008), Młodak (2009), Walesiak (2011), Wydymus (2013), Pietrzak (2014).

Początkowo miary syntetyczne stosowano do badania poziomu rozwoju gospodarczego obiektów, stąd ich nazwa mierniki rozwoju. Z czasem zaczęto je wykorzystywać do charakteryzowania innych zjawisk złożonych.

Celem artykułu było zaproponowanie nowej metody konstrukcji zmiennej syntetycznej. Aby ocenić poziom rozwoju obiektu, analizowano jego odległość od wzorca (antywzorca) względem sumy odległości od wzorca (antywzorca) innych obiektów. W ten sposób scharakteryzowano obiekt na tle wszystkich pozostałych<sup>2</sup>. Powstała w ten sposób miara jest ograniczona. Zmienne diagnostyczne nie wymagają normalizacji ani zamiany na stymulanty. Podstawową jej zaletą jest porównywalność analiz prowadzonych dla różnych lat.

Zaproponowaną metodę zilustrowano badaniem empirycznym dotyczącym stanu ochrony środowiska. Wartości miar porównano z wynikami otrzymanymi na podstawie

---

<sup>1</sup> Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania, Katedra Ekonometrii i Statystyki, ul. Gagarina 13a, 87-100 Toruń, Polska, e-mail: muller@econ.umk.pl.

<sup>2</sup> W pracy Wydymusa (2013) przedstawiono inną metodę odzwierciedlenia w zmiennej syntetycznej wpływu wszystkich obiektów na sytuację obiektu badanego. Dla każdej cechy analizowano ilorazy jej wartości dla różnych obiektów. Powstałe w ten sposób macierze zrelatywizowanych wskaźników były podstawą konstrukcji miernika.

najbardziej rozpowszechnionej metody wzorcowej – Hellwiga. Były one podobne, ale nie tożsame.

W kolejnym kroku porównano obie metody pod względem poprawności. Co ciekawe w różnych analizowanych aspektach wyraźną przewagę uzyskiwała zawsze jedna z metod.

## 2. KONSTRUKCJA MIERNIKA

Założmy, że dany jest zestaw zmiennych diagnostycznych charakteryzujących badane zjawisko, który spełnia zarówno kryteria merytoryczne jak i statystyczne. W zestawie tym mogą występować stymulanty, destymulanty oraz nominanty, dla których znana jest wartość nominalna. Proponowana w artykule miara syntetyczna składa się z dwóch części. Jedna z nich charakteryzuje obiekt względem wzorca, druga – antywzorca.

Oznaczmy przez  $x_{ip}$  wartość  $p$ -tej zmiennej ( $p = 1, \dots, r$ ) dla  $i$ -tego obiektu ( $i = 1, \dots, n$ ). Oznaczmy przez  $S$ ,  $D$  oraz  $N$  zbiory indeksów odpowiednio dla stymulant, destymulant oraz nominant.

Przyjmijmy jednakowy dla wszystkich obiektów wzorzec  $(x_1^+, x_2^+, \dots, x_r^+)$  postaci:

$$x_p^+ = \begin{cases} \max_i x_{ip} & \text{dla } p \in S, \\ \min_i x_{ip} & \text{dla } p \in D, \\ x_p^{nom} & \text{dla } p \in N. \end{cases} \quad (1)$$

Określmy również antywzorzec  $(x_1^-, x_2^-, \dots, x_r^-)$ . W przypadku, gdy w zestawie cech nie ma nominant, będzie on miał jednoznaczną postać dla wszystkich obiektów:

$$x_p^- = \begin{cases} \min_i x_{ip} & \text{dla } p \in S, \\ \max_i x_{ip} & \text{dla } p \in D. \end{cases}$$

Natomiast, gdy w zestawie cech występuje nominanta, dzielimy obiekty na dwie grupy względem wartości nominalnej i określimy antywzorzec inaczej dla każdej grupy:

$$x_p^- = \begin{cases} \min_i x_{ip} & \text{dla } p \in N \wedge x_{ip} < x_p^{nom}, \\ \max_i x_{ip} & \text{dla } p \in N \wedge x_{ip} > x_p^{nom}. \end{cases}$$

W przypadku obiektu, dla którego cecha osiąga dokładnie wartość nominalną, za antywzorcową przyjmujemy wartość, która jest od niego najbardziej odległa.

Popularne metody wzorcowe różnią się zarówno sposobem wyboru wzorca, jak i metodą agregacji zmiennych. Jednak najczęściej wykorzystuje się różne wer-

sje pomiaru odległości obiektu od wzorca w wielowymiarowej przestrzeni cech. Proponowana metoda konstrukcji oparta jest na analizie jednowymiarowej.

W przestrzeni  $p$ -tej zmiennej diagnostycznej rozważmy udział odległości od wzorca  $i$ -tego obiektu w łącznej odległości od wzorca wszystkich obiektów:

$$m_{ip}^+ = \frac{|x_{ip} - x_p^+|}{\sum_{j=1}^n |x_{jp} - x_p^+|} \quad \text{dla } p \in S \cup D \cup N.$$

Podobnie określamy:

$$m_{ip}^- = \begin{cases} \frac{|x_{ip} - x_p^-|}{\sum_{j=1}^n |x_{jp} - x_p^-|} & \text{dla } p \in S \cup D, \\ \frac{n_{ip}}{n} \cdot \frac{|x_{ip} - x_p^-|}{\sum_j |x_{jp} - x_p^-|} & \text{dla } p \in N. \end{cases}$$

Występująca w wersji dla nominant wielkość  $n_{ip}$  oznacza liczbę obiektów, które mają tę co obiekt  $i$  wartość antywzorcową. Tylko te obiekty bierzemy pod uwagę przy sumowaniu w mianowniku tego wzoru.

Zauważmy, że sytuacja obiektu jest tym lepsza, im niższa jest wielkość  $m_{ip}^+$  oraz im wyższe jest  $m_{ip}^-$ . Oznaczmy ich średnie wartości:

$$m_i^+ = -\frac{1}{r} \sum_{p=1}^r m_{ip}^+,$$

$$m_i^- = \frac{1}{r} \sum_{p=1}^r m_{ip}^-.$$

Należy podkreślić, że miary  $m_i^+$  oraz  $m_i^-$  charakteryzują „położenie” obiektu nie tylko indywidualnie względem wzorca czy antywzorca, ale odzwierciedlają jego sytuację na tle wszystkich analizowanych obiektów. W przypadku większości tego typu konstrukcji wpływ sytuacji innych obiektów na wartość miary syntetycznej jest niewielki, uwzględniony wyłącznie w postaci parametrów rozkładu wykorzystanych do normalizacji cech.

Ostatecznie miernik rozwoju  $i$ -tego obiektu definiujemy w postaci:

$$m_i = \frac{1 + m_i^- + m_i^+}{2}. \quad (2)$$



## 3. WŁASNOŚCI MIARY

Miara syntetyczna opisana formułą (2) spełnia wymagany dla tego typu konstrukcji postulat – poziom rozwoju obiektu jest tym wyższy, im większa jest wartość miernika. Miara ta jest niemianowana i ograniczona do przedziału  $[0,1]$ . Jej średnia wartość nie zależy od konkretnych danych, zawsze wynosi 0,5. Porównywanie mierników z tą wielkością posiada intuicyjną interpretację. Jeśli wartość miernika jest większa od 0,5 oznacza to, że obiektowi jest relatywnie (tzn. na tle innych obiektów) bliżej do wzorca niż antywzorca, natomiast wartości miernika mniejsze od 0,5 świadczą o tym, że obiekt relatywnie leży bliżej antywzorca niż wzorca.

Główną zaletą opisanej konstrukcji jest porównywalność wyników w czasie. Wzrost wartości miernika świadczy o tym, że na tle wszystkich obiektów sytuacja badanej jednostki uległa poprawie, natomiast spadek informuje o pogorszeniu jej sytuacji.

Inne własności:

1.  $m_i^- \in [0,1]$ .
2.  $m_i^+ \in [-1,0]$ .
3.  $\sum_{i=1}^n m_i^- = 1$ .
4.  $\sum_{i=1}^n m_i^+ = -1$ .
5.  $\overline{m^-} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i^- = \frac{1}{n}$ .
6.  $\overline{m^+} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i^+ = -\frac{1}{n}$ .
7.  $\sum_{i=1}^n m_i = \frac{n}{2}$ .

Przypadki szczególne:

1. Miara  $m_i^+$  przyjmuje największą wartość równą 0, gdy dla wszystkich zmiennych diagnostycznych obiekt  $i$  był wzorcem.
2. Miara  $m_i^-$  przyjmuje najmniejszą wartość równą 0, gdy dla wszystkich zmiennych diagnostycznych obiekt  $i$  był antywzorcem.
3. Miary  $m_i^+$  oraz  $m_i^-$  nie mogą jednocześnie być zerami.
4.  $m_i^+ = -1$ , gdy dla wszystkich zmiennych tylko obiekt  $i$  nie jest wzorcem.
5.  $m_i^- = 1$ , gdy dla wszystkich zmiennych tylko obiekt  $i$  jest antywzorcem.

Należy podkreślić, że proponowana konstrukcja nie opiera się bezpośrednio na zmiennych diagnostycznych, lecz na wielkościach  $m_{ip}^+$  oraz  $m_{ip}^-$ . Ponieważ są one porównywalne (niemianowane i ograniczone do tego samego przedziału), nie zachodzi potrzeba normalizacji zmiennych diagnostycznych<sup>3</sup>. Ponadto konstrukcja ma dwie inne zalety techniczne:

- nie ma potrzeby przekształcania destymulant na stymulanty,
- cecha może przyjmować wartość 0.

<sup>3</sup> Normalizacja zmiennych jest szczególnie dyskusyjna w przypadku analiz prowadzonych w różnych latach. Sprowadzenie zmiennych do porównywalności może powodować na przykład utratę unormowania miary syntetycznej. Niektóre problemy związane z normalizacją rozwiązuje wykorzystanie tzw. mediany Webera (por. Lira i inni, 2002). Więcej formuł normalizacyjnych można znaleźć np. w pracy Walesiaka (2014).



## 4. SYNTETYCZNA ANALIZA STANU OCHRONY ŚRODOWISKA W POLSCE

W celu ilustracji przydatności zaproponowanej konstrukcji miary syntetycznej analizowano zróżnicowanie województw pod względem stanu ochrony środowiska w latach 2006–2015. Badanie przeprowadzono w oparciu o dane dostępne w statystyce publicznej (Bank Danych Lokalnych). Wstępny zestaw zmiennych diagnostycznych charakteryzujących stan ochrony środowiska dobrano na podstawie pracy Młodaka (2006). Były to:

1. ścieki odprowadzone bezpośrednio do wód lub do ziemi w  $\text{dm}^3$  na  $1 \text{ km}^2$  ( $D_1$ ),
2. udział ścieków oczyszczonych w ściekach wymagających oczyszczenia ( $S_2$ ),
3. emisja pyłowych zanieczyszczeń powietrza na  $1 \text{ km}^2$  w tonach na rok ( $D_3$ ),
4. emisja gazowych zanieczyszczeń powietrza na  $1 \text{ km}^2$  w tonach na rok,
5. pyłowe zanieczyszczenia zatrzymane lub zneutralizowane w urządzeniach do redukcji zanieczyszczeń w % zanieczyszczeń wytworzonych,
6. gazowe zanieczyszczenia zatrzymane lub zneutralizowane w urządzeniach do redukcji zanieczyszczeń w % zanieczyszczeń wytworzonych ( $S_4$ ),
7. odpady wytworzone w ciągu roku na jednego mieszkańca w tonach ( $D_5$ ),
8. odpady wykorzystane i unieszkodliwione w % wytworzonych,
9. wskaźnik lesistości w % ( $S_6$ ),
10. powierzchnia obszarów prawnie chronionych w % powierzchni ogółem ( $S_7$ ),
11. nakłady inwestycyjne na ochronę środowiska i gospodarkę wodną w % powierzchni ogółem ( $S_8$ ),
12. ludność obsługiwana przez oczyszczalnie ścieków w % ludności ogółem ( $S_9$ ).

Po przeprowadzeniu analizy zmiennościowo-korelacyjnej wstępny zestaw zmiennych zredukowano do dziewięciu, wśród których znalazło się sześć stymulant (oznaczono je w spisie literą S) oraz trzy destymulanty (oznaczone literą D).

Wyselekcjonowane zmienne były podstawą wyznaczenia miar opisanych wzorem (2). Wartości obliczonych mierników dla poszczególnych lat oraz odpowiadające im pozycje w rankingach przedstawiono w tabeli 1. Pozwoliły one dokonać syntetycznej oceny stanu ochrony środowiska w województwach Polski, jak również ocenić zmiany jakie zaszły w tym zakresie na przestrzeni dziesięciu lat.

Tabela 1.

Mierniki obliczone zgodnie z formułą (2) oraz odpowiadające im pozycje w rankingach

| Województwo | Miernik | 2006  | 2007  | 2008  | 2009  | 2010  | 2011  | 2012  | 2013  | 2014  | 2015  |
|-------------|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| DŚL         | Wartość | 0,498 | 0,494 | 0,492 | 0,490 | 0,484 | 0,490 | 0,489 | 0,491 | 0,499 | 0,497 |
|             | Pozycja | 12    | 12    | 13    | 13    | 14    | 13    | 13    | 13    | 10    | 11    |
| K-P         | Wartość | 0,501 | 0,502 | 0,504 | 0,504 | 0,503 | 0,501 | 0,501 | 0,496 | 0,498 | 0,502 |
|             | Pozycja | 10    | 8     | 6     | 6     | 7     | 9     | 8     | 10    | 11    | 10    |

Tabela 1. (cd.)

| Województwo | Miernik | 2006  | 2007  | 2008  | 2009  | 2010  | 2011  | 2012  | 2013  | 2014  | 2015  |
|-------------|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| LBL         | Wartość | 0,502 | 0,500 | 0,498 | 0,497 | 0,497 | 0,499 | 0,499 | 0,496 | 0,498 | 0,493 |
|             | Pozycja | 9     | 10    | 10    | 12    | 12    | 12    | 10    | 11    | 12    | 12    |
| LBU         | Wartość | 0,523 | 0,523 | 0,524 | 0,522 | 0,521 | 0,522 | 0,521 | 0,519 | 0,523 | 0,530 |
|             | Pozycja | 2     | 2     | 1     | 2     | 2     | 2     | 2     | 2     | 2     | 1     |
| ŁDZ         | Wartość | 0,502 | 0,501 | 0,501 | 0,502 | 0,501 | 0,509 | 0,504 | 0,499 | 0,491 | 0,486 |
|             | Pozycja | 8     | 9     | 9     | 9     | 9     | 5     | 7     | 9     | 13    | 14    |
| MLP         | Wartość | 0,500 | 0,503 | 0,502 | 0,502 | 0,501 | 0,503 | 0,501 | 0,505 | 0,507 | 0,507 |
|             | Pozycja | 11    | 7     | 8     | 8     | 8     | 7     | 9     | 6     | 5     | 4     |
| MAZ         | Wartość | 0,481 | 0,484 | 0,491 | 0,489 | 0,487 | 0,484 | 0,487 | 0,487 | 0,488 | 0,491 |
|             | Pozycja | 14    | 14    | 14    | 14    | 13    | 14    | 14    | 14    | 14    | 13    |
| OPO         | Wartość | 0,510 | 0,517 | 0,509 | 0,497 | 0,499 | 0,499 | 0,508 | 0,516 | 0,515 | 0,516 |
|             | Pozycja | 3     | 3     | 4     | 10    | 10    | 11    | 5     | 3     | 3     | 3     |
| PKR         | Wartość | 0,508 | 0,513 | 0,515 | 0,513 | 0,516 | 0,512 | 0,515 | 0,515 | 0,509 | 0,507 |
|             | Pozycja | 6     | 4     | 3     | 4     | 3     | 4     | 3     | 4     | 4     | 6     |
| PDL         | Wartość | 0,510 | 0,508 | 0,508 | 0,504 | 0,507 | 0,505 | 0,506 | 0,504 | 0,505 | 0,504 |
|             | Pozycja | 4     | 6     | 5     | 7     | 6     | 6     | 6     | 7     | 6     | 9     |
| POM         | Wartość | 0,523 | 0,525 | 0,523 | 0,526 | 0,528 | 0,526 | 0,526 | 0,527 | 0,526 | 0,526 |
|             | Pozycja | 1     | 1     | 2     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 2     |
| ŚL          | Wartość | 0,463 | 0,465 | 0,469 | 0,472 | 0,461 | 0,456 | 0,462 | 0,465 | 0,461 | 0,460 |
|             | Pozycja | 16    | 16    | 16    | 15    | 16    | 16    | 16    | 16    | 16    | 16    |
| ŚW          | Wartość | 0,472 | 0,468 | 0,471 | 0,465 | 0,471 | 0,479 | 0,477 | 0,475 | 0,474 | 0,462 |
|             | Pozycja | 15    | 15    | 15    | 16    | 15    | 15    | 15    | 15    | 15    | 15    |
| W-M         | Wartość | 0,509 | 0,511 | 0,504 | 0,514 | 0,514 | 0,512 | 0,509 | 0,507 | 0,502 | 0,506 |
|             | Pozycja | 5     | 5     | 7     | 3     | 4     | 3     | 4     | 5     | 7     | 7     |
| WLP         | Wartość | 0,495 | 0,493 | 0,496 | 0,497 | 0,498 | 0,499 | 0,497 | 0,495 | 0,502 | 0,507 |
|             | Pozycja | 13    | 13    | 11    | 11    | 11    | 10    | 12    | 12    | 8     | 5     |
| ZPM         | Wartość | 0,503 | 0,494 | 0,495 | 0,506 | 0,513 | 0,503 | 0,497 | 0,502 | 0,501 | 0,506 |
|             | Pozycja | 7     | 11    | 12    | 5     | 5     | 8     | 11    | 8     | 9     | 8     |

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.

Analiza wyników zawartych w tabeli 1. nasuwa spostrzeżenie, że w badanym okresie w większości województw odnotowano wartość miary syntetycznej charak-

teryzującej stan ochrony środowiska powyżej neutralnego progu 0,5. Oznacza to, że więcej było regionów, którym relatywnie bliżej było do wzorca niż antywzorca. Wyjątek stanowił rok 2013, w którym tyle samo było województw, dla których wartość miernika była powyżej 0,5, jak tych dla których była poniżej tego progu. W pięciu województwach sytuacja była korzystna przez cały okres badania. Byli to liderzy klasyfikacji: pomorskie i lubuskie oraz województwa: podkarpackie, podlaskie i warmińsko-mazurskie. Dla czterech województw przez cały okres badania miara była niższa niż wartość neutralna. Były to województwa: śląskie, świętokrzyskie i mazowieckie (najgorsze w klasyfikacji) oraz dolnośląskie.

Rozstępnienie wartości mierników w badanym okresie ulegał zmianom, jednak w każdym roku rozstępnienie dolne (wartości mniejsze niż 0,5) wyraźnie przeważał nad rozstępnieniem górnym (wartości większe niż 0,5). Różnice między liderami klasyfikacji były niewielkie, natomiast różnica między województwem ostatnim a przedostatnim była spora, w 2011 roku wynosiła nawet połowę dolnego rozstępnienia.

Największą poprawę na przestrzeni 10 lat zarówno pod względem wartości miernika jak i awansu w klasyfikacji odnotowano w województwie wielkopolskim oraz małopolskim. Natomiast w województwie mazowieckim poprawa pozycji była minimalna mimo, że wartość miernika wzrosła równie silnie jak w wielkopolskim. Najbardziej znacząca obniżka wartości miernika odnotowano w łódzkim, co przełożyło się na znaczny spadek pozycji tego województwa w rankingu.

W analizie rok do roku dużą zmienność sytuacji można zaobserwować w województwach opolskim i zachodniopomorskim, osiągały zarówno największe w danym roku spadki jak i wzrosty wartości mierników. Skutkowało to silnymi zmianami pozycji w klasyfikacji.

## 5. OCENA JAKOŚCI METODY

Jednym ze sposobów oceny jakości proponowanej miary syntetycznej jest porównanie wyników badania empirycznego z wynikami uzyskanymi w oparciu o inną miarę. W artykule wykorzystano w tym celu miernik zaproponowany przez Hellwiga (1968).

W pierwszym kroku metody Hellwiga zmienne poddaje się standaryzacji, po czym analizuje się odległość obiektów od wzorca postaci (1). Miernik rozwoju określony jest wówczas wzorem:

$$m_i = 1 - \frac{d_i^+}{\bar{d} + 2s_d}, \quad (3)$$

w którym

$d_i^+$  jest  $r$ -wymiarową odległością euklidesową  $i$ -tego obiektu od wzorca,  $\bar{d}$ ,  $s_d$  są odpowiednio średnią i odchyleniem standardowym tej odległości.

Wyniki analizy stanu ochrony środowiska z wykorzystaniem mierników Hellwiga przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2.

Mierniki obliczone zgodnie z formułą (3) oraz odpowiadające im pozycje w rankingach

| Województwo | Miernik | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014  | 2015 |
|-------------|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|------|
| DŚL         | Wartość | 0,22 | 0,21 | 0,20 | 0,18 | 0,14 | 0,16 | 0,13 | 0,16 | 0,20  | 0,24 |
|             | Pozycja | 11   | 10   | 12   | 11   | 12   | 12   | 12   | 13   | 11    | 12   |
| K-P         | Wartość | 0,24 | 0,24 | 0,27 | 0,28 | 0,24 | 0,23 | 0,21 | 0,19 | 0,23  | 0,29 |
|             | Pozycja | 9    | 8    | 6    | 8    | 8    | 10   | 11   | 11   | 10    | 8    |
| LBL         | Wartość | 0,12 | 0,12 | 0,08 | 0,08 | 0,11 | 0,15 | 0,13 | 0,09 | 0,12  | 0,12 |
|             | Pozycja | 13   | 13   | 14   | 15   | 14   | 13   | 13   | 14   | 14    | 14   |
| LBU         | Wartość | 0,40 | 0,39 | 0,42 | 0,39 | 0,33 | 0,39 | 0,35 | 0,35 | 0,42  | 0,57 |
|             | Pozycja | 1    | 2    | 2    | 2    | 4    | 2    | 3    | 4    | 2     | 1    |
| ŁDZ         | Wartość | 0,19 | 0,19 | 0,20 | 0,22 | 0,20 | 0,26 | 0,24 | 0,21 | 0,15  | 0,16 |
|             | Pozycja | 12   | 12   | 11   | 10   | 11   | 9    | 7    | 8    | 13    | 13   |
| MLP         | Wartość | 0,30 | 0,33 | 0,31 | 0,31 | 0,27 | 0,33 | 0,29 | 0,33 | 0,37  | 0,42 |
|             | Pozycja | 5    | 5    | 5    | 5    | 7    | 4    | 6    | 5    | 3     | 3    |
| MAZ         | Wartość | 0,07 | 0,10 | 0,14 | 0,15 | 0,13 | 0,09 | 0,09 | 0,18 | 0,20  | 0,26 |
|             | Pozycja | 14   | 14   | 13   | 13   | 13   | 15   | 14   | 12   | 12    | 11   |
| OPO         | Wartość | 0,34 | 0,37 | 0,33 | 0,28 | 0,28 | 0,29 | 0,34 | 0,37 | 0,36  | 0,40 |
|             | Pozycja | 3    | 3    | 4    | 7    | 6    | 6    | 4    | 3    | 4     | 4    |
| PKR         | Wartość | 0,29 | 0,34 | 0,40 | 0,36 | 0,39 | 0,38 | 0,38 | 0,43 | 0,34  | 0,39 |
|             | Pozycja | 6    | 4    | 3    | 3    | 3    | 3    | 2    | 2    | 5     | 6    |
| PDL         | Wartość | 0,25 | 0,23 | 0,23 | 0,17 | 0,22 | 0,19 | 0,22 | 0,21 | 0,23  | 0,27 |
|             | Pozycja | 8    | 9    | 10   | 12   | 10   | 11   | 10   | 9    | 8     | 10   |
| POM         | Wartość | 0,40 | 0,44 | 0,50 | 0,51 | 0,50 | 0,49 | 0,46 | 0,49 | 0,48  | 0,55 |
|             | Pozycja | 2    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1     | 2    |
| ŚL          | Wartość | 0,03 | 0,08 | 0,06 | 0,08 | 0,03 | 0,00 | 0,02 | 0,05 | -0,01 | 0,05 |
|             | Pozycja | 15   | 15   | 16   | 14   | 16   | 16   | 16   | 16   | 16    | 15   |
| ŚW          | Wartość | 0,02 | 0,00 | 0,06 | 0,04 | 0,09 | 0,10 | 0,08 | 0,07 | 0,08  | 0,05 |
|             | Pozycja | 16   | 16   | 15   | 16   | 15   | 14   | 15   | 15   | 15    | 16   |
| W-M         | Wartość | 0,25 | 0,28 | 0,23 | 0,30 | 0,30 | 0,28 | 0,29 | 0,29 | 0,23  | 0,29 |
|             | Pozycja | 7    | 7    | 9    | 6    | 5    | 7    | 5    | 7    | 9     | 9    |
| WLP         | Wartość | 0,23 | 0,20 | 0,25 | 0,24 | 0,23 | 0,28 | 0,23 | 0,21 | 0,30  | 0,37 |
|             | Pozycja | 10   | 11   | 8    | 9    | 9    | 8    | 9    | 10   | 7     | 7    |
| ZPM         | Wartość | 0,32 | 0,29 | 0,27 | 0,36 | 0,40 | 0,33 | 0,24 | 0,30 | 0,31  | 0,39 |
|             | Pozycja | 4    | 6    | 7    | 4    | 2    | 5    | 8    | 6    | 6     | 5    |

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.

W celu porównania zgodności wyników syntetycznego badania stanu ochrony środowiska, uzyskanych na podstawie obu metod, wykorzystano współczynnik korelacji rang Spearmana oraz (opisany dalej) miernik, który zaproponował Nowak (1982).

Przez  $d_{ij}^k$  oznaczmy dystans między  $i$ -tym a  $j$ -tym obiektem w jednowymiarowej przestrzeni  $k$ -tej zmiennej syntetycznej ( $k = 1, 2$ ). Ponieważ dla różnych metod wielkości te są nieporównywalne, dokonujemy normalizacji:

$$c_{ij}^k = \frac{d_{ij}^k}{d_{k0}}, \quad k = 1, 2$$

przy czym

$$d_{k0} = \max_{i,j} d_{ij}^k.$$

W kolejnym kroku dla wszystkich obiektów obliczamy różnice unormowanych odległości:

$$u_{ij} = |c_{ij}^1 - c_{ij}^2|.$$

Miernik zgodności dwóch metod tworzenia taksonomicznych mierników rozwoju ma wówczas postać:

$$M0 = 1 - \frac{2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n u_{ij}}{n^2 - n} \in [0,1]. \quad (4)$$

Jest on tym większy, im bardziej zgodne wyniki dają porównywane metody.

Obliczone wartości współczynników korelacji rang Spearmana oraz mierników  $M0$  dla kolejnych lat badania przedstawiono w tabeli 3.

Tabela 3.

Zgodność miar określonych równaniami (2) oraz (3) scharakteryzowana współczynnikiem korelacji rang Spearmana  $r$  oraz miernikiem  $M0$  określonym wzorem (4)

| Rok  | 2007  | 2009  | 2011  | 2012  | 2013  | 2014  | 2015  |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $r$  | 0,835 | 0,897 | 0,859 | 0,885 | 0,906 | 0,838 | 0,903 |
| $M0$ | 0,867 | 0,875 | 0,878 | 0,884 | 0,885 | 0,879 | 0,878 |

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych zawartych w tabeli 1 oraz tabeli 2.

Analizując wyniki zawarte w tabeli można zauważyć, że w kolejnych latach wartości obu mierników zgodności zmieniały się, jednak w żadnym roku metody nie były tożsame. Oznacza to, że proponowana konstrukcja nie tylko różni się formalnie od miernika Hellwiga, ale również inaczej niż on odzwierciedla rzeczywistość.

W celu analizy poprawności zaproponowanej konstrukcji wykorzystano mierniki opisane w pracach Grabiński (1984) oraz Grabiński i inni (1989). Im mniejsze są wartości tych mierników, tym bardziej poprawna jest zmienna syntetyczna. Charakteryzują one następujące aspekty:

1. Zgodność odwzorowania:

$$M1 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n (d_{ij} - \delta_{ij})^2}{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n \delta_{ij}^2},$$

$$M2 = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n \left( \frac{d_{ij} - \delta_{ij}}{\delta_{ij}} \right)^2,$$

$$M3 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n \frac{(d_{ij} - \delta_{ij})^2}{\delta_{ij}}}{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n \delta_{ij}},$$

gdzie:

$d_{ij}$  – dystans między obiektami w jednowymiarowej przestrzeni zmiennej syntetycznej,

$\delta_{ij}$  – dystans między obiektami w  $r$ -wymiarowej przestrzeni zmiennych diagnostycznych,

$n$  – liczba obiektów.

2. Korelację liniową zmiennej syntetycznej ze zmiennymi diagnostycznymi:

$$M4 = 1 - \frac{1}{r} \sum_{p=1}^r r_p,$$

$$M5 = \frac{1}{r} \sum_{p=1}^r l(r_p),$$

gdzie:

$r_p$  – współczynnik korelacji między  $p$ -tą zmienną diagnostyczną a zmienną syntetyczną,

$r$  – liczba zmiennych,

$$l(r_p) = \begin{cases} 0 & \text{dla } r_p \in [0,5; 1], \\ 1 & \text{dla } r_p \in [0; 0,5), \\ 2 & \text{dla } r_p \in [-0,5; 0), \\ 3 & \text{dla } r_p \in [-1; -0,5). \end{cases}$$

3. Korelację rangową zmiennej syntetycznej ze zmiennymi diagnostycznymi:

$$M6 = 1 - \frac{1}{r} \sum_{p=1}^r \rho_p,$$

$$M7 = \frac{1}{r} \sum_{p=1}^r l(\rho_p),$$

$$M8 = \frac{2}{rl} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^r |\dot{x}_{ip} - \dot{q}_i|,$$

gdzie:

$\rho_p$  – współczynnik korelacji rangowej między  $p$ -tą cechą a zmienną syntetyczną,

$$l(\rho_p) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \rho_p \in [0,5; 1], \\ 1 & \text{dla } \rho_p \in [0; 0,5), \\ 2 & \text{dla } \rho_p \in [-0,5; 0), \\ 3 & \text{dla } \rho_p \in [-1; -0,5), \end{cases}$$

$\dot{x}_{ip}$  – ranga  $i$ -tego obiektu ze względu na  $p$ -tą zmienną diagnostyczną,

$\dot{q}_i$  – ranga  $i$ -tego obiektu ze względu na zmienną syntetyczną,

$$l = \begin{cases} n^2 & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ n^2 - 1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$

4. Zmienność i koncentrację zmiennej syntetycznej:

$$M9 = -\frac{s_m}{\bar{m}},$$

$$M10 = \frac{s_\Delta}{\bar{\Delta}},$$

gdzie:

$\bar{m}$ ,  $s_m$  – średnia i odchylenie standardowe zmiennej syntetycznej,

$\bar{\Delta}$ ,  $s_\Delta$  – średnia i odchylenie standardowe z wielkości  $\Delta_k = \tilde{m}_k - \tilde{m}_{k-1}$ , przy czym  $\tilde{m}_k$  to uporządkowane niemalejąco realizacje zmiennej syntetycznej,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

5. Odległość taksonomiczną zmiennej syntetycznej od zmiennych pierwotnych:

$$M11 = \frac{1}{nr} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^r |x'_{ip} - q'_i|,$$

$$M12 = \left[ \frac{1}{nr} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^r (x'_{ip} - q'_i)^2 \right]^{1/2},$$

gdzie:

$x'_{ip}$  – standaryzowana wartość  $p$ -tej zmiennej pierwotnej dla  $i$ -tego obiektu,

$q'_i$  – standaryzowana wartość zmiennej syntetycznej dla  $i$ -tego obiektu.

W tabeli 4 przedstawiono wartości mierników poprawności metody (pierwsza kolumna) obliczone dla proponowanej konstrukcji oraz dla miary Hellwiga.

Tabela 4.

Porównanie poprawności miary  $m^{(1)}$  opisanej wzorem (2) oraz miary Hellwiga  $m^{(2)}$  (wzór (3))

| $M$   | Miara syntet. | 2006  | 2007  | 2008  | 2009  | 2010  | 2011  | 2012  | 2013  | 2014  | 2015  |
|-------|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $M1$  | $m^{(1)}$     | ,9998 | ,9998 | ,9998 | ,9999 | ,9999 | ,9999 | ,9998 | ,9999 | ,9999 | ,9999 |
|       | $m^{(2)}$     | ,9976 | ,9981 | ,9978 | ,9985 | ,9986 | ,9987 | ,9984 | ,9986 | ,9986 | ,9984 |
| $M2$  | $m^{(1)}$     | ,9997 | ,9997 | ,9997 | ,9998 | ,9996 | ,9997 | ,9996 | ,9997 | ,9998 | ,9998 |
|       | $m^{(2)}$     | ,9967 | ,9970 | ,9966 | ,9973 | ,9967 | ,9967 | ,9967 | ,9974 | ,9973 | ,9971 |
| $M3$  | $m^{(1)}$     | ,9998 | ,9998 | ,9998 | ,9998 | ,9998 | ,9998 | ,9998 | ,9998 | ,9998 | ,9998 |
|       | $m^{(2)}$     | ,9972 | ,9976 | ,9973 | ,9981 | ,9979 | ,9980 | ,9977 | ,9981 | ,9981 | ,9979 |
| $M4$  | $m^{(1)}$     | 0,669 | 0,663 | 0,706 | 0,701 | 0,659 | 0,671 | 0,694 | 0,688 | 0,673 | 0,608 |
|       | $m^{(2)}$     | 0,682 | 0,676 | 0,715 | 0,709 | 0,666 | 0,686 | 0,703 | 0,700 | 0,683 | 0,615 |
| $M5$  | $m^{(1)}$     | 0,889 | 0,889 | 1,000 | 1,000 | 0,778 | 1,000 | 0,778 | 0,778 | 0,778 | 0,778 |
|       | $m^{(2)}$     | 0,889 | 0,889 | 1,111 | 0,889 | 0,889 | 0,889 | 1,111 | 1,000 | 0,778 | 0,667 |
| $M6$  | $m^{(1)}$     | 0,696 | 0,670 | 0,728 | 0,690 | 0,629 | 0,678 | 0,686 | 0,658 | 0,665 | 0,633 |
|       | $m^{(2)}$     | 0,728 | 0,700 | 0,765 | 0,753 | 0,676 | 0,727 | 0,723 | 0,690 | 0,697 | 0,650 |
| $M7$  | $m^{(1)}$     | 1,000 | 1,000 | 0,889 | 0,778 | 0,778 | 0,889 | 0,889 | 0,889 | 0,889 | 0,778 |
|       | $m^{(2)}$     | 1,000 | 1,000 | 1,111 | 1,000 | 0,889 | 1,000 | 1,111 | 1,000 | 0,889 | 0,778 |
| $M8$  | $m^{(1)}$     | 0,547 | 0,543 | 0,563 | 0,527 | 0,505 | 0,522 | 0,529 | 0,519 | 0,526 | 0,516 |
|       | $m^{(2)}$     | 0,557 | 0,549 | 0,580 | 0,565 | 0,530 | 0,553 | 0,544 | 0,538 | 0,538 | 0,514 |
| $M9$  | $m^{(1)}$     | -0,03 | -0,03 | -0,03 | -0,03 | -0,03 | -0,03 | -0,03 | -0,03 | -0,03 | -0,04 |
|       | $m^{(2)}$     | -0,50 | -0,50 | -0,50 | -0,50 | -0,50 | -0,50 | -0,50 | -0,50 | -0,50 | -0,50 |
| $M10$ | $m^{(1)}$     | 1,168 | 1,026 | 1,291 | 1,063 | 0,869 | 1,217 | 0,938 | 0,844 | 0,971 | 1,319 |
|       | $m^{(2)}$     | 0,880 | 0,777 | 0,874 | 0,930 | 0,816 | 0,839 | 0,871 | 0,829 | 0,793 | 1,021 |



Tabela 4. (cd.)

| <i>M</i>   | Miara syntet. | 2006  | 2007  | 2008  | 2009  | 2010  | 2011  | 2012  | 2013  | 2014  | 2015  |
|------------|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| <i>M11</i> | $m^{(1)}$     | 1,103 | 1,110 | 1,122 | 1,083 | 1,053 | 1,061 | 1,099 | 1,088 | 1,065 | 1,028 |
|            | $m^{(2)}$     | 1,039 | 1,022 | 1,063 | 1,049 | 1,013 | 1,026 | 1,081 | 1,063 | 1,045 | 0,998 |
| <i>M12</i> | $m^{(1)}$     | 1,440 | 1,441 | 1,475 | 1,459 | 1,439 | 1,447 | 1,478 | 1,465 | 1,446 | 1,401 |
|            | $m^{(2)}$     | 1,365 | 1,356 | 1,393 | 1,380 | 1,365 | 1,385 | 1,429 | 1,408 | 1,402 | 1,346 |

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych zawartych w tabeli 1 oraz tabeli 2.

Analiza uzyskanych rezultatów nasuwa spostrzeżenie, że w każdym analizowanym aspekcie jedna z metod wykazywała wyraźną przewagę. Miara Hellwiga miała lepszą zgodność odwzorowania (mierniki *M1–M3*), przy czym było to widoczne dopiero na trzecim miejscu po przecinku. Przeważała również pod względem zmienności i koncentracji (*M9, M10*) oraz odległości taksonomicznej zmiennej syntetycznej od zmiennych pierwotnych (*M11, M12*). Natomiast proponowana w artykule zmienna syntetyczna była silniej skorelowana ze zmiennymi diagnostycznymi zarówno liniowo (*M4, M5*) jak i rangowo (*M6, M7*).

## 6. PODSUMOWANIE

Zaproponowana w artykule konstrukcja miary syntetycznej, mimo że w zasadzie przebiega w przestrzeni jednowymiarowej, wydaje się być użytecznym narzędziem wielowymiarowej analizy porównawczej. Posiada ona własność postulowaną dla tego typu miar: jej wartości rosną wraz ze wzrostem poziomu rozwoju obiektu. Ponadto miara jest niemianowana, ograniczona oraz określona również w przypadku, gdy cecha przyjmuje wartość 0. Główną jej zaletą jest porównywalność wartości w latach, przez co możliwa staje się analiza dynamiki zjawiska złożonego.

W opisanej metodzie, aby syntetycznie ocenić sytuację obiektu, analizuje się jego odległości od wzorca (antywzorca) względem sumy odległości od wzorca (antywzorca) wszystkich obiektów. Przy czym dla nominant antywzorzec określono dwojako w zależności od sytuacji danego obiektu. Inaczej niż dla większości konstrukcji tego typu, na wartość miernika dla danego obiektu silny wpływ ma sytuacja pozostałych obiektów, tzn. miara charakteryzuje poziom rozwoju obiektu na tle wszystkich pozostałych.

W badaniu empirycznym proponowana miara dała wyniki podobne – ale nie tożsame – z wynikami uzyskanymi z wykorzystaniem bardzo popularnej miary Hellwiga. Porównanie obu mierników pod względem poprawności nie ukazało wyraźnej przewagi żadnej z metod. Miara Hellwiga lepiej wypadła pod względem odległości miary syntetycznej od zmiennych pierwotnych oraz zmienności i koncentracji miernika, natomiast proponowana konstrukcja przeważała pod względem korelacji miary syntetycznej ze zmiennymi diagnostycznymi.

Prosta konstrukcja proponowanej miary pozwala na jej różnorodne modyfikacje, które będą przedmiotem dalszych badań. Na przykład wprowadzając inny rodzaj odległości można zwiększyć zmienność miary. Ciekawe warianty można również otrzymać wykorzystując koncepcje opisane w pracach: Jajuga (1986), Walesiak (2011), Pietrzak (2014).

#### LITERATURA

- Bartosiewicz S., (1976), Propozycja metody tworzenia zmiennych syntetycznych, *Prace Naukowe AE we Wrocławiu*, 84, 5–7.
- Cieślak M., (1974), Taksonomiczna procedura programowania rozwoju gospodarczego i określenia zapotrzebowania na kadry kwalifikowane, *Przegląd Statystyczny*, 21 (1), 29–39.
- Dittmann P., Pisz Z., (1975), Metoda dynamicznego badania zróżnicowania przestrzennego zjawisk społeczno-ekonomicznych, *Wiadomości Statystyczne*, 11.
- Grabiński T., (1984), *Wielowymiarowa analiza porównawcza w badaniach dynamiki zjawisk ekonomicznych*, Wydawnictwo AE, Kraków.
- Grabiński T., Wydymus S., Zeliaś A., (1989), *Metody taksonomii numerycznej w modelowaniu zjawisk społeczno-gospodarczych*, PWE, Warszawa.
- Hellwig Z., (1968), Zastosowanie metody taksonomicznej do typologicznego podziału krajów ze względu na poziom ich rozwoju oraz zasoby i strukturę kwalifikowanych kadr, *Przegląd Statystyczny*, 15 (4), 307–327.
- Jajuga K., (1986), *Metoda tworzenia zmiennych syntetycznych na podstawie klasyfikacji rozmytej*, Prace Naukowe AE, 360, Wrocław.
- Lira J., Wagner W., Wysocki F., (2002), Mediana w zagadnieniach porządkowania obiektów wielocechowych, w: Paradysz J., (red.), *Statystyka regionalna w służbie samorządu terytorialnego i biznesu*, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, 87–99.
- Młodak A., (2006), *Analiza taksonomiczna w statystyce regionalnej*, Difin, Warszawa.
- Młodak A., (2009), Hierarchiczność a porządkowanie obiektów w statystyce regionalnej, *Wiadomości Statystyczne*, 4, 11–25.
- Nowak E., (1977), Syntetyczne mierniki plonów w niektórych krajach europejskich, *Wiadomości Statystyczne*, 10, 19–22.
- Nowak E., (1982), Badanie zgodności metod konstruowania taksonomicznych mierników rozwoju, *Przegląd Statystyczny*, 29 (3/4), 455–463.
- Panek T., (1984), Taksonomiczna modyfikacja dystansowej metody pomiaru poziomu życia ludności, *Prace Naukowe AE we Wrocławiu*, 262.
- Pietrzak M. B., (2014), Taksonomiczny miernik rozwoju (TMR) z uwzględnieniem zależności przestrzennych, *Przegląd Statystyczny*, 59 (2), 181–201.
- Pluta W., (1976), Taksonomiczna procedura prowadzenia syntetycznych badań porównawczych za pomocą zmodyfikowanej miary rozwoju gospodarczego, *Przegląd Statystyczny*, 23 (4), 511–518.
- Strahl D., (1978), Propozycja konstrukcji miary syntetycznej, *Przegląd Statystyczny*, 25 (2), 205–215.
- Strahl D., (2006), Strukturalna miara rozwoju obiektów hierarchicznych, *Prace Naukowe AE we Wrocławiu, Ekonometria*, 16, 11–20.
- Strahl D., Markowska M., (2008), Klasyfikacja dynamiczno-przestrzenna obiektów hierarchicznych z wykorzystaniem statystyk pozycyjnych, w: Dziechciarz J., (red.), *Zastosowania metod ilościowych*, Prace Naukowe AE we Wrocławiu, Ekonometria, 20, Wrocław, 16–27.
- Walesiak M., (2011), *Uogólniona miara odległości GDM w statystycznej analizie wielowymiarowej z wykorzystaniem programu R*, Wydawnictwo UE, Wrocław.

Walesiak M., (2014), Przegląd formuł normalizacji wartości zmiennych oraz ich własności w statystycznej analizie wielowymiarowej, *Przegląd Statystyczny*, 61 (4), 363–372.

Wydymus S., (2013), Rozwój gospodarczy a poziom wynagrodzeń w krajach Unii Europejskiej – analiza taksonomiczna, *Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia*, 57, 631–645.

# DODATEK

Dowody własności:

1. Oczywiste.
2. Oczywiste.
3. Bez straty ogólności założmy, że w zbiorze zmiennych diagnostycznych występuje tylko jedna nominanta, nadajmy jej numer 1. Założmy, że jej wartość nominalna dzieli uporządkowane niemalejąco wartości dla obiektów w proporcji  $n_1:n - n_1$ . Odpowiednie wartości antywzorcowe oznaczmy  $x_1^-$  oraz  $x_1^+$ . Wówczas:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i^- &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{r} \sum_{p=1}^r m_{ip}^- \right) = \frac{1}{r} \sum_{p=1}^r \sum_{i=1}^n m_{ip}^- = \frac{1}{r} \left( \sum_{i=1}^n m_{i1}^- + \sum_{p=2}^r \sum_{i=1}^n m_{ip}^- \right) = \\ &= \frac{1}{r} \left( \sum_{i=1}^{n_1} m_{i1}^- + \sum_{i=n_1+1}^n m_{i1}^- + \sum_{p=2}^r \sum_{i=1}^n m_{ip}^- \right) = \\ &= \frac{1}{r} \left( \sum_{i=1}^{n_1} \frac{n_1}{n} \cdot \frac{|x_{i1} - x_1^-|}{\sum_{j=1}^{n_1} |x_{jp} - x_p^-|} + \sum_{i=n_1+1}^n \frac{n - n_1}{n} \cdot \frac{|x_{i1} - x_1^+|}{\sum_{j=n_1+1}^n |x_{jp} - x_p^-|} + \sum_{p=2}^r \sum_{i=1}^n \frac{|x_{ip} - x_p^-|}{\sum_{i=1}^n |x_{ip} - x_p^-|} \right) = \\ &= \frac{1}{r} \left( \frac{n_1}{n} + \frac{n - n_1}{n} + r - 1 \right) = 1. \end{aligned}$$

4. Podobnie jak 3.
5. Oczywiste na podstawie 3.
6. Oczywiste na podstawie 4.
7.  $\sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1+m_i^-+m_i^+}{2} \right) = \frac{n}{2} + \sum_{i=1}^n m_i^- + \sum_{i=1}^n m_i^+ = \frac{n}{2} - 1 + 1 = \frac{n}{2}$ .

Przypadki szczególne:

1.  $m_i^+ = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r} \sum_{p=1}^r m_{ip}^+ = 0 \Leftrightarrow \bigwedge_p m_{ip}^+ = 0 \Leftrightarrow \bigwedge_p |x_{ip} - x_p^+| = 0 \Leftrightarrow \bigwedge_p x_{ip} = x_p^+$ .
2. Analogicznie jak 1.
3.  $m_i^+ = 0 \wedge m_i^- = 0 \Leftrightarrow \bigwedge_p (|x_{ip} - x_p^+| = 0 \wedge |x_{ip} - x_p^-| = 0) \Leftrightarrow \bigwedge_p x_p^+ = x_p^-$   
co jest sprzeczne z założeniem, że zmienne spełniają kryterium zmiennościowe.
4.  $m_i^+ = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{r} \sum_{p=1}^r m_{ip}^+ = 1 \Leftrightarrow \bigwedge_p m_{ip}^+ = 1 \Leftrightarrow \bigwedge_p \frac{|x_{ip} - x_p^+|}{\sum_{j=1}^n |x_{jp} - x_p^+|} =$   
 $= 1 \Leftrightarrow \bigwedge_p |x_{ip} - x_p^+| = \sum_{j=1}^n |x_{jp} - x_p^+| \Leftrightarrow \bigwedge_p \sum_{j \neq i} |x_{jp} - x_p^+| =$   
 $= 0 \Leftrightarrow \bigwedge_p \bigwedge_{j \neq i} x_{jp} = x_p^+.$
5. Podobnie jak 4.

## PROPOZYCJA MIARY SYNTETYCZNEJ

## Streszczenie

Celem artykułu było zaproponowanie nowej metody konstrukcji zmiennej syntetycznej. Aby ocenić poziom rozwoju obiektu, analizowano jego odległość od wzorca (antywzorca) względem sumy odległości od wzorca (antywzorca) wszystkich obiektów. W ten sposób scharakteryzowano region na tle wszystkich pozostałych. Opisana miara jest ograniczona. Zmienne diagnostyczne nie wymagają normalizacji ani zamiany na stymulanty. Podstawową zaletą sugerowanego podejścia jest porównywalność analiz prowadzonych dla różnych lat. Proponowaną metodę zilustrowano przykładem empirycznym. Wartości miar porównano z wynikami otrzymanymi na podstawie metody wzorcowej Hellwiga. Były podobne, ale nie tożsame. W kolejnym kroku badania porównano obie metody pod względem poprawności. Żadna z nich nie wykazała znaczącej przewagi.

**Słowa kluczowe:** zmienna syntetyczna, miernik rozwoju

## PROPOSITION OF SYNTHETIC MEASURE

## Abstract

The aim of the study was to propose a new method for construction of synthetic variable. We analyzed distance between object and pattern (antipattern) in relation to sum of all distances between the pattern (antipattern) and other objects. This allowed us to characterize position of a region among others. The described measure is limited. Diagnostic variables do not require normalization or conversion to stimulants. Its main advantage is comparability of analyzes carried out for various years. The proposed method was illustrated by an empirical example. The values of measurement were compared with those obtained by Hellwig's method. They were similar but not identical. Then two methods were compared in terms of correctness. None of them had a significant advantage.

**Keywords:** synthetic variable, measure of development

MAREK WALESIAK<sup>1</sup>, MAREK OBRĘBALSKI<sup>2</sup>SPÓJNOŚĆ SPOŁECZNA WOJEWÓDZTWA DOLNOŚLĄSKIEGO  
W LATACH 2005–2015 – POMIAR I OCENA ZMIAN

## 1. WPROWADZENIE

Spójność społeczna jest wieloaspektowym zagadnieniem. W ślad za tym zróżnicowane są także możliwości jej jednoznacznej identyfikacji i pomiaru. Zwraca na to uwagę wielu autorów (m.in. Jenson, 2010; Ryszkiewicz, 2013). Wobec różnorodności definicyjnych spójności społecznej w niniejszym opracowaniu przyjęto zweryfikowane możliwościami informacyjnymi ujęcie stosowane przez Radę Europy. Przewodnik Rady Europy definiuje spójność społeczną jako „zdolność społeczeństwa do zapewnienia długoterminowego dobrobytu dla wszystkich jego członków, w tym zapewnienia równego dostępu do zasobów, poszanowania godności ludzkiej i różnorodności, osobistej i zbiorowej autonomii oraz odpowiedzialnej partycypacji” (*Concerted Development...*, 2005, s. 23). Definicja ta jest więc odzwierciedleniem czterech głównych aspektów dobrobytu: sprawiedliwego i równego dostępu do zasobów, indywidualnej i zbiorowej godności, autonomii jednostki i partycypacji w życiu społecznym. Zapewnienie dobrobytu wszystkim członkom społeczności terytorialnych (w tym lokalnych i regionalnych) można osiągnąć m.in. poprzez minimalizowanie, a wręcz unikanie różnic, podziałów i marginalizacji (*New Strategy...*, 2010, s. 2).

Kształtowanie spójności społecznej jest zatem terytorialnie określonym procesem dążenia do eliminacji nierówności, które ujawniają się w wyniku zróżnicowanej alokacji dóbr i usług oraz ograniczonego do nich dostępu. Spójność społeczna może być analizowana i oceniana w odniesieniu do mniej bądź bardziej złożonych układów terytorialnych, w tym m.in. regionów, powiatów, gmin, a nawet poszczególnych miast i miejscowości wiejskich.

Podejmowanie efektywnych przedsięwzięć zmierzających do redukcji bądź istotnego ograniczenia nierówności społecznych wymaga w pierwszym rzędzie właściwej diagnozy w ujęciu przyczynowo-skutkowym oraz ilościowym i jakościowym. Prowadzenie systematycznego monitoringu i oceny spójności społecznej wymaga

---

<sup>1</sup> Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Wydział Ekonomii, Zarządzania i Turystyki, Katedra Ekonometrii i Informatyki, ul. Nowowiejska 3, 58-500 Jelenia Góra, Polska, autor prowadzący korespondencję – e-mail: marek.walesiak@ue.wroc.pl.

<sup>2</sup> Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Wydział Ekonomii, Zarządzania i Turystyki, Katedra Gospodarki Regionalnej, ul. Nowowiejska 3, 58-500 Jelenia Góra, Polska.

odpowiedniego podejścia metodycznego oraz informacyjnego zasilania. Badanie poziomu spójności społecznej odnosi się do identyfikacji wielowymiarowych zmian ilościowych i jakościowych związanych m.in. z poprawą poziomu życia mieszkańców. Z kolei badanie stopnia zróżnicowania spójności społecznej określonej jednostki terytorialnej (np. regionu) ukierunkowane jest na ujawnienie zakresu i skali dysproporcji między poszczególnymi miejscowościami, gminami czy powiatami.

W literaturze dostępne są badania prezentujące zastosowania metod statystycznej analizy wielowymiarowej do badania spójności społecznej w przekroju jednostek terytorialnych różnej skali. W literaturze polskiej, np. w pracy Balcerzak (2015), przeprowadzono analizę spójności społecznej w krajach Unii Europejskiej z wykorzystaniem miary rozwoju Z. Hellwiga (Hellwig, 1968; 1972). W pracach Dickes, Valentova (2013), Dickes i inni (2010) zastosowano skalowanie wielowymiarowe, modele równań strukturalnych (SEM) oraz indeks agregatowy do pomiaru spójności społecznej w odpowiednio 47 oraz 33 krajach Europy. Autorzy pracy Rajulton i inni (2007) na podstawie wyników analizy czynnikowej oraz standaryzacji skonstruowali indeks agregatowy do pomiaru spójności społecznej dla 49 obszarów metropolitalnych Kanady (ang. *Census Metropolitan Areas*).

Celem opracowania jest pomiar i ocena zmian poziomu i stopnia zróżnicowania spójności społecznej województwa dolnośląskiego. Badanie w przekroju powiatów tegoż regionu dotyczy okresu 2005–2015 i uwzględnia trzy szczególnie istotne dla jakości życia społeczności lokalnych dziedziny: dochody i aktywność ekonomiczna ludności, warunki zamieszkiwania oraz dostępność usług i przestrzeni publicznej. Do pomiaru i oceny zmian poziomu spójności społecznej województwa dolnośląskiego w przekroju powiatów w latach 2005–2015 zastosowano odległość GDM1 (Walesiak, 2016) oraz miernik Theila (Theil, 1961; Walesiak, 1993).

## 2. METODYKA BADAWCZA

Do pomiaru i oceny zmian poziomu oraz stopnia zróżnicowania spójności społecznej powiatów województwa dolnośląskiego w latach 2005–2015 zastosowano miarę TOPSIS z odległością GDM1 oraz miernik Theila.

Typowa procedura postępowania w porządkowaniu liniowym bazującym na wzorcu (górny biegun) lub antywzorcu (dolny biegun) dla danych metrycznych obejmuje następujące kroki (zob. np. Walesiak, 2016):

$$P \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow SDN \rightarrow T_w \rightarrow d_i \rightarrow R, \quad (1)$$

gdzie:

$P$  – wybór zjawiska złożonego (nadrzędne kryterium porządkowania elementów zbioru  $A$ , które nie podlega pomiarowi bezpośredniemu),

$A$  – wybór obiektów,

- $X$  – dobór zmiennych. Zgromadzenie danych i konstrukcja macierzy danych w przestrzeni  $m$ -wymiarowej  $[x_{ij}]_{n \times m}$  ( $x_{ij}$  – obserwacja  $j$ -tej zmiennej dla  $i$ -tego obiektu,  $i = 1, \dots, n$  – numer obiektu,  $j = 1, \dots, m$  – numer zmiennej),
- $SDN$  – identyfikacja zmiennych preferencyjnych (stymulanty, destymulanty, nominanty). Zmienna  $M_j$  jest stymulantą (Hellwig, 1981, s. 48), gdy dla każdych dwóch jej obserwacji  $x_{ij}^S, x_{kj}^S$  odnoszących się do obiektów  $A_i, A_k$  jest  $x_{ij}^S > x_{kj}^S \Rightarrow A_i \succ A_k$  ( $\succ$  oznacza dominację obiektu  $A_i$  nad obiektem  $A_k$ ). Zmienna  $M_j$  jest destymulantą (Hellwig, 1981, s. 48), gdy dla każdych dwóch jej obserwacji  $x_{ij}^D, x_{kj}^D$  odnoszących się do obiektów  $A_i, A_k$  jest  $x_{ij}^D > x_{kj}^D \Rightarrow A_i \prec A_k$  ( $\prec$  oznacza dominację obiektu  $A_k$  nad obiektem  $A_i$ ). Zmienna  $M_j$  jest nominantą jednomodalną (Borys, 1984, s. 118), gdy dla każdych dwóch jej obserwacji  $x_{ij}^N, x_{kj}^N$  odnoszących się do obiektów  $A_i, A_k$  ( $nom_j$  oznacza nominalny poziom  $j$ -tej zmiennej): jeżeli  $x_{ij}^N, x_{kj}^N \leq nom_j$ , to  $x_{ij}^N > x_{kj}^N \Rightarrow A_i \succ A_k$ ; jeżeli  $x_{ij}^N, x_{kj}^N > nom_j$ , to  $x_{ij}^N > x_{kj}^N \Rightarrow A_i \prec A_k$ .
- $T_w$  – transformacja nominant w stymulanty (w przypadku zastosowania miar odległości od antywzorca rozwoju). Metody transformacji nominant na stymulanty przedstawiono m.in. w pracy (Walesiak, 2016, s. 19),
- $d_i$  – obliczenie dla  $i$ -tego obiektu wartości miary agregatowej – zastosowanie miar odległości od wzorca lub antywzorca z udziałem wag,
- $R$  – uporządkowanie obiektów według wartości  $d_i$ .

Jako miarę agregatową  $d_i$  zastosowano TOPSIS (Hwang, Yoon, 1981) z odległością GDM1 (Walesiak, 2014):

$$d_i = 1 - \frac{GDM1_i^+}{GDM1_i^- + GDM1_i^+}, \quad (2)$$

gdzie:  $GDM1_i^-$  i  $GDM1_i^+$  – odległość GDM1 obiektu  $i$ -tego odpowiednio od obiektu antywzorca i wzorca,

$$GDM1_i = \frac{1}{2} - \frac{\sum_{j=1}^m \alpha_j (z_{ij} - z_{wj})(z_{wj} - z_{lj}) + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1, l \neq w}^n \alpha_j (z_{ij} - z_{lj})(z_{wj} - z_{lj})}{2 \left[ \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n \alpha_j (z_{ij} - z_{lj})^2 \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n \alpha_j (z_{wj} - z_{lj})^2 \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (3)$$

$i, l = 1, \dots, n$  – numer obiektu,  $w$  – numer obiektu wzorca lub antywzorca,  $j = 1, \dots, m$  – numer zmiennej,  $z_{wj}$  –  $j$ -ta współrzędna obiektu wzorca ( $GDM1_i^+$ ) lub antywzorca ( $GDM1_i^-$ ),  $\alpha_j$  – waga  $j$ -tej zmiennej ( $\alpha_j \in [0; 1]$  i  $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$ ).

Wartości miary agregatowej  $d_i$  należą do przedziału  $[0; 1]$ . Im wyższa jest wartość  $d_i$ , tym wyższy jest poziom spójności społecznej badanych obiektów.

Z uwagi na to, że porównywane będą wartości miary agregatowej z dwóch okresów  $t$  oraz  $q$  ( $t > q$ ) w procedurze porządkowania liniowego należy:

- zamienić nominanty na stymulanty,
- ustalić wspólny wzorzec i antywzorzec rozwoju na podstawie macierzy  $[x_{ij}]$  obejmującej dane z okresów  $t$  (macierz danych  $[x'_{ij}]$ ) i  $q$  (macierz danych  $[x''_{ij}]$ ),
- przeprowadzić normalizację wartości zmiennych dla wspólnej macierzy danych z okresów  $t$  i  $q$ , tj. dla macierzy  $[x_{ij}]$ .

Dla wartości porównywanych miar agregatowych z lat 2005 ( $d_{iq}$ ) i 2015 ( $d_{it}$ ) obliczono miernik Theila, który mierzy nie tylko rząd odchylen od wartości porównywanych miar agregatowych  $d_{it}$  i  $d_{iq}$ , ale również rząd odchylen będący rezultatem (Walesiak, 1993; 2016, s. 89–90):

- różnicy między średnimi wartościami miar agregatowych  $d_{it}$  i  $d_{iq}$ ,
- różnicy w dyspersji wartości miar agregatowych  $d_{it}$  i  $d_{iq}$ ,
- niezgodności kierunku zmian wartości miar agregatowych  $d_{it}$  i  $d_{iq}$ .

Miernik Theila przybiera następującą postać:

$$W_{iq}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_{it} - d_{iq})^2. \quad (4)$$

Miernik  $W_{iq}^2$  przybiera wartość 0 wtedy, gdy nie ma żadnych różnic w wartościach miar agregatowych  $d_{it}$  i  $d_{iq}$ . Pierwiastek kwadratowy z wyrażenia (4) informuje, jaki jest przeciętny rząd odchylen wartości porównywanych miar agregatowych  $d_{it}$  i  $d_{iq}$ .

Wielkość wyrażoną wzorem (4) można rozłożyć na sumę trzech składników:

$$W_{iq}^2 = W_1^2 + W_2^2 + W_3^2, \quad (5)$$

pozwalających określić bliżej „rząd” i „charakter” różnic w wartościach miar agregatowych  $d_{it}$  i  $d_{iq}$ .

Mienniki cząstkowe  $W_1^2$ ,  $W_2^2$  i  $W_3^2$  (niosące informacje, o których mowa w punktach 1), 2) i 3) określają wzory:

$$W_1^2 = (\bar{d}_{\bullet t} - \bar{d}_{\bullet q})^2, \quad (6)$$

$$W_2^2 = (S_t - S_q)^2, \quad (7)$$

$$W_3^2 = 2S_t S_q (1 - r), \quad (8)$$

gdzie:  $\bar{d}_{\bullet t}$ ,  $S_t(\bar{d}_{\bullet q}, S_q)$  to odpowiednio średnia arytmetyczna i odchylenie standardowe wartości  $t$ -tej ( $q$ -tej) miary agregatywnej  $d_{it}$  i  $d_{iq}$ ;

$r$  – współczynnik korelacji liniowej Pearsona między  $\underline{d}_{\bullet t} = (d_{1t}, \dots, d_{nt})$  i  $\underline{d}_{\bullet q} = (d_{1q}, \dots, d_{nq})$ .

Dekompozycja wzoru (5) na trzy składniki została zaczerpnięta ze wzoru Theila na miernik rzędu dokładności prognozy typu *ex post* (Theil, 1961)<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> W literaturze polskiej zob. np. prace: Pawłowski (1973, s. 119), Zeliaś (1984, s. 184).



### 3. WYNIKI BADANIA EMPIRYCZNEGO

Według Bernarda (zob. np. Dickes, Valentova, 2013, s. 829) spójność społeczna rozważana jest w trzech sferach: ekonomicznej, politycznej oraz społeczno-kulturowej. W przeprowadzanym badaniu nie uwzględniono sfery politycznej.

W badaniu empirycznym wykorzystane zostaną dane statystyczne dotyczące oceny spójności społecznej regionu dolnośląskiego w przekroju powiatów obejmujące następujące dziedziny: dochody i aktywność ekonomiczna ludności (dochody i siła nabywczą; zabezpieczenie społeczne; zatrudnienie i aktywność ekonomiczna); warunki zamieszkiwania ludności (standard powierzchniowy i techniczno-sanitarny mieszkań itd.); dostępność usług i przestrzeni publicznej (zdrowie, edukacja, rekreacja; kultura, informacja, bezpieczeństwo; jakość i dostępność dróg publicznych, zieleń, środowisko itd.).

Ocenę spójności społecznej regionu dolnośląskiego w przekroju powiatów Dolnego Śląska przeprowadzono z wykorzystaniem 28 zmiennych metrycznych (mierzonych na skali ilorazowej):

#### I. DOCHODY I AKTYWNOŚĆ EKONOMICZNA LUDNOŚCI

- x1 – Przeciętne miesięczne wynagrodzenie brutto (w zł) – stymulanta, dane z roku 2005 i 2015.
- x2 – Osoby w gospodarstwach domowych (poniżej kryterium dochodowego) korzystające z pomocy społecznej na 1000 ludności – destymulanta, dane z roku 2009 i 2015.
- x3 – Wskaźnik obciążenia demograficznego (ludność w wieku nieprodukcyjnym na 100 osób w wieku produkcyjnym) – destymulanta, dane z roku 2005 i 2015.
- x4 – Udział kobiet wśród pracujących w % – nominanta (o wartości nominalnej 50%), dane z roku 2005 i 2014.
- x5 – Stopa bezrobocia ogółem w % – destymulanta, dane z roku 2005 i 2015.
- x6 – Udział młodzieży (w wieku do 25 lat) wśród zarejestrowanych bezrobotnych w % – destymulanta, dane z roku 2005 i 2015.
- x7 – Udział długotrwale bezrobotnych (tj. powyżej 12 miesięcy) wśród zarejestrowanych bezrobotnych w % – destymulanta, dane z roku 2005 i 2015.
- x8 – Oferty pracy na 1000 zarejestrowanych bezrobotnych – stymulanta, dane z roku 2005 i 2015.

#### II. WARUNKI ZAMIESZKIWANIA LUDNOŚCI

- x9 – Przeciętna powierzchnia użytkowa mieszkania na mieszkańca w m<sup>2</sup> – stymulanta, dane z roku 2005 i 2015.
- x10 – Przeciętna liczba osób na izbę – destymulanta, dane z roku 2005 i 2015.

- x11 – Odsetek ogółu mieszkań wyposażonych w instalację wodociągową – stymulanta, dane z roku 2005 i 2014.
- x12 – Odsetek ogółu mieszkań wyposażonych w łazienkę – stymulanta, dane z roku 2005 i 2014.
- x13 – Odsetek ogółu mieszkań wyposażonych w centralne ogrzewanie – stymulanta, dane z roku 2005 i 2014.

### III. DOSTĘPNOŚĆ USŁUG I PRZESTRZENI PUBLICZNEJ

- x14 – Lekarze i dentyści na 10 tys. ludności – stymulanta, dane z roku 2006 i 2014.
- x15 – Przychodnie zdrowia na 10 tys. ludności – stymulanta, dane z roku 2005 i 2015.
- x16 – Ludność na ogólnodostępną aptekę – destymulanta, dane z roku 2005 i 2015.
- x17 – Miejsca w placówkach stacjonarnej pomocy społecznej na 10 tys. ludności – stymulanta, dane z roku 2005 i 2015.
- x18 – Dzieci w placówkach wychowania przedszkolnego na 1000 dzieci w wieku 3–5 lat – stymulanta, dane z roku 2005 i 2015.
- x19 – Uczniowie w szkołach podstawowych dla dzieci i młodzieży na oddział (klasę) – destymulanta, dane z roku 2005 i 2015.
- x20 – Uczniowie w gimnazjach dla dzieci i młodzieży na oddział (klasę) – destymulanta, dane z roku 2005 i 2015.
- x21 – Uczniowie uczący się obowiązkowo języka angielskiego w szkołach podstawowych i gimnazjalnych dla dzieci i młodzieży (w % ogółu uczniów) – stymulanta, dane z roku 2008 i 2015.
- x22 – Uczniowie w liceach ogólnokształcących dla młodzieży na oddział (klasę) – destymulanta, dane z roku 2005 i 2015.
- x23 – Ćwiczący w klubach sportowych na 1000 ludności – stymulanta, dane z roku 2006 i 2014.
- x24 – Księgozbiór bibliotek publicznych na 1000 ludności (w wol.) – stymulanta, dane z roku 2005 i 2015.
- x25 – Uczestnicy imprez kulturalnych (organizowanych przez centra, domy, ośrodki kultury, kluby i świetlice) na 1000 ludności – stymulanta, dane z roku 2007 i 2015.
- x26 – Powierzchnia zieleni publicznej (parki, zieleńce i tereny zieleni osiedlowej) na 10 tys. ludności (w ha) – stymulanta, dane z roku 2005 i 2015.
- x27 – Długość dróg gminnych i powiatowych o nawierzchni twardej ulepszonej na 10 tys. ludności (w km) – stymulanta, dane z roku 2005 i 2014.
- x28 – Korzystający z oczyszczalni ścieków (w % ogółu ludności) – stymulanta, dane z roku 2005 i 2015.

Dane statystyczne dla większości zmiennych pochodzą z lat 2005 i 2015 z Banku Danych Lokalnych (BDL) Głównego Urzędu Statystycznego. Z uwagi na brak danych statystycznych dla 10 zmiennych wprowadzono dostępne dane z najbliższych lat.

Wałbrzych w latach 2002–2012 nie miał statusu miasta na prawach powiatu będąc jedną z gmin miejskich powiatu wałbrzyskiego. Z uwagi na niemożność dezagregacji danych z roku 2005 dla zmiennych x1, x5, x14 i x28 dla Wałbrzycha i powiatu wałbrzyskiego przyjęto identyczne wartości.

Zgodnie z metodyką badawczą z punktu 2 dla macierzy danych  $[x_{ij}]$  obejmującej macierze danych z okresów  $t$  (macierz danych  $[x_{ij}^t]$ ) i  $q$  (macierz danych  $[x_{ij}^q]$ ):

- a) zamieniono nominantę x4 na stymulantę zgodnie z formułą różnicową (Walesiak, 2016, s. 19):

$$x_{ij} = -|x_{ij}^N - nom_j|, \quad (9)$$

gdzie:  $x_{ij}^N$  – wartość  $j$ -tej nominanty zaobserwowana w  $i$ -tym obiekcie,

$nom_j$  – nominalny poziom  $j$ -tej zmiennej,

- b) ustalono wspólny wzorzec i antywzorzec rozwoju na podstawie macierzy obejmującej dane z okresów  $t$  i  $q$ , tj. macierzy  $[x_{ij}]$ ,  
 c) przeprowadzono normalizację wartości zmiennych dla wspólnej macierzy danych z okresów  $t$  i  $q$  (macierz  $[x_{ij}]$ ) wykorzystując standaryzację:  $z_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j}$ ,  
 d) w badaniu przyjęto wagi jednakowe dla kryteriów podrzędnych (dziedzin), ale zróżnicowane dla zmiennych ujętych w tabeli 1.

Tabela 1.

Wagi dla kryteriów podrzędnych (dziedzin) opisujących poziom spójności społecznej województwa dolnośląskiego

| Wyszczególnienie                             | Kryterium podrzędne                      |                                 |                                           |
|----------------------------------------------|------------------------------------------|---------------------------------|-------------------------------------------|
|                                              | Dochody i aktywność ekonomiczna ludności | Warunki zamieszkiwania ludności | Dostępność usług i przestrzeni publicznej |
| Wagi dla dziedzin                            | 1/3                                      | 1/3                             | 1/3                                       |
| Liczba zmiennych                             | 8                                        | 5                               | 15                                        |
| Waga dla 1 zmiennej w ramach danej dziedziny | 1/24                                     | 1/15                            | 1/45                                      |

Źródło: opracowanie własne.

Uporządkowanie powiatów województwa dolnośląskiego według wartości miary  $d_i$  (poziom spójności społecznej) dla roku 2005 i 2015 prezentuje tabela 2. W obliczeniach zastosowano pakiet clusterSim (Walesiak, Dudek, 2016) programu R (R Development Core Team, 2016).

Tabela 2.

Uporządkowanie powiatów województwa dolnośląskiego według poziomu spójności społecznej  
(wartości miary  $d_i$ ) dla roku 2005 i 2015

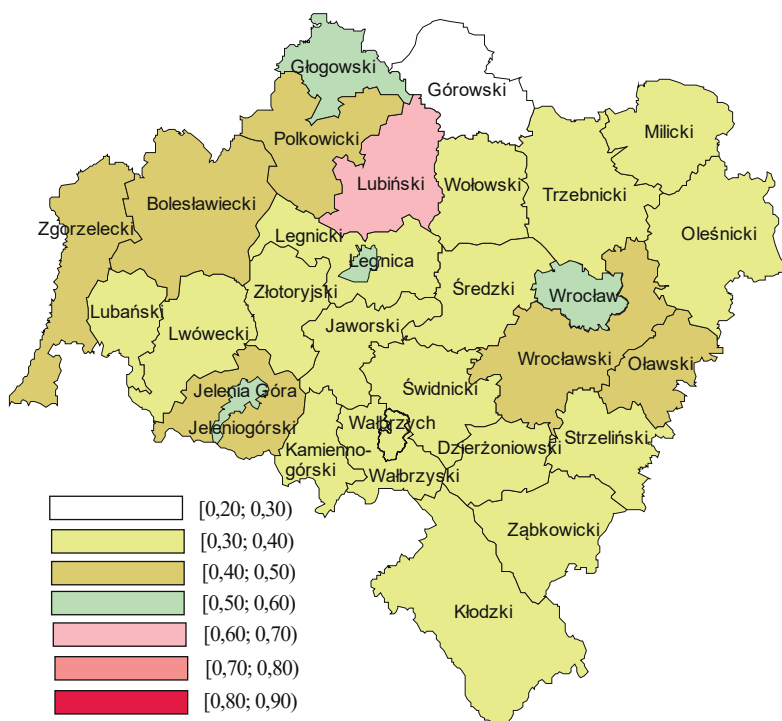
| Powiat         | 2015     |       | 2005     |       | $\Delta d_i = d_{it} - d_{iq}$ | Przyrost rangi |
|----------------|----------|-------|----------|-------|--------------------------------|----------------|
|                | $d_{it}$ | Ranga | $d_{iq}$ | Ranga |                                |                |
| wrocławski     | 0,8427   | 1     | 0,4932   | 6     | 0,3495                         | 5              |
| Wrocław        | 0,8240   | 2     | 0,5948   | 2     | 0,2292                         | 0              |
| lubiński       | 0,7468   | 3     | 0,6035   | 1     | 0,1434                         | -2             |
| wołowski       | 0,7424   | 4     | 0,3766   | 14    | 0,3659                         | 10             |
| średzki        | 0,7423   | 5     | 0,3504   | 21    | 0,3919                         | 16             |
| oławski        | 0,7418   | 6     | 0,4366   | 9     | 0,3052                         | 3              |
| zgorzelecki    | 0,7256   | 7     | 0,4324   | 10    | 0,2933                         | 3              |
| trzebnicki     | 0,7191   | 8     | 0,3898   | 12    | 0,3293                         | 4              |
| bolesławiecki  | 0,7177   | 9     | 0,4446   | 8     | 0,2731                         | -1             |
| Jelenia Góra   | 0,7173   | 10    | 0,5699   | 3     | 0,1474                         | -7             |
| jeleniogórski  | 0,7158   | 11    | 0,4538   | 7     | 0,2621                         | -4             |
| Legnica        | 0,6816   | 12    | 0,5128   | 5     | 0,1688                         | -7             |
| głogowski      | 0,6763   | 13    | 0,5452   | 4     | 0,1312                         | -9             |
| oleśnicki      | 0,6763   | 14    | 0,3856   | 13    | 0,2907                         | -1             |
| legnicki       | 0,6689   | 15    | 0,3728   | 15    | 0,2961                         | 0              |
| ząbkowicki     | 0,6583   | 16    | 0,3382   | 24    | 0,3201                         | 8              |
| świdnicki      | 0,6570   | 17    | 0,3700   | 18    | 0,2870                         | 1              |
| dzierżoniowski | 0,6519   | 18    | 0,3600   | 20    | 0,2918                         | 2              |
| jaworski       | 0,6503   | 19    | 0,3609   | 19    | 0,2894                         | 0              |
| kłodzki        | 0,6482   | 20    | 0,3707   | 16    | 0,2776                         | -4             |
| połkowicki     | 0,6261   | 21    | 0,4252   | 11    | 0,2009                         | -10            |
| strzeliński    | 0,6247   | 22    | 0,3184   | 27    | 0,3063                         | 5              |
| milicki        | 0,6173   | 23    | 0,3469   | 23    | 0,2704                         | 0              |
| złotoryjski    | 0,6163   | 24    | 0,3701   | 17    | 0,2462                         | -7             |
| lubański       | 0,5830   | 25    | 0,3285   | 25    | 0,2545                         | 0              |
| lwówecki       | 0,5765   | 26    | 0,3489   | 22    | 0,2276                         | -4             |
| wałbrzyski     | 0,5560   | 27    | 0,3017   | 28    | 0,2543                         | 1              |
| Wałbrzych      | 0,5402   | 28    | 0,3276   | 26    | 0,2126                         | -2             |
| kamiennogórski | 0,5369   | 29    | 0,3006   | 29    | 0,2363                         | 0              |
| górowski       | 0,4930   | 30    | 0,2801   | 30    | 0,2130                         | 0              |

Tabela 2. (cd.)

| Parametr                         | Wartość w 2015 | x | Wartość w 2005 | x | Przyrost | x |
|----------------------------------|----------------|---|----------------|---|----------|---|
| Średnia                          | 0,6658         | x | 0,4037         | x | 0,2622   | x |
| Odchylenie standardowe           | 0,0803         | x | 0,0872         | x | -0,0070  | x |
| Mediana                          | 0,6636         | x | 0,3717         | x | 0,2919   | x |
| Medianowe odchylenie bezwzględne | 0,0799         | x | 0,0722         | x | 0,0077   | x |

Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem pakietu clusterSim programu R.

W 2005 roku najwyższą wartość miary  $d_i$  dotyczyła powiatu lubińskiego (0,6035), miasta Wrocław (0,5948) oraz miasta Jelenia Góra (0,5699). Najniższą natomiast wartość tejże miary dotyczyła powiatów: górowskiego (0,2801), kamiennogórskiego (0,3006) oraz wałbrzyskiego (0,3017). Ilustracją tego zagadnienia w 2005 roku jest rysunek 1.



Rysunek 1. Klasy powiatów województwa dolnośląskiego ze względu na poziom spójności społecznej w roku 2005 (wartości miary  $d_{iq}$ )

Źródło: opracowanie własne.

Map of voivodeships in Lower Silesia, Poland, colored by the percentage of the population with a high school diploma. The legend indicates the following ranges:

- [0,20; 0,30)
- [0,30; 0,40)
- [0,40; 0,50)
- [0,50; 0,60)
- [0,60; 0,70)
- [0,70; 0,80)
- [0,80; 0,90)

Źródło: opracowanie własne.

W wyniku zastosowania skryptu programu R otrzymano wyniki dekompozycji miernika Theila ujęte w tabeli 3 ( $q$  oznacza rok 2005, a  $t$  rok 2015).

Tabela 3.

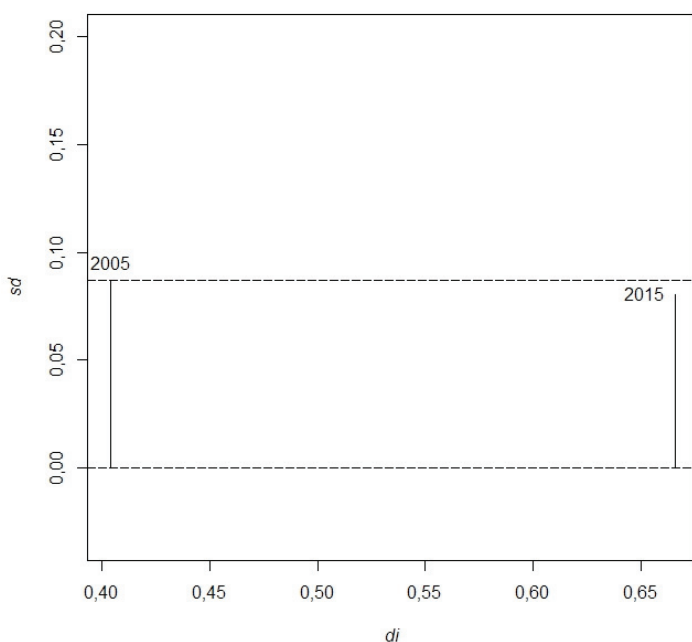
## Wyniki dekompozycji miernika Theila

| Wyszczególnienie                                                   | $q = 2005$           | $t = 2015$ |
|--------------------------------------------------------------------|----------------------|------------|
| Średnie z wartości miary agregatywnej                              | 0,4036519            | 0,6658211  |
| Odchylenia standardowe z wartości miary agregatywnej               | 0,0872235            | 0,0802545  |
| Współczynnik korelacji Pearsona między wartości miary agregatywnej | 0,7234676            |            |
| Wartość miernika $W$ Theila                                        | 0,2695417            |            |
| Wartość miernika $W^2$ Theila                                      | 0,07265272 (100,00%) |            |
| Wartość miernika cząstkowego $W_1^2$ Theila                        | 0,06873266 (94,60%)  |            |
| Wartość miernika cząstkowego $W_2^2$ Theila                        | 0,00004857 (0,07%)   |            |
| Wartość miernika cząstkowego $W_3^2$ Theila                        | 0,00387150 (5,33%)   |            |

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu R.

Przeciętny rząd odchyłeń wartości porównywanych miar agregatowych  $d_i$  z lat 2005 i 2015 (miernik  $W$  Theila) wyniósł 0,2695. Było to wynikiem głównie wzrostu średniej wartości miary agregatywnej  $d_i$  (miernik cząstkowy  $W_1^2 = 0,06873$ ), a więc znacznego podwyższenia poziomu spójności społecznej (wzrost średniej wartości miary agregatywnej o 0,2622). Nastąpił niewielki spadek w zróżnicowaniu wartości miary agregatywnej  $d_i$  świadczący o zmniejszeniu stopnia dysproporcji między powiatami ze względu na spójność społeczną ( $W_2^2 = 0,0000486$  dla  $S_t = 0,0803$  i  $S_q = 0,0872$ )<sup>4</sup>. Rysunek 3 pokazuje relacje między poziomem a stopniem dysproporcji spójności społecznej dla powiatów Dolnego Śląska w latach 2005–2015. Zanotowano dość dużą zgodność kierunku zmian wartości miary agregatywnej  $d_i$  z porównywanych okresów (miernik cząstkowy  $W_3^2 = 0,00387$  dla  $r = 0,7235$ ).

<sup>4</sup> Wskazania na podstawie medianowego odchylenia bezwzględnego są odmienne (zob. tabela 2).



Rysunek 3. Poziom ( $d_i$ ) a stopień dysproporcji ( $sd$ ) spójności społecznej dla powiatów Dolnego Śląska w latach 2005–2015

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu R.

Wartości miary  $d_i$  dla poszczególnych powiatów województwa dolnośląskiego w badanym okresie uległy zróżnicowanym zmianom. Relatywnie największy zakres zmian w analizowanych dziedzinach społecznej spójności, czyli w zakresie dochodów i aktywności ekonomicznej ludności, warunków mieszkaniowych oraz dostępności usług i przestrzeni publicznej dotyczy powiatów położonych w bliskim sąsiedztwie Wrocławia, a zwłaszcza średzkiego, wołowskiego i wrocławskiego, a najmniejszy powiatów: głogowskiego i lubińskiego oraz miast na prawach powiatów: Jeleniej Góry i Legnicy. Zakres tychże zmian prezentuje rysunek 4.





Rysunek 4. Klasy powiatów województwa dolnośląskiego ze względu na przyrost w poziomie spójności społecznej w latach 2005–2015 ( $\Delta d_i = d_{it} - d_{iq}$ )

Źródło: opracowanie własne.

W 2015 roku w porównaniu do 2005 roku (tabela 2) największy zakres zmian w rankingu in plus miały powiaty: średzki (z pozycji 21. na 5.), wołowski (z 14. na 4.) oraz ząbkowicki (z 24. na 16.), z kolei in minus powiaty polkowicki (z pozycji 11. na 21.), głogowski (z 4. na 13.)

Należy przy tym wskazać, iż na zróżnicowany zakres zmian spójności społecznej regionu dolnośląskiego w przekroju powiatów oddziaływały m.in. zmiany liczebności ich zaludnienia, co w latach 2005–2015 przedstawia tabela 4.

Tabela 4.

Ludność powiatów województwa dolnośląskiego w latach 2005–2015

| Powiat                       | 2005    | 2015    | Zmiany<br>w latach 2005–2015<br>(+) (–) | Wskaźnik zmian<br>(2005 = 100) |
|------------------------------|---------|---------|-----------------------------------------|--------------------------------|
| PODREGION JELENIOGÓRSKI      |         |         |                                         |                                |
| bolesławiecki                | 88 341  | 90 199  | +1 858                                  | 102,10                         |
| jaworski                     | 52 210  | 51 451  | -759                                    | 98,55                          |
| jeleniogórski                | 63 850  | 64 599  | +749                                    | 101,17                         |
| kamiennogórski               | 46 633  | 44 402  | -2 231                                  | 95,22                          |
| lubański                     | 57 188  | 55 533  | -1 655                                  | 97,11                          |
| lwówecki                     | 48 305  | 46 677  | -1 628                                  | 96,63                          |
| zgorzelecki                  | 94 765  | 91 824  | -2 941                                  | 96,90                          |
| złotoryjski                  | 45 885  | 44 598  | -1 287                                  | 97,20                          |
| Jelenia Góra                 | 87 017  | 81 010  | -6 007                                  | 93,10                          |
| PODREGION LEGNICKO-GŁOGOWSKI |         |         |                                         |                                |
| głogowski                    | 87 669  | 90 205  | +2 536                                  | 102,89                         |
| górowski                     | 36 607  | 35 940  | -667                                    | 98,18                          |
| legnicki                     | 53 007  | 55 051  | +2 044                                  | 103,86                         |
| lubiński                     | 105 781 | 106 319 | +538                                    | 100,51                         |
| polkowicki                   | 61 144  | 63 057  | +1 913                                  | 103,13                         |
| Legnica                      | 105 750 | 100 886 | -4 864                                  | 95,40                          |
| PODREGION WAŁBRZYSKI         |         |         |                                         |                                |
| dzierżoniowski               | 105 210 | 103 349 | -1 861                                  | 98,23                          |
| kłodzki                      | 167 058 | 162 465 | -4 593                                  | 97,25                          |
| świdnicki                    | 160 675 | 159 633 | -1 042                                  | 99,35                          |
| wałbrzyski                   | 58 934  | 57 023  | -1 911                                  | 96,76                          |
| ząbkowicki                   | 69 521  | 66 971  | -2 550                                  | 96,33                          |
| Wałbrzych                    | 126 465 | 115 453 | -11 012                                 | 91,29                          |
| PODREGION WROCŁAWSKI         |         |         |                                         |                                |
| milicki                      | 36 915  | 37 213  | +298                                    | 100,81                         |
| oleśnicki                    | 103 335 | 106 486 | +3 151                                  | 103,05                         |
| oławski                      | 71 103  | 76 064  | +4 961                                  | 106,98                         |

Tabela 4. (cd.)

| Powiat                     | 2005    | 2015    | Zmiany<br>w latach 2005–2015<br>(+) (–) | Wskaźnik zmian<br>(2005 = 100) |
|----------------------------|---------|---------|-----------------------------------------|--------------------------------|
| strzeliński                | 44 240  | 44 165  | -75                                     | 99,83                          |
| średzki                    | 49 115  | 52 837  | +3 722                                  | 107,58                         |
| trzebnicki                 | 77 172  | 83 699  | +6 527                                  | 108,46                         |
| wołowski                   | 47 539  | 47 194  | -345                                    | 99,27                          |
| wrocławski                 | 100 866 | 134 145 | +33 279                                 | 132,99                         |
| PODREGION – MIASTO WROCŁAW |         |         |                                         |                                |
| Wrocław                    | 635 932 | 635 759 | -173                                    | 99,97                          |

Źródło: opracowanie własne.

W badanym okresie widoczne były istotne zmiany liczby ludności w poszczególnych powiatach regionu dolnośląskiego. Największy przyrost w tym zakresie w latach 2005–2015 dotyczył powiatu wrocławskiego, którego populacja zwiększyła się o niemal 33%. Ponadto relatywnie duży wzrost liczby ludności odnotowano w powiatach trzebnickim (o prawie 8,5%), średzkim (o 7,6%) i oławskim (o 7%). To niewątpliwie efekt postępujących procesów suburbanizacji związanych z wieloaspektowym oddziaływaniem Wrocławia. To oddziaływanie widoczne jest także odnośnie relatywnie wysokiego zakresu zmian poziomu spójności społecznej, co ilustruje rysunek 4. Z drugiej natomiast strony należy dostrzec powiaty o relatywnie znacznej depopulacji. Do grupy tej należą w szczególności miasta: Wałbrzych (spadek zaludnienia o 8,7%), Jelenia Góra (o 6,9%) i Legnica (o 4,6%) oraz powiat kamiennogórski (o prawie 4,8%). Ogólnie ujmując, depopulacją objęte są podregiony wałbrzyski i jeleniogórski.

#### 4. WYZWANIA WOBEC POLITYKI SPÓJNOŚCI SPOŁECZNEJ WOJEWÓDZTWA DOLNOŚLĄSKIEGO DO ROKU 2020

Region dolnośląski obejmuje obszar względnie spójny funkcjonalnie zarówno w aspektach geograficznych i historycznych. Charakteryzuje się jednak wieloma dysproporcjami rozwojowymi, w tym m.in. w warunkach życia lokalnych społeczności, co staje się ewidentną przesłanką prowadzenia efektywnej polityki spójności gospodarczej, społecznej i terytorialnej w pełni wpisanej w politykę rozwoju kraju i Unii Europejskiej oraz ściśle powiązanej ze strategicznymi priorytetami wyznaczonymi przez Unię Europejską oraz Polskę. Polityka spójności w każdym terytorialnym wymiarze (także regionalnym) ma na celu wspieranie działań prowadzących do wyrównania warunków ekonomicznych i społecznych we wszystkich jednostkach terytorialnych.

Polityka spójności Unii Europejskiej w latach 2007–2013 ukierunkowana była na realizację trzech najważniejszych celów, a mianowicie: konwergencji, podniesienia konkurencyjności regionów i zatrudnienia oraz europejskiej współpracy terytorialnej. Polityka spójności nabrała szczególnego znaczenia w kontekście dążenia Unii Europejskiej do realizacji celów przyjętej w dniu 17 czerwca 2010 r. przez Radę Europejską Strategii Europa 2020 będącej wieloletnim ukierunkowaniem krajów i regionów na inteligentny i zrównoważony rozwój sprzyjający włączeniu społecznemu. Stąd w latach 2014–2020 unijna polityka spójności koncentruje się na realizacji nadrzędnego celu określonego jako „inwestowanie dla rozwoju i tworzenia miejsc pracy”. Cele tejże polityki są szczególnym wyrazem solidarności z biedniejszymi i słabszymi regionami Unii Europejskiej (Obrębalski, 2014, s. 22).

Realizacja polityki spójności w wymiarze regionalnym odbywa się m.in. poprzez wdrażanie strategii rozwoju i regionalnych programów operacyjnych. Celem nadrzędnym Strategii Rozwoju Województwa Dolnośląskiego do roku 2020 jest „Nowoczesna gospodarka i wysoka jakość życia w atrakcyjnym środowisku” (*Strategia rozwoju województwa...*, 2013, s. 24). Cel ten integruje trzy sfery funkcjonowania regionu, a mianowicie, gospodarczą, społeczną oraz przestrzenną (środowiskową). Jego osiągnięcie możliwe będzie poprzez realizację wielu przedsięwzięć ujętych w ramach ośmiu celów szczegółowych.

Cele Strategii Rozwoju Województwa Dolnośląskiego odnoszą się do perspektywy roku 2020. W skali operacyjnej, tj. w latach 2014–2020, ich osiągnięciu służyć będzie m.in. realizacja Regionalnego Programu Operacyjnego (RPO). Dlatego też cel główny RPO zbieżny jest z celem nadrzędnym strategii rozwoju województwa dolnośląskiego.

Cel główny RPO na lata 2014–2020 został wymownie i proroczo określony jako „Wzrost konkurencyjności Dolnego Śląska zapewniający poprawę poziomu życia jego mieszkańców przy zachowaniu zasad zrównoważonego rozwoju” (*Regionalny Program Operacyjny...*, 2014, s. 30–31). Tak ujętemu celowi podporządkowano dziesięć dziedzinowych osi priorytetowych.

Polityka regionalna we wszystkich jej przestrzennych wymiarach w latach 2014–2020 oparta jest na zasadzie zintegrowanego podejścia terytorialnego (integrated territorial approach). Jedną zaś z najważniejszych przesłanek jej prowadzenia (także w regionie dolnośląskim) jest wewnętrzne przestrzenne zróżnicowanie poziomu rozwoju społecznego i gospodarczego jednostek terytorialnych. Dążenie zatem do redukcji różnic poziomu rozwoju gospodarczego, jakości życia lokalnych społeczności oraz wyrównania możliwości rozwojowych poszczególnych części województw jest istotnym celem regionalnej polityki spójności prowadzonej przez władze samorządowe (Obrębalski, Walesiak, 2014, s. 97).

Zbyt duże dysproporcje w jakości życia mieszkańców regionu dolnośląskiego widoczne nie tylko w przekroju powiatów, ale i między miastami a miejscowościami wiejskimi sygnalizują konieczność podjęcia efektywnych przedsięwzięć ukierunkowa-

nych na eliminację bądź istotne ograniczenie nierówności w sferze społecznej oraz wzrost społecznej spójności regionu.

W polityce rozwoju i spójności regionu dolnośląskiego do roku 2020 stosowane są różne instrumenty, w szczególności zaś finansowe, prawne i infrastrukturalne. Jednym z nich był w latach 2009–2016 Dolnośląski Fundusz Pomocy Rozwojowej dedykowany słabszym ekonomicznie gminom. Wsparcie z tegoż funduszu przyniosło wiele korzystnych efektów m.in. w sferze infrastruktury technicznej i społecznej. Przyczyniło się przy tym do poprawy warunków bytowych wielu lokalnych społeczności. Fundusz ten stał się jednym z finansowych instrumentów regionalnej polityki spójności i polityki wyrównawczej rozwoju województwa dolnośląskiego (Obrębalski, 2016).

## 5. PODSUMOWANIE

W artykule zaproponowano metodykę postępowania, która pozwala na pomiar i ocenę zmian poziomu oraz stopnia zróżnicowania spójności społecznej regionów. Następnie dokonano oceny zmian poziomu oraz stopnia zróżnicowania spójności społecznej powiatów województwa dolnośląskiego w latach 2005–2015. W latach 2005–2015 podwyższony został poziom spójności społecznej wszystkich powiatów (choć w zróżnicowanym stopniu) oraz zmniejszył się nieznacznie stopień zróżnicowania spójności społecznej powiatów województwa dolnośląskiego. Obserwowane są jednak wyraźne międzypowiatowe różnice w analizowanych dziedzinach tejże spójności, czyli w zakresie dochodów i aktywności ekonomicznej ludności, jej warunków mieszkaniowych oraz dostępności usług i przestrzeni publicznej. Zakres tegoż zróżnicowania jest swoistego rodzaju wyzwaniem wobec samorządowych władz województwa dolnośląskiego prowadzących politykę jego rozwoju.

Zasugerowano potrzebę weryfikacji modelu rozwoju regionu dolnośląskiego z polaryzacyjno-dyfuzyjnego na wyrównawczy, co zgodne jest z zasadą zrównoważonego rozwoju.

W obliczeniach zastosowano własne skrypty przygotowane w środowisku R.

Prowadzenie kompleksowego pomiaru, monitoringu i oceny społecznej spójności jednostek terytorialnych, w tym regionów zależy w dużym stopniu od dostępności rozległego, co do zakresu, zasobu różnorodnych informacji, zwłaszcza statystycznych. Stąd też wszelkie niedociągnięcia, a nawet braki w tym zakresie wpływają na ostateczne wyniki analizy. Nie ulega przy tym wątpliwości, iż wzrost użyteczności funkcjonalnej statystyki regionalnej wymaga dalszego jej doskonalenia, w tym wyraźnego rozszerzenia zakresu przedmiotowego i podmiotowego podejmowanych badań statystycznych. Pozwolić to może na bezproblemowe prowadzenie dynamicznych badań empirycznych w zakresie pomiaru, monitorowania i oceny rozwoju regionalnego, a w tym spójności (także społecznej) poszczególnych regionów w przekrojach powiatów, gmin i miejscowości.

## LITERATURA

- A New Strategy for Social Cohesion*, (2004), European Committee for Social Cohesion, Strasbourg.
- Balcerzak A. P., (2015), Wielowymiarowa analiza spójności społecznej w krajach Unii Europejskiej w kontekście strategii Europa 2020, w: Bartniczak B., Trzeciak K., (red.), *Aktualne trendy w zarządzaniu środowiskiem*, Wydawnictwo AD REM, Jelenia Góra, 343–352.
- Concerted Development of Social Cohesion Indicators. Methodological Guide*, (2005), Council of Europe Publishing, Strasbourg.
- Borys T., (1984), *Kategoria jakości w statystycznej analizie porównawczej*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, 284, Seria: Monografie i Opracowania 23.
- Dickes P., Valentova M., (2013), Construction, Validation and Application of the Measurement of Social Cohesion in 47 European Countries and Regions, *Social Indicators Research*, 113, 827–846.
- Dickes P., Valentova M., Borsenberger M., (2010), Construct Validation and Application of a Common Measure of Social Cohesion in 33 European Countries, *Social Indicators Research*, 98, 451–473.
- Hellwig Z., (1968), Zastosowanie metody taksonomicznej do typologicznego podziału krajów ze względu na poziom ich rozwoju i strukturę wykwalifikowanych kadr, *Przegląd Statystyczny*, 15 (4), 307–327.
- Hellwig Z., (1972), Procedure of Evaluating High-Level Manpower Data and Typology of Countries by Means of the Taxonomic Method, w: Gostkowski Z., (red.), *Towards a System of Human Resources Indicators for Less Developed Countries*, Papers Prepared for UNESCO Research Project, Ossolineum, The Polish Academy of Sciences Press, Wrocław, 115–134.
- Hellwig Z., (1981), Wielowymiarowa analiza porównawcza i jej zastosowanie w badaniach wielocechowych obiektów gospodarczych, w: Welfe W., (red.), *Metody i modele ekonomiczno-matematyczne w doskonaleniu zarządzania gospodarką socjalistyczną*, PWE, Warszawa, 46–68.
- Hwang C. L., Yoon K., (1981), *Multiple Attribute Decision Making – Methods and Applications. A State-of-the-Art. Survey*, New York, Springer-Verlag.
- Jenson J., (2010), *Defining and Measuring Social Cohesion*, Commonwealth Secretariat, London.
- New Strategy and Council of Europe Action Plan for Social Cohesion*, (2010), Council of Europe.
- Obrębalski M., (2014), The Development of Lower Silesia – Northern Bohemia – Saxony Border Region in the Light of EUROPE 2020 Strategy, w: Hlavaček P., Olšova P., (red.), *Regional Economy and Policy. Territories and Cities*, Jan Evangelista Purkyně University, Ústí nad Labem, 20–31.
- Obrębalski M., (2016), Dolnośląski Fundusz Pomocy Rozwojowej jako instrument regionalnej polityki spójności, w: Regiony, metropolie, miasta, *Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu* (w druku).
- Obrębalski M., Walesiak M., (2014), Terytorialny wymiar polityki rozwoju regionalnego województwa dolnośląskiego w latach 2014–2020, *Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu*, 331, 96–105.
- Pawłowski Z., (1973), *Prognozy ekonometryczne*, PWN, Warszawa.
- Rajulton F., Ravanera Z. R., Beaujot R., (2007), Measuring Social Cohesion: An Experiment Using the Canadian National Survey of Giving, Volunteering, and Participating, *Social Indicators Research*, 80, 461–492.
- R Development Core Team, (2016), *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, URL <http://www.R-project.org>.
- Regionalny Program Operacyjny Województwa Dolnośląskiego 2014–2020* (2014), Urząd Marszałkowski Województwa Dolnośląskiego, Wrocław.
- Ryszkiewicz A., (2013), *Od konwergencji do spójności i efektywności – podstawy teoretyczne polityki spójności gospodarczej, społecznej i terytorialnej Unii Europejskiej*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa.
- Strategia rozwoju województwa dolnośląskiego 2020* (2013), Urząd Marszałkowski Województwa Dolnośląskiego, Wrocław.
- Theil H., (1961), *Economic Forecasts and Policy*, North Holland, Amsterdam.

- Walesiak M., (1993), Zagadnienie oceny podobieństwa zbioru obiektów w czasie w syntetycznych badaniach porównawczych, *Przegląd Statystyczny*, 40 (1), 95–102.
- Walesiak M., (2014), Wzmacnianie skali pomiaru w statystycznej analizie wielowymiarowej, *Taksonomia* 22, *Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu*, 327, 60–68.
- Walesiak M., (2016), *Uogólniona miara odległości GDM w statystycznej analizie wielowymiarowej z wykorzystaniem programu R*. Wydanie drugie poprawione i rozszerzone, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław.
- Walesiak M., Dudek A., (2016), clusterSim: Searching for Optimal Clustering Procedure for a Data Set. R package version 0.45-1, URL <http://CRAN.R-project.org/package=clusterSim>.
- Zeliaś A., (1984), *Teoria prognozy*, PWE, Warszawa.

## SPÓJNOŚĆ SPOŁECZNA WOJEWÓDZTWA DOLNOŚLĄSKIEGO W LATACH 2005–2015 – POMIAR I OCENA ZMIAN

### Streszczenie

Miarą sukcesu rozwojowego współczesnych regionów i zarazem czynnikiem podtrzymującym trwałość tego sukcesu jest przede wszystkim jakość życia mieszkańców. Według definicji Rady Europy (*A new strategy for Social Cohesion*, 2004, s. 3) spójność społeczna to zdolność terytorialnych społeczności do zapewnienia dobrobytu wszystkim swoim członkom, zmniejszania rozwarstwień społecznych i unikania polaryzacji. W ocenie spójności społecznej regionu dolnośląskiego w przekroju powiatów w latach 2005–2015 uwzględniono zmienne z następujących dziedzin: dochody i aktywność ekonomiczna ludności, warunki mieszkaniowe ludności, dostępność usług i przestrzeni publicznej. Do pomiaru i oceny zmian poziomu spójności społecznej województwa dolnośląskiego w przekroju powiatów w latach 2005–2015 zastosowano odległość GDM1 oraz miernik Theila.

**Słowa kluczowe:** spójność społeczna, metody porządkowania liniowego, odległość GDM1, miernik Theila, program R

## SOCIAL COHESION OF LOWER SILESIA REGION IN THE PERIOD 2005–2015 – MEASUREMENT AND EVALUATION OF CHANGES

### Abstract

The measure of developmental success of contemporary regions and at the same time supporting factor for the durability of this success is primarily the quality of life of residents. According to the definition of the Council of Europe (*A new strategy for Social Cohesion*, 2004, p. 3) social cohesion is the ability of territorial communities to ensure the welfare of all its members, the reduction of social stratification and avoid polarization. According to evaluation of the social cohesion of the Lower Silesia region in cross-counties in the years 2005–2015 the variables of the following areas: income and economic activity of the population, living conditions of the population and the availability of services and public space were taken into account. To assess the measurement and the changes in the level of social cohesion of the Lower Silesia region in cross counties in the period 2005–2015 GDM1 distance and Theil measure were applied.

**Keywords:** social cohesion, linear ordering methods, GDM1 distance, Theil measure, R program



**Redakcja Przeglądu Statystycznego składa podziękowania Recenzentom  
artykułów nadesłanych do publikacji w roku 2017 w osobach:**

Aleksandra Baszczyńska  
Andrzej Bąk  
Michał Bernardelli  
Jakub Bijak  
Justyna Brzezińska  
Katarzyna Brzozowska-Rup  
Barbara Dańska-Borsiak  
Grażyna Dehnel  
Paweł Dykas  
Józef Dziechciarz  
Waldemar Florczak  
Svitlana Galeshchuk  
Barbara Gładysz  
Montserrat Guillen  
Andreas Hefti  
Roman Huptas  
Alina Jędrzejczak  
Bogumił Kamiński  
Yu-Hsien Kao  
Robert Kelm  
Paweł Kliber  
Grzegorz Kończak  
Daniel Kosiorowski  
Maciej Kostrzewski  
Mirosław Krzyśko  
Dorota Kuchta  
Łukasz Kwiatkowski  
Łukasz Lenart  
Maciej Malaczewski  
Krzysztof Malaga  
Jerzy Marzec  
Alina Matei  
Anna Michalak  
Tomasz Michalski

Jerzy Michnik  
Paweł Miłobędzki  
Piotr Misztal  
Andrzej Młodak  
Krzysztof Najman  
Włodzimierz Ogryczak  
Jorge Oviedo  
Barbara Pawełek  
Krzysztof Piasecki  
Michał Pietrzak  
Robert Pietrzykowski  
Piotr Pluciennik  
Jan Purczyński  
Jarosław Ramik  
Małgorzata Rószkiewicz  
Dobromił Serwa  
Teresa Słaby  
Elżbieta Sojka  
Honorata Sosnowska  
Józef Stawicki  
Jan Jacek Sztudynger  
Wit Urban  
Markus Walzl  
Stanisław Wieteska  
Bartosz Witkowski  
Magdalena Wojciech  
Michael Wolf  
Justyna Wróblewska  
Felix Wysocki  
Kazimierz Zaráś  
Janez Zerovnik  
Tomasz Żądło  
Tomasz Żylicz