

Dariusz KACPRZAK¹

Podwójna rozmyta metoda TOPSIS wspomagająca podejmowanie decyzji grupowych²

1. WPROWADZENIE

Podejmowanie decyzji jest nieodłącznym elementem życia codziennego i polega na wyborze jednego z rozważanych i uznanych za możliwe do realizacji wariantów przyszłego działania, tzw. wariantu preferowanego, które są charakteryzowane przez różne, zazwyczaj sprzeczne kryteria. Rosnąca złożoność otaczającego nas świata oraz mnogość rozważanych problemów decyzyjnych powoduje, że podejmowanie właściwych decyzji staje się zadaniem coraz trudniejszym. W tej sytuacji możemy wykorzystać tzw. dyskretne metody wielokryterialne wspomaganie decyzji (ang. *Multiple Criteria Decision Making* – MCDM). Dysponują one gotowymi algorytmami pozwalającymi na porządkowanie liniowe możliwych wariantów decyzyjnych oraz wskazanie wariantu preferowanego. Metody te stały się bardzo popularne w ostatnich latach i znajdują szerokie zastosowanie w rozwiązywaniu rzeczywistych problemów decyzyjnych (Behzadian i inni, 2012; Abdullah, Adawiyah, 2014).

Celem pracy jest przedstawienie modyfikacji rozmytej metody TOPSIS opracowanej przez Chena (2000) dla grupy decydentów. Z zaproponowanego przez niego algorytmu wynika, że grupowa macierz decyzyjna (i grupowy wektor wag) dla grupy decydentów jest określona jako średnia arytmetyczna indywidualnych macierzy decyzyjnych (i indywidualnych wektorów wag). Jednak w grupie decydentów, każdy z nich może specjalizować się w różnych zagadnieniach, mieć różne preferencje czy takie unikalne cechy, jak wiedzę, umiejętności, doświadczenie, osobowość itp. Powoduje to, że każdy z decydentów może mieć inny wpływ na wynik końcowy, tzn. grupową macierz decyzyjną (i grupowy wektor wag). Oznacza to, że w odróżnieniu do agregacji metodą średniej arytmetycznej, wagi określające istotność decydentów w grupie mogą być różne. W literaturze można znaleźć szereg propozycji wyznaczania wag określających istot-

¹ Politechnika Białostocka, Wydział Informatyki, Katedra Matematyki, ul. Wiejska 45A, 15-351 Białystok, Polska, e-mail: d.kacprzak@pb.edu.pl, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8999-1044>.

² Badania zostały zrealizowane w ramach pracy nr S/WI/1/2016 i sfinansowane ze środków na naukę MNiSW.

ność decydentów (French, 1956; Bodily, 1979; Ramanathan, Ganesh, 1994; Chen, Fan, 2006, 2007; Xu, 2008), w tym również propozycje wykorzystujące metodę TOPSIS opartą na liczbach rzeczywistych (Liu i inni, 2016), liczbach przedziałowych (Yue, 2011) oraz na skierowanych liczbach rozmytych (Kacprzak, 2019).

Proponowane w pracy podejście wykorzystuje dwukrotnie rozmytą metodę TOPSIS opartą na trapezowych liczbach rozmytych. Pierwszy raz rozmyta metoda TOPSIS jest użyta w celu wyznaczenia wag określających istotność decydentów. Wykorzystując indywidualne macierze decyzyjne określone przez decydentów, wyznaczane są punkty referencyjne, które w tym etapie stanowi decyzja idealna (DI) oraz decyzja antyidealna (DA). Decyzja idealna stanowi średnią arytmetyczną indywidualnych macierzy decyzyjnych, tzn. stanowi decyzję kompromisową decydentów. Z kolei decyzja antyidealna, aby zapewnić maksymalną odległość od DI, została podzielona na lewostronną DA (LDA) i prawostronną DA (PDA). LDA jest minimalną, natomiast PDA maksymalną macierzą z indywidualnych macierzy decyzyjnych. Oczywiście, im indywidualna macierz decyzyjna decydenta jest bliższa DI i bardziej oddalona od LDA oraz PDA, w stosunku do pozostałych decydentów, tym lepsza jest jego decyzja. Z tego względu wykorzystując miarę syntetyczną wyznaczamy dla indywidualnej macierzy decyzyjnej każdego decydenta jej względną bliskość do DI. Wartości tej miary po unormowaniu stanowią wagi określające istotność decydentów w grupie. Wagi te są następnie wykorzystane do agregacji indywidualnych macierzy decyzyjnych w grupową macierz decyzyjną za pomocą średniej ważonej. Macierz grupowa jest podstawą do zastosowania rozmytej metody TOPSIS po raz drugi, liniowego uporządkowania wariantów decyzyjnych i wskazania wariantu preferowanego.

Praca składa się z siedmiu rozdziałów. W drugim rozdziale przedstawiono podstawowe informacje związane ze zbiorami i liczbami rozmytymi. W kolejnym opisano klasyczną metodę TOPSIS oraz jej rozmytą wersję. Rozdział czwarty poświęcono na przedstawienie proponowanej modyfikacji rozmytej metody TOPSIS dla grupowego podejmowania decyzji, a następny na przykład liczbowy. Praca kończy się porównaniem proponowanej metody z innymi metodami wykorzystującymi agregację indywidualnych macierzy decyzyjnych za pomocą średniej arytmetycznej, geometrycznej i ich modyfikacji oraz podsumowaniem.

2. ZBIORY I LICZBY ROZMYTE

Pojęcie zbioru rozmytego wprowadził Lotfi A. Zadeh w 1965 roku (Zadeh, 1965). Pozwala ono na opisywanie i matematyczne modelowanie wielkości nieprecyzyjnych czy też wyrażonych za pomocą języka mówionego. Znalazło to szerokie zastosowanie praktyczne, szczególnie w zagadnieniach związanych ze sterowaniem i wspomaganiem podejmowania decyzji.

Definicja 1 (Zadeh, 1965). Niech U będzie przestrzenią obiektów. Zbiorem rozmytym \tilde{A} w przestrzeni U nazywa się zbiór par

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in U\}, \quad (1)$$

gdzie $\mu_{\tilde{A}} : U \rightarrow [0,1]$ jest funkcją przynależności, która każdemu elementowi $x \in U$ przypisuje jego stopień przynależności do zbioru rozmytego \tilde{A} .

Definicja 2 (Czogala, Pedrycz, 1985). Wypukła liczba rozmyta \tilde{A} (*Convex Fuzzy Numbers – CFN*), w skrócie liczba rozmyta, to zbiór rozmyty osi rzeczywistej \mathbb{R} ($U = \mathbb{R}$), którego funkcja przynależności

$$\mu_{\tilde{A}} : U \rightarrow [0,1], \quad (2)$$

spełnia następujące warunki:

– normalności, tzn.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \mu_{\tilde{A}}(x) = 1, \quad (3)$$

– wypukłości, tzn.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, y \in [x, z] : \mu_{\tilde{A}}(y) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(z)\}, \quad (4)$$

– bycia przedziałami ciągłą.

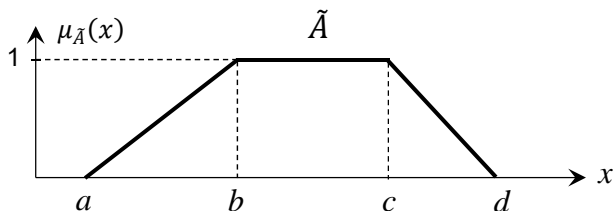
Praktyczne zastosowania liczb rozmytych pokazują, że najczęściej wykorzystuje się trapezowe liczby rozmyte (lub ich szczególny przypadek, tzn. trójkątne liczby rozmyte). Liczby trapezowe można jednoznacznie opisać za pomocą czterech liczb rzeczywistych a, b, c i d , gdzie $a \leq b \leq c \leq d$, tzn.

$$\tilde{A} = (a, b, c, d), \quad (5)$$

a ich funkcja przynależności ma postać (rysunek 1)

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{gdym } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{gdym } b \leq x \leq c, \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{gdym } c \leq x \leq d. \end{cases} \quad (6)$$

Rysunek 1. Trapezowa liczba rozmyta



Źródło: opracowanie własne.

Trapezową liczbę rozmytą $\tilde{A} = (a, b, c, d)$, dla której $0 \leq a \leq b \leq c \leq d$ nazwiemy dodatnią trapezową liczbą rozmytą (rysunek 1). Działania arytmetyczne na dodatnich trapezowych liczbach rozmytych $\tilde{A} = (a_{\tilde{A}}, b_{\tilde{A}}, c_{\tilde{A}}, d_{\tilde{A}})$ i $\tilde{B} = (a_{\tilde{B}}, b_{\tilde{B}}, c_{\tilde{B}}, d_{\tilde{B}})$ określamy następująco:

– dodawanie:

$$\tilde{A} + \tilde{B} = (a_{\tilde{A}}, b_{\tilde{A}}, c_{\tilde{A}}, d_{\tilde{A}}) + (a_{\tilde{B}}, b_{\tilde{B}}, c_{\tilde{B}}, d_{\tilde{B}}) = (a_{\tilde{A}} + a_{\tilde{B}}, b_{\tilde{A}} + b_{\tilde{B}}, c_{\tilde{A}} + c_{\tilde{B}}, d_{\tilde{A}} + d_{\tilde{B}}), \quad (7)$$

– odejmowanie:

$$\tilde{A} - \tilde{B} = (a_{\tilde{A}}, b_{\tilde{A}}, c_{\tilde{A}}, d_{\tilde{A}}) - (a_{\tilde{B}}, b_{\tilde{B}}, c_{\tilde{B}}, d_{\tilde{B}}) = (a_{\tilde{A}} - a_{\tilde{B}}, b_{\tilde{A}} - b_{\tilde{B}}, c_{\tilde{A}} - c_{\tilde{B}}, d_{\tilde{A}} - d_{\tilde{B}}), \quad (8)$$

– mnożenie:

$$\tilde{A} * \tilde{B} = (a_{\tilde{A}}, b_{\tilde{A}}, c_{\tilde{A}}, d_{\tilde{A}}) * (a_{\tilde{B}}, b_{\tilde{B}}, c_{\tilde{B}}, d_{\tilde{B}}) = (a_{\tilde{A}} * a_{\tilde{B}}, b_{\tilde{A}} * b_{\tilde{B}}, c_{\tilde{A}} * c_{\tilde{B}}, d_{\tilde{A}} * d_{\tilde{B}}), \quad (9)$$

– mnożenie dodatniej trapezowej liczby rozmytej \tilde{A} przez dodatnią liczbę rzeczywistą r :

$$r * \tilde{A} = r * (a_{\tilde{A}}, b_{\tilde{A}}, c_{\tilde{A}}, d_{\tilde{A}}) = (r * a_{\tilde{A}}, r * b_{\tilde{A}}, r * c_{\tilde{A}}, r * d_{\tilde{A}}), \quad (10)$$

– dzielenie:

$$\tilde{A}/\tilde{B} = (a_{\tilde{A}}, b_{\tilde{A}}, c_{\tilde{A}}, d_{\tilde{A}})/(a_{\tilde{B}}, b_{\tilde{B}}, c_{\tilde{B}}, d_{\tilde{B}}) = (a_{\tilde{A}}/a_{\tilde{B}}, b_{\tilde{A}}/b_{\tilde{B}}, c_{\tilde{A}}/c_{\tilde{B}}, d_{\tilde{A}}/d_{\tilde{B}}), \quad (11)$$

jeżeli $a_{\tilde{B}} > 0$. Ponadto dla dodatnich trapezowych liczb rozmytych $\tilde{A} = (a_{\tilde{A}}, b_{\tilde{A}}, c_{\tilde{A}}, d_{\tilde{A}})$ i $\tilde{B} = (a_{\tilde{B}}, b_{\tilde{B}}, c_{\tilde{B}}, d_{\tilde{B}})$ określamy ich odległość wierzchołkową oraz minimum i maksimum wykorzystywane w rozmytej metodzie TOPSIS następująco:

– odległość wierzchołkowa dodatnich trapezowych liczb rozmytych:

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{\frac{1}{4}[(a_{\tilde{A}} - a_{\tilde{B}})^2 + (b_{\tilde{A}} - b_{\tilde{B}})^2 + (c_{\tilde{A}} - c_{\tilde{B}})^2 + (d_{\tilde{A}} - d_{\tilde{B}})^2]}, \quad (12)$$

– minimum dodatnich trapezowych liczb rozmytych:

$$\min(\tilde{A}, \tilde{B}) = (\min\{a_{\tilde{A}}, a_{\tilde{B}}\}, \min\{b_{\tilde{A}}, b_{\tilde{B}}\}, \min\{c_{\tilde{A}}, c_{\tilde{B}}\}, \min\{d_{\tilde{A}}, d_{\tilde{B}}\}), \quad (13)$$

– maksimum dodatnich trapezowych liczb rozmytych:

$$\max(\tilde{A}, \tilde{B}) = (\max\{a_{\tilde{A}}, a_{\tilde{B}}\}, \max\{b_{\tilde{A}}, b_{\tilde{B}}\}, \max\{c_{\tilde{A}}, c_{\tilde{B}}\}, \max\{d_{\tilde{A}}, d_{\tilde{B}}\}). \quad (14)$$

W kolejnym rozdziale zostanie przedstawiona klasyczna metoda TOPSIS (Hwang, Yoon, 1981) oraz jej rozmyta wersja oparta na trójkątnych liczbach rozmytych (Chen, 2000).

3. KLASYCZNA METODA TOPSIS I JEJ ROZMYTA WERSJA

Metoda TOPSIS (ang. *The Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution*) zaproponowana przez Hwanga, Yoona (1981) jest jedną z najpopularniejszych i najczęściej wykorzystywanych metod MCDM. Należy ona do grupy tzw. metod wzorcowych. Wykorzystując dwa punktu referencyjne, tzw. rozwiązanie idealne (RI) i rozwiązanie antyidealne (RA), wyznacza dla każdego wariantu decyzyjnego wartość miary syntetycznej mierzącej względną jego bliskość do RI. Następnie wartości tej miary służą do porządkowania liniowego możliwych wariantów decyzyjnych i wskazania wariantu preferowanego (wariantu o najwyższej wartości miary syntetycznej).

Punktem wyjścia klasycznej metody TOPSIS jest macierz decyzyjna zbudowana z ocen możliwych wariantów decyzyjnych względem kryteriów dokonanych przez decydenta. Oceny te są wyrażone za pomocą precyzyjnych wielkości liczbowych. Jednak rosnąca złożoność rzeczywistych problemów decyzyjnych powoduje, że decydenci mogą mieć trudności z dokładnym określeniem swoich ocen lub preferować oceny wyrażone za pomocą wyrażeń lingwistycznych. Czynniki te spowodowały powstanie szeregu modyfikacji klasycznej metody TOPSIS, aby możliwe było uwzględnienie innych form prezentacji danych, m.in. liczb przedziałowych (Jahanshahloo i inni, 2006a; Roszkowska, 2011), liczb rozmytych (Chen, 2000; Jahanshahloo i inni, 2006b; Łuczak, Wysocki, 2006; Łuczak, Wysocki, 2008; Łuczak, Wysocki, 2011), intuicjonistycznych zbiorów rozmytych (Boran i inni, 2009), niepewnych (hesitant) zbiorów rozmytych (Senvar i inni, 2016), skierowanych liczb rozmytych (Roszkowska, Kacprzak, 2016; Rudnik, Kacprzak, 2017) i innych. Ponadto, wspomniana rosnąca złożoność rzeczywistych problemów decyzyjnych powoduje, że pojedynczy decydent może mieć trudności z dokładną analizą wszystkich istotnych aspektów rozważanego problemu. Skutkuje to tym, że szereg problemów jest analizowany przez grupę

decydentów. W rezultacie każdy decydent z grupy prezentuje swoją decyzję w postaci indywidualnej macierzy decyzyjnej (i indywidualnego wektora wag), które następnie są agregowane do grupowej macierzy decyzyjnej (i grupowego wektora wag), która jest podstawą do porządkowania liniowego możliwych wariantów decyzyjnych i wskazania wariantu preferowanego.

Założmy, że decydent (ekspert) dokonuje wyborów jednego z m możliwych wariantów decyzyjnych ocenianych względem n kryteriów. Zbiór kryteriów jest podzielony na dwa podzbiory: stymulanty (im wyższa wartość oceny tym lepiej) oznaczane przez B oraz destymulanty (im niższa wartość oceny tym lepiej) oznaczane przez C . Ocenę wariantu A_i ($i = 1, \dots, m$) ze względu na kryterium C_j ($j = 1, \dots, n$) oznaczmy przez x_{ij} . Dodatkowo określamy wektor wag kryteriów oznaczony przez $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, gdzie $w_j \in [0, 1]$ i spełnia warunek $\sum_{j=1}^n w_j = 1$.

Klasyczna metoda TOPSIS (Hwang, Yoon, 1981) zakłada, że oceny wariantów decyzyjnych względem kryteriów x_{ij} oraz wagi kryteriów w_j są określone precyzyjnie przez liczby rzeczywiste. Składa się ona z następujących etapów.

ETAP 1: Określenie macierzy decyzyjnej X

$$X = (x_{ij}), \quad (15)$$

gdzie $x_{ij} \in \mathbb{R}$.

ETAP 2: Wyznaczenie znormalizowanej macierzy decyzyjnej

$$R = (r_{ij}), \quad (16)$$

gdzie $r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m x_{ij}^2}}$.

ETAP 3: Wyznaczenie ważonej znormalizowanej macierzy decyzyjnej

$$V = (v_{ij}), \quad (17)$$

gdzie $v_{ij} = r_{ij} \cdot w_j$.

ETAP 4: Określenie rozwiązania idealnego A^+

$$A^+ = (v_1^+, v_2^+, \dots, v_n^+) = \left\{ \left(\max_i v_{ij} \mid j \in B \right), \left(\min_i v_{ij} \mid j \in C \right) \right\}, \quad (18)$$

oraz rozwiązania antyidealnego A^-

$$A^- = (v_1^-, v_2^-, \dots, v_n^-) = \left\{ \left(\min_i v_{ij} \mid j \in B \right), \left(\max_i v_{ij} \mid j \in C \right) \right\}. \quad (19)$$

ETAP 5: Wyznaczenie odległości euklidesowej każdego wariantu decyzyjnego A_i od rozwiązania idealnego A^+

$$d_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^+)^2}, \quad (20)$$

oraz rozwiązania antyidealnego A^-

$$d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2}. \quad (21)$$

ETAP 6: Wyznaczenie dla każdego wariantu decyzyjnego A_i wartości miary syntetycznej mierzącej względną jego bliskość do rozwiązania idealnego A^+ :

$$RC_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-}. \quad (22)$$

Ponieważ odległości $d_i^+ \geq 0$ i $d_i^- \geq 0$, oznacza to, że wartość miary syntetycznej RC_i jest unormowana w przedziale $[0, 1]$, tzn. $RC_i \in [0, 1]$.

ETAP 7: Ranking (uporządkowanie liniowe) wariantów decyzyjnych względem wartości miary syntetycznej RC_i . Wariantem preferowanym jest ten z najwyższą wartością miary syntetycznej RC_i .

Chen (2000) rozszerzył klasyczną metodę TOPSIS zaproponowaną przez Hwanga, Yoona (1981) na liczby rozmyte. Pozwala to na analizę rzeczywistych problemów decyzyjnych w których mamy trudności z precyzyjnym określeniem ocen lub preferujemy oceny wyrażone za pomocą wyrażań lingwistycznych, które są reprezentowane przez liczby rozmyte. Wykorzystał on trójkątne liczby rozmyte, które możemy zapisać w postaci $\tilde{A} = (a, b, c)$, a ich funkcja przynależności ma postać (szczególny przypadek formuły (6))

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{gdy } a \leq x \leq b, \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{gdy } b \leq x \leq c. \end{cases}$$

Propozycja Chena składa się z następujących etapów.

ETAP 1: Określenie macierzy decyzyjnej \tilde{X}

$$\tilde{X} = (\tilde{x}_{ij}), \quad (23)$$

gdzie elementy $\tilde{x}_{ij} = (a_{\tilde{x}_{ij}}, b_{\tilde{x}_{ij}}, c_{\tilde{x}_{ij}})$ są trójkątnymi liczbami rozmytymi.

ETAP 2: Wyznaczenie znormalizowanej macierzy decyzyjnej

$$\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij}), \quad (24)$$

gdzie

$$\tilde{r}_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{a_{\tilde{x}_{ij}}}{\max_i c_{\tilde{x}_{ij}}}, \frac{b_{\tilde{x}_{ij}}}{\max_i c_{\tilde{x}_{ij}}}, \frac{c_{\tilde{x}_{ij}}}{\max_i c_{\tilde{x}_{ij}}} \right) & \text{gdy } j \in B, \\ \left(\frac{\min_i a_{\tilde{x}_{ij}}}{c_{\tilde{x}_{ij}}}, \frac{\min_i a_{\tilde{x}_{ij}}}{b_{\tilde{x}_{ij}}}, \frac{\min_i a_{\tilde{x}_{ij}}}{a_{\tilde{x}_{ij}}} \right) & \text{gdy } j \in C. \end{cases}$$

ETAP 3: Wykorzystując wektor wag kryteriów $\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_n)$, gdzie $\tilde{w}_j = (a_{\tilde{w}_j}, b_{\tilde{w}_j}, c_{\tilde{w}_j})$, wyznaczenie ważonej znormalizowanej macierzy decyzyjnej

$$\tilde{V} = (\tilde{v}_{ij}), \quad (25)$$

gdzie $\tilde{v}_{ij} = \tilde{r}_{ij} \cdot \tilde{w}_j = (a_{\tilde{r}_{ij}}, b_{\tilde{r}_{ij}}, c_{\tilde{r}_{ij}}) \cdot (a_{\tilde{w}_j}, b_{\tilde{w}_j}, c_{\tilde{w}_j}) = (a_{\tilde{r}_{ij}} \cdot a_{\tilde{w}_j}, b_{\tilde{r}_{ij}} \cdot b_{\tilde{w}_j}, c_{\tilde{r}_{ij}} \cdot c_{\tilde{w}_j})$.

ETAP 4: Określenie rozwiązania idealnego \tilde{A}^+

$$\tilde{A}^+ = (\tilde{v}_1^+, \tilde{v}_2^+, \dots, \tilde{v}_n^+) = \left(\max_i \tilde{v}_{i1}, \max_i \tilde{v}_{i2}, \dots, \max_i \tilde{v}_{in} \right) \quad (26)$$

oraz rozwiązania antyidealnego \tilde{A}^-

$$\tilde{A}^- = (\tilde{v}_1^-, \tilde{v}_2^-, \dots, \tilde{v}_n^-) = \left(\min_i \tilde{v}_{i1}, \min_i \tilde{v}_{i2}, \dots, \min_i \tilde{v}_{in} \right). \quad (27)$$

ETAP 5: Wykorzystując formułę określoną wzorem (12), wyznaczenie odległości każdego wariantu decyzyjnego A_i od rozwiązania idealnego \tilde{A}^+

$$d_i^+ = \sum_{j=1}^n d(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^+) \quad (28)$$

oraz rozwiązania antyidealnego \tilde{A}^-

$$d_i^- = \sum_{j=1}^n d(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^-). \quad (29)$$

ETAP 6: Wyznaczenie dla każdego wariantu decyzyjnego A_i wartości miary syntetycznej mierzącej względną jego bliskość do rozwiązania idealnego \tilde{A}^+

$$RC_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-} \quad (30)$$

ETAP 7: Ranking (uporządkowanie liniowe) wariantów decyzyjnych względem wartości miary syntetycznej RC_i i wybranie wariantu preferowanego.

W kolejnym rozdziale zostanie przedstawiona modyfikacja rozmytej metody TOPSIS oparta na dodatnich trapezowych liczbach rozmytych dla grupowego podejmowania decyzji, w której indywidualne macierze decyzyjne będą agregowane w macierz grupową za pomocą średniej ważonej, gdzie wagami będą wagi określające istotność decydentów.

4. MODYFIKACJA ROZMYTEJ METODY TOPSIS DLA GRUPOWEGO PODEJMOWANIA DECYZJI

Rozważmy dyskretny wielokryterialny problem decyzyjny, w którym ze zbioru $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ ($m \geq 2$) możliwych wariantów decyzyjnych ocenianych względem zbioru kryteriów $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ ($n \geq 2$) chcemy wybrać wariant preferowany. Zbiór $\{DM_1, DM_2, \dots, DM_K\}$ ($K \geq 2$) oznacza grupę decydentów (ekspertów), a $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K)$ jest wektorem wag określającym istotność decydentów, takim że $\lambda_k \in [0,1]$ i $\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1$.

Proponowana modyfikacja składa się z następujących etapów.

ETAP 1. Każdy z decydentów prezentuje swoje oceny w postaci macierzy decyzyjnej

$$\tilde{X}^k = (x_{ij}^k) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11}^k & \tilde{x}_{12}^k & \dots & \tilde{x}_{1n}^k \\ \tilde{x}_{21}^k & \tilde{x}_{22}^k & \dots & \tilde{x}_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{x}_{m1}^k & \tilde{x}_{m2}^k & \dots & \tilde{x}_{mn}^k \end{bmatrix}, \quad (31)$$

gdzie $\tilde{x}_{ij}^k = (a_{\tilde{x}_{ij}^k}, b_{\tilde{x}_{ij}^k}, c_{\tilde{x}_{ij}^k}, d_{\tilde{x}_{ij}^k})$ jest trapezową liczbą rozmytą będącą oceną wariantu decyzyjnego A_i ($i = 1, 2, \dots, m$) ze względu na kryterium C_j ($j = 1, 2, \dots, n$) dokonaną przez decydenta DM_k ($k = 1, 2, \dots, K$).

ETAP 2. W celu zapewnienia porównywalności kryteriów, obliczamy znormalizowane macierze decyzyjne

$$\tilde{Y}^k = (\tilde{y}_{ij}^k) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{11}^k & \tilde{y}_{12}^k & \dots & \tilde{y}_{1n}^k \\ \tilde{y}_{21}^k & \tilde{y}_{22}^k & \dots & \tilde{y}_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{y}_{m1}^k & \tilde{y}_{m2}^k & \dots & \tilde{y}_{mn}^k \end{bmatrix}, \quad (32)$$

gdzie

$$\tilde{y}_{ij}^k = \begin{cases} \left(\frac{a_{\tilde{x}_{ij}^k}}{\max_i a_{\tilde{x}_{ij}^k}}, \frac{b_{\tilde{x}_{ij}^k}}{\max_i b_{\tilde{x}_{ij}^k}}, \frac{c_{\tilde{x}_{ij}^k}}{\max_i c_{\tilde{x}_{ij}^k}}, \frac{d_{\tilde{x}_{ij}^k}}{\max_i d_{\tilde{x}_{ij}^k}} \right) & \text{gdy } C_j \in B, \\ \left(\frac{\min_i a_{\tilde{x}_{ij}^k}}{d_{\tilde{x}_{ij}^k}}, \frac{\min_i a_{\tilde{x}_{ij}^k}}{c_{\tilde{x}_{ij}^k}}, \frac{\min_i a_{\tilde{x}_{ij}^k}}{b_{\tilde{x}_{ij}^k}}, \frac{\min_i a_{\tilde{x}_{ij}^k}}{a_{\tilde{x}_{ij}^k}} \right) & \text{gdy } C_j \in C. \end{cases}$$

ETAP 3. Wykorzystując wektory wag kryteriów postaci $\tilde{w}^k = (\tilde{w}_1^k, \tilde{w}_2^k, \dots, \tilde{w}_n^k)$, gdzie $\tilde{w}_j^k = (a_{\tilde{w}_j^k}, b_{\tilde{w}_j^k}, c_{\tilde{w}_j^k}, d_{\tilde{w}_j^k})$, wyznaczamy ważone znormalizowane macierze decyzyjne (indywidualne decyzje) \tilde{V}^k dla każdego z decydentów

$$\tilde{V}^k = (\tilde{v}_{ij}^k) = \begin{bmatrix} \tilde{v}_{11}^k & \tilde{v}_{12}^k & \dots & \tilde{v}_{1n}^k \\ \tilde{v}_{21}^k & \tilde{v}_{22}^k & \dots & \tilde{v}_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{v}_{m1}^k & \tilde{v}_{m2}^k & \dots & \tilde{v}_{mn}^k \end{bmatrix}, \quad (33)$$

gdzie $\tilde{v}_{ij}^k = \tilde{w}_j^k \cdot \tilde{y}_{ij}^k = (a_{\tilde{w}_j^k} \cdot a_{\tilde{y}_{ij}^k}, b_{\tilde{w}_j^k} \cdot b_{\tilde{y}_{ij}^k}, c_{\tilde{w}_j^k} \cdot c_{\tilde{y}_{ij}^k}, d_{\tilde{w}_j^k} \cdot d_{\tilde{y}_{ij}^k})$.

ETAP 4. Bazując na macierzach \tilde{V}^k wyznaczamy decyzję idealną (DI) i decyzję antyidealną (DA). DI jest średnią arytmetyczną z decyzji indywidualnych \tilde{V}^k , tzn. stanowi decyzję kompromisową decydentów, postaci

$$\tilde{D}^+ = (\tilde{d}_{ij}^+) = \begin{bmatrix} \tilde{d}_{11}^+ & \tilde{d}_{12}^+ & \dots & \tilde{d}_{1n}^+ \\ \tilde{d}_{21}^+ & \tilde{d}_{22}^+ & \dots & \tilde{d}_{2n}^+ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{d}_{m1}^+ & \tilde{d}_{m2}^+ & \dots & \tilde{d}_{mn}^+ \end{bmatrix}, \quad (34)$$

gdzie $\tilde{d}_{ij}^+ = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{v}_{ij}^k$. Z kolei DA, w celu zapewnienia maksymalnej odległości od DI, jest podzielna na dwie części: lewostronną decyzję antyidealną (LDA) będącą minimalną macierzą z indywidualnych decyzji \tilde{V}^k , postaci

$$\tilde{D}^{-L} = (\tilde{d}_{ij}^{-L}) = \begin{bmatrix} \tilde{d}_{11}^{-L} & \tilde{d}_{12}^{-L} & \dots & \tilde{d}_{1n}^{-L} \\ \tilde{d}_{21}^{-L} & \tilde{d}_{22}^{-L} & \dots & \tilde{d}_{2n}^{-L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{d}_{m1}^{-L} & \tilde{d}_{m2}^{-L} & \dots & \tilde{d}_{mn}^{-L} \end{bmatrix}, \quad (35)$$

gdzie $\tilde{d}_{ij}^{-L} = \min_k \tilde{v}_{ij}^k$ i prawostronną decyzję antyidealną (PDA) będącą maksymalną macierzą z indywidualnych decyzji \tilde{V}^k , postaci

$$\tilde{D}^{-P} = (\tilde{d}_{ij}^{-P}) = \begin{bmatrix} \tilde{d}_{11}^{-P} & \tilde{d}_{12}^{-P} & \cdots & \tilde{d}_{1n}^{-P} \\ \tilde{d}_{21}^{-P} & \tilde{d}_{22}^{-P} & \cdots & \tilde{d}_{2n}^{-P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{d}_{m1}^{-P} & \tilde{d}_{m2}^{-P} & \cdots & \tilde{d}_{mn}^{-P} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

gdzie $\tilde{d}_{ij}^{-P} = \max_k \tilde{v}_{ij}^k$.

ETAP 5. Wykorzystując formułę określoną wzorem (12), wyznaczamy odległości ważonej znormalizowanej macierzy decyzyjnej k -tego decydenta \tilde{V}^k do DI

$$S^{+k} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d(\tilde{v}_{ij}^k, \tilde{d}_{ij}^{+}), \quad (37)$$

oraz obu części DA

$$S^{-kL} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d(\tilde{v}_{ij}^k, \tilde{d}_{ij}^{-L}) \quad (38)$$

i

$$S^{-kP} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d(\tilde{v}_{ij}^k, \tilde{d}_{ij}^{-P}). \quad (39)$$

ETAP 6. Wyznaczamy dla każdego decydenta wartości miary syntetycznej mierzącej względną bliskość jego indywidualnej decyzji \tilde{V}^k do DI zgodnie z formułą

$$RC^k = \frac{S^{-kL} + S^{-kP}}{S^{+k} + S^{-kL} + S^{-kP}}. \quad (40)$$

ETAP 7. Wyznaczamy wagi określające istotność decydentów następująco

$$\lambda_k = \frac{RC^k}{\sum_{k=1}^K RC^k}. \quad (41)$$

ETAP 8. Wykorzystując wagi określające istotność decydentów λ_k i indywidualne decyzje \tilde{V}^k , wyznaczamy zagregowaną macierz decyzyjną (decyzję grupową) \tilde{V} postaci

$$\tilde{V} = (\tilde{v}_{ij}) = \begin{bmatrix} \tilde{v}_{11} & \tilde{v}_{12} & \cdots & \tilde{v}_{1n} \\ \tilde{v}_{21} & \tilde{v}_{22} & \cdots & \tilde{v}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{v}_{m1} & \tilde{v}_{m2} & \cdots & \tilde{v}_{mn} \end{bmatrix}, \quad (42)$$

gdzie $\tilde{v}_{ij} = \sum_{k=1}^K \lambda_k \tilde{v}_{ij}^k = \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k a_{\tilde{v}_{ij}^k}, \sum_{k=1}^K \lambda_k b_{\tilde{v}_{ij}^k}, \sum_{k=1}^K \lambda_k c_{\tilde{v}_{ij}^k}, \sum_{k=1}^K \lambda_k d_{\tilde{v}_{ij}^k} \right)$.

ETAP 9. Na bazie macierzy \tilde{V} określamy rozwiązanie idealne (RI) \tilde{A}^+ postaci

$$\tilde{A}^+ = (\tilde{v}_1^+, \tilde{v}_2^+, \dots, \tilde{v}_n^+) = \left(\max_i \tilde{v}_{i1}, \max_i \tilde{v}_{i2}, \dots, \max_i \tilde{v}_{in} \right) \quad (43)$$

i rozwiązanie antyidealne (RA) \tilde{A}^- postaci

$$\tilde{A}^- = (\tilde{v}_1^-, \tilde{v}_2^-, \dots, \tilde{v}_n^-) = \left(\min_i \tilde{v}_{i1}, \min_i \tilde{v}_{i2}, \dots, \min_i \tilde{v}_{in} \right). \quad (44)$$

ETAP 10. Wykorzystując formułę określoną wzorem (12), wyznaczamy odległości każdego z wariantów decyzyjnych A_i od RI

$$d_i^+ = \sum_{j=1}^n d(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^+) \quad (45)$$

i od RA

$$d_i^- = \sum_{j=1}^n d(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^-). \quad (46)$$

ETAP 11. Wyznaczamy dla każdego wariantu decyzyjnego A_i wartości miary syntetycznej mierzącej względną jego bliskość do RI zgodnie z formułą

$$RC_i = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^+}. \quad (47)$$

ETAP 12. Tworzymy ranking (uporządkowanie liniowe) wariantów decyzyjnych względem wartości miary syntetycznej RC_i . Im wyższa wartość tej miary tym bardziej preferowany jest wariant decyzyjny.

W kolejnej części przedstawione podejście zostanie zaprezentowane na przykładzie liczbowym.

5. PRZYKŁAD LICZBOWY

Rozważmy przykład liczbowy zaczerpnięty z pracy Chen i inni (2006), w którym firma produkcyjna poszukuje dostawcy materiałów do produkcji nowego produktu, gdzie autorzy do agregacji decyzji indywidualnych wykorzystali zmodyfikowaną średnią arytmetyczną. Pośród pięciu dostawców $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$, grupa trzech decydentów $\{DM_1, DM_2, DM_3\}$ chce wybrać odpowiedniego dostawcę. Warianty decyzyjne A_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) są oceniane przez decydentów ze względu na pięć kryteriów $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$, które są stymulantami. Decydenci oceniają warianty decyzyjne (dostawców) oraz ważność kryteriów wykorzystując oceny lingwistyczne zawarte w tabeli 1 oraz tabeli 2. W tabelach 3 i 4 zestawiono odpowiednio oceny wariantów decyzyjnych i oceny ważności kryteriów dokonane przez decydentów. Korzystając z tabel 1 i 2, indywidualne macierze

decyzyjne oraz oceny ważność kryteriów dokonane przez decydentów i widoczne w tabelach 3 i 4, zostały zamienione na trapezowe liczby rozmyte co prezentują odpowiednio tabele 5 i 6. W kolejnym kroku, indywidualne macierze decyzyjne (tabela 5) zostały znormalizowane i zapisane w tabeli 7, a następnie po uwzględnieniu ocen ważności kryteriów (tabela 6) zostały wyznaczone znormalizowane ważne indywidualne macierze decyzyjne – tabela 8. Tabela 9 przedstawia decyzję idealną oraz lewostronną i prawostronną decyzję antyidealną. Po wyznaczeniu odległości indywidualnych decyzji decydentów od DI i DA możemy wyznaczyć wagi określające istotność poszczególnych decydentów, co prezentuje tabela 10. Otrzymany wektor ma postać $\lambda = (0,3436; 0,3546; 0,3018)$. Ważone znormalizowane indywidualne macierze decyzyjne (tabela 8) oraz wektor λ pozwalają na wyznaczenie grupowej (zagregowanej) macierzy decyzyjnej – tabela 11. Po określeniu rozwiązań idealnego i antyidealnego (tabela 12), wyznaczamy odległości każdego z dostawców do RI i RA oraz wartość miary syntetycznej, która pozwala na stworzenie rankingu (tabela 13). Uzyskany ranking ma postać (symbol < oznacza „mniej preferowany”): $A_5 < A_1 < A_4 < A_3 < A_2$ co oznacza, że wariantem preferowanym (preferowanym dostawcą) jest A_2 .

Tabela 1. OCENY LINGWISTYCZNE WYKORZYSTYWANE PRZEZ DECYDENTÓW W OCENIE WARIANTÓW DECYZYJNYCH

Ocena lingwistyczna	Symbol	Trapezowa liczba rozmyta – (a; b; c; d)
Bardzo niska	<i>BN</i>	(0;0;1;2)
Niska	<i>N</i>	(1;2;2;3)
Średnio niska	<i>SN</i>	(2;3;4;5)
Średnia	<i>S</i>	(4;5;5;6)
Średnio wysoka	<i>SW</i>	(5;6;7;8)
Wysoka	<i>W</i>	(7;8;8;9)
Bardzo wysoka	<i>BW</i>	(8;9;10;10)

Ź r ó d ł o: opracowanie własne na podstawie Chen i inni (2006), Kobryń (2014).

Tabela 2. OCENY LINGWISTYCZNE WYKORZYSTYWANE PRZEZ DECYDENTÓW W OCENIE WAŻNOŚĆ KRYTERIÓW

Ocena lingwistyczna	Symbol	Trapezowa liczba rozmyta – (a; b; c; d)
Bardzo słabe	<i>BS</i>	(0,0;0,0;0,1;0,2)
Słabe	<i>S</i>	(0,1;0,2;0,2;0,3)
Średnio słabe	<i>ŚS</i>	(0,2;0,3;0,4;0,5)
Średnia	<i>Ś</i>	(0,4;0,5;0,5;0,6)
Średnio ważne	<i>ŚW</i>	(0,5;0,6;0,7;0,8)
Ważne	<i>W</i>	(0,7;0,8;0,8;0,9)
Bardzo ważne	<i>BW</i>	(0,8;0,9;1,0;1,0)

Ź r ó d ł o: opracowanie własne na podstawie Chen i inni (2006), Roszkowska (2012).

Tabela 3. INDYWIDUALNE MACIERZE DECYZYJNE

Decydent	Wariant decyzyjny	Kryterium				
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
DM_1	A_1	SW	SW	W	W	W
	A_2	W	BW	BW	W	BW
	A_3	BW	BW	BW	BW	W
	A_4	W	W	SW	W	W
	A_5	SW	SW	SW	SW	SW
DM_2	A_1	SW	SW	W	W	W
	A_2	W	BW	BW	BW	BW
	A_3	BW	W	BW	BW	BW
	A_4	W	W	SW	W	W
	A_5	SW	W	SW	SW	SW
DM_3	A_1	SW	BW	W	W	W
	A_2	W	BW	BW	BW	BW
	A_3	W	W	W	BW	W
	A_4	W	SW	W	W	BW
	A_5	SW	W	SW	W	SW

Źródło: Chen i inni (2006).

Tabela 4. OCENY WAŻNOŚCI KRYTERIÓW DOKONANE PRZEZ DECYDENTÓW

Decydent	Kryterium				
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
DM_1	W	BW	BW	W	W
DM_2	W	BW	BW	W	W
DM_3	W	BW	W	W	W

Źródło: Chen i inni (2006).

Tabela 5. INDYWIDUALNE MACIERZE DECYZYJNE WYRAŻONE ZA POMOCĄ TRAPEZOWYCH LICZB ROZMYTYCH

Decydent	Wariant decyzyjny	Kryterium				
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
DM_1	A_1	(5;6;7;8)	(5;6;7;8)	(7;8;8;9)	(7;8;8;9)	(7;8;8;9)
	A_2	(7;8;8;9)	(8;9;10;10)	(8;9;10;10)	(7;8;8;9)	(8;9;10;10)
	A_3	(8;9;10;10)	(8;9;10;10)	(8;9;10;10)	(8;9;10;10)	(7;8;8;9)
	A_4	(7;8;8;9)	(7;8;8;9)	(5;6;7;8)	(7;8;8;9)	(7;8;8;9)
	A_5	(5;6;7;8)	(5;6;7;8)	(5;6;7;8)	(5;6;7;8)	(5;6;7;8)
DM_2	A_1	(5;6;7;8)	(5;6;7;8)	(7;8;8;9)	(7;8;8;9)	(7;8;8;9)
	A_2	(7;8;8;9)	(8;9;10;10)	(8;9;10;10)	(8;9;10;10)	(8;9;10;10)
	A_3	(8;9;10;10)	(7;8;8;9)	(8;9;10;10)	(8;9;10;10)	(8;9;10;10)
	A_4	(7;8;8;9)	(7;8;8;9)	(5;6;7;8)	(7;8;8;9)	(7;8;8;9)
	A_5	(5;6;7;8)	(7;8;8;9)	(5;6;7;8)	(5;6;7;8)	(5;6;7;8)
DM_3	A_1	(5;6;7;8)	(8;9;10;10)	(7;8;8;9)	(7;8;8;9)	(7;8;8;9)
	A_2	(7;8;8;9)	(8;9;10;10)	(8;9;10;10)	(8;9;10;10)	(8;9;10;10)
	A_3	(7;8;8;9)	(7;8;8;9)	(7;8;8;9)	(8;9;10;10)	(7;8;8;9)
	A_4	(7;8;8;9)	(5;6;7;8)	(7;8;8;9)	(7;8;8;9)	(8;9;10;10)
	A_5	(5;6;7;8)	(7;8;8;9)	(5;6;7;8)	(7;8;8;9)	(5;6;7;8)

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 6. OCENY WAŻNOŚCI KRYTERIÓW DOKONANE PRZEZ DECYDENTÓW WYRAŻONE ZA POMOCĄ TRAPEZOWYCH LICZB ROZMYTYCH

Decydent	Kryterium				
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
DM_1	(0,7;0,8;0,8;0,9)	(0,8;0,9;1;1)	(0,8;0,9;1;1)	(0,7;0,8;0,8;0,9)	(0,7;0,8;0,8;0,9)
DM_2	(0,7;0,8;0,8;0,9)	(0,8;0,9;1;1)	(0,8;0,9;1;1)	(0,7;0,8;0,8;0,9)	(0,7;0,8;0,8;0,9)
DM_3	(0,7;0,8;0,8;0,9)	(0,8;0,9;1;1)	(0,7;0,8;0,8;0,9)	(0,7;0,8;0,8;0,9)	(0,7;0,8;0,8;0,9)

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 7. ZNORMALIZOWANE INDYWIDUALNE MACIERZE DECYZYJNE

Decydent	Wariant decyzyjny	Kryterium				
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
DM_1	A_1	(0,50;0,60;0,70;0,80)	(0,50;0,60;0,70;0,80)	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,70;0,80;0,80;0,90)
	A_2	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,80;0,90;1,00;1,00)	(0,80;0,90;1,00;1,00)	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,80;0,90;1,00;1,00)
	A_3	(0,80;0,90;1,00;1,00)	(0,80;0,90;1,00;1,00)	(0,80;0,90;1,00;1,00)	(0,80;0,90;1,00;1,00)	(0,70;0,80;0,80;0,90)
	A_4	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,50;0,60;0,70;0,80)	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,70;0,80;0,80;0,90)
	A_5	(0,50;0,60;0,70;0,80)	(0,50;0,60;0,70;0,80)	(0,50;0,60;0,70;0,80)	(0,50;0,60;0,70;0,80)	(0,50;0,60;0,70;0,80)
DM_2	A_1	(0,50;0,60;0,70;0,80)	(0,50;0,60;0,70;0,80)	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,70;0,80;0,80;0,90)
	A_2	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,80;0,90;1,00;1,00)	(0,80;0,90;1,00;1,00)	(0,80;0,90;1,00;1,00)	(0,80;0,90;1,00;1,00)
	A_3	(0,80;0,90;1,00;1,00)	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,80;0,90;1,00;1,00)	(0,80;0,90;1,00;1,00)	(0,80;0,90;1,00;1,00)
	A_4	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,50;0,60;0,70;0,80)	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,70;0,80;0,80;0,90)
	A_5	(0,50;0,60;0,70;0,80)	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,50;0,60;0,70;0,80)	(0,50;0,60;0,70;0,80)	(0,50;0,60;0,70;0,80)
DM_3	A_1	(0,56;0,67;0,78;0,89)	(0,80;0,90;1,00;1,00)	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,70;0,80;0,80;0,90)
	A_2	(0,78;0,89;0,89;1,00)	(0,80;0,90;1,00;1,00)	(0,80;0,90;1,00;1,00)	(0,80;0,90;1,00;1,00)	(0,80;0,90;1,00;1,00)
	A_3	(0,78;0,89;0,89;1,00)	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,80;0,90;1,00;1,00)	(0,70;0,80;0,80;0,90)
	A_4	(0,78;0,89;0,89;1,00)	(0,50;0,60;0,70;0,80)	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,80;0,90;1,00;1,00)
	A_5	(0,56;0,67;0,78;0,89)	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,50;0,60;0,70;0,80)	(0,70;0,80;0,80;0,90)	(0,50;0,60;0,70;0,80)

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 8. WAŻONE ZNORMALIZOWANE INDYWIDUALNE MACIERZE DECYZYJNE

Decydent	Wariant decyzyjny	Kryterium				
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
DM_1	A_1	(0,35;0,48;0,56;0,72)	(0,40;0,54;0,70;0,80)	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,49;0,64;0,64;0,81)
	A_2	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,64;0,81;1,00;1,00)	(0,64;0,81;1,00;1,00)	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,56;0,72;0,80;0,90)
	A_3	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,64;0,81;1,00;1,00)	(0,64;0,81;1,00;1,00)	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,49;0,64;0,64;0,81)
	A_4	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,40;0,54;0,70;0,80)	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,49;0,64;0,64;0,81)
	A_5	(0,35;0,48;0,56;0,72)	(0,40;0,54;0,70;0,80)	(0,40;0,54;0,70;0,80)	(0,35;0,48;0,56;0,72)	(0,35;0,48;0,56;0,72)
DM_2	A_1	(0,35;0,48;0,56;0,72)	(0,40;0,54;0,70;0,80)	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,49;0,64;0,64;0,81)
	A_2	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,64;0,81;1,00;1,00)	(0,64;0,81;1,00;1,00)	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,56;0,72;0,80;0,90)
	A_3	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,64;0,81;1,00;1,00)	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,56;0,72;0,80;0,90)
	A_4	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,40;0,54;0,70;0,80)	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,49;0,64;0,64;0,81)
	A_5	(0,35;0,48;0,56;0,72)	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,40;0,54;0,70;0,80)	(0,35;0,48;0,56;0,72)	(0,35;0,48;0,56;0,72)
DM_3	A_1	(0,39;0,53;0,62;0,80)	(0,64;0,81;1,00;1,00)	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,49;0,64;0,64;0,81)
	A_2	(0,54;0,71;0,71;0,90)	(0,64;0,81;1,00;1,00)	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,56;0,72;0,80;0,90)
	A_3	(0,54;0,71;0,71;0,90)	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,49;0,64;0,64;0,81)
	A_4	(0,54;0,71;0,71;0,90)	(0,40;0,54;0,70;0,80)	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,56;0,72;0,80;0,90)
	A_5	(0,39;0,53;0,62;0,80)	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,35;0,48;0,56;0,72)	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,35;0,48;0,56;0,72)

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 9. IDEALNA DECYZJA ORAZ LEWOSTRONNA I PRAWOSTRONNA DECYZJA ANTYIDEALNA

Decydyent	Wariant decyzyjny	Kryterium				
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
\bar{D}^+	A_1	(0,36;0,50;0,58;0,75)	(0,48;0,63;0,80;0,87)	(0,54;0,69;0,75;0,87)	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,49;0,64;0,64;0,81)
	A_2	(0,51;0,66;0,66;0,84)	(0,64;0,81;1,00;1,00)	(0,61;0,78;0,93;0,97)	(0,54;0,69;0,75;0,87)	(0,56;0,72;0,80;0,90)
	A_3	(0,55;0,72;0,77;0,90)	(0,59;0,75;0,87;0,93)	(0,59;0,75;0,88;0,94)	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,51;0,67;0,69;0,84)
	A_4	(0,51;0,66;0,66;0,84)	(0,51;0,66;0,77;0,87)	(0,43;0,57;0,68;0,80)	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,51;0,67;0,69;0,84)
	A_5	(0,36;0,50;0,58;0,75)	(0,51;0,66;0,77;0,87)	(0,38;0,52;0,65;0,77)	(0,40;0,53;0,59;0,75)	(0,35;0,48;0,56;0,72)
\bar{D}^{-L}	A_1	(0,35;0,48;0,56;0,72)	(0,40;0,54;0,70;0,80)	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,49;0,64;0,64;0,81)
	A_2	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,64;0,81;1,00;1,00)	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,56;0,72;0,80;0,90)
	A_3	(0,54;0,71;0,71;0,90)	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,49;0,64;0,64;0,81)
	A_4	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,40;0,54;0,70;0,80)	(0,40;0,54;0,64;0,80)	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,49;0,64;0,64;0,81)
	A_5	(0,35;0,48;0,56;0,72)	(0,40;0,54;0,70;0,80)	(0,35;0,48;0,56;0,72)	(0,35;0,48;0,56;0,72)	(0,35;0,48;0,56;0,72)
\bar{D}^{-P}	A_1	(0,39;0,53;0,62;0,80)	(0,64;0,81;1,00;1,00)	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,49;0,64;0,64;0,81)
	A_2	(0,54;0,71;0,71;0,90)	(0,64;0,81;1,00;1,00)	(0,64;0,81;1,00;1,00)	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,56;0,72;0,80;0,90)
	A_3	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,64;0,81;1,00;1,00)	(0,64;0,81;1,00;1,00)	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,56;0,72;0,80;0,90)
	A_4	(0,54;0,71;0,71;0,90)	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,49;0,64;0,70;0,81)	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,56;0,72;0,80;0,90)
	A_5	(0,39;0,53;0,62;0,80)	(0,56;0,72;0,80;0,90)	(0,40;0,54;0,70;0,80)	(0,49;0,64;0,64;0,81)	(0,35;0,48;0,56;0,72)

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 10. WAGI OKREŚLAJĄCE ISTOTNOŚĆ DECYDENTÓW

	S^{+k}	S^{-kl}	S^{-kp}	RC^k	λ_k
DM_1	0,8053	0,8976	1,1691	0,7196	0,3436
DM_2	0,7164	1,1224	0,9443	0,7426	0,3546
DM_3	1,2025	1,0631	1,0036	0,6322	0,3018

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 11. GRUPOWA (ZAGREGOWANA) MACIERZ DECYZYJNA

Wariant decyzyjny	Kryterium			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	(0,36;0,50;0,58;0,74)	(0,47;0,62;0,79;0,86)	(0,54;0,70;0,75;0,87)	(0,49;0,64;0,64;0,81)
A_2	(0,51;0,66;0,66;0,84)	(0,64;0,81;1,00;1,00)	(0,62;0,78;0,94;0,97)	(0,54;0,69;0,75;0,87)
A_3	(0,56;0,72;0,77;0,90)	(0,59;0,75;0,87;0,93)	(0,59;0,76;0,89;0,94)	(0,56;0,72;0,80;0,90)
A_4	(0,51;0,66;0,66;0,84)	(0,51;0,67;0,77;0,87)	(0,43;0,57;0,68;0,80)	(0,49;0,64;0,64;0,81)
A_5	(0,36;0,50;0,58;0,74)	(0,51;0,66;0,77;0,87)	(0,38;0,52;0,66;0,78)	(0,39;0,53;0,58;0,75)

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 12. ROZWIĄZANIE IDEALNE I ANTYIDEALNE

Wariant decyzyjny	Kryterium			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A^+	(0,56;0,72;0,77;0,90)	(0,64;0,81;1,00;1,00)	(0,62;0,78;0,94;0,97)	(0,56;0,72;0,80;0,90)
A^-	(0,36;0,50;0,58;0,74)	(0,47;0,62;0,77;0,86)	(0,38;0,52;0,66;0,78)	(0,39;0,53;0,58;0,75)

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 13. RANKING WARIANTÓW DECYZYJNYCH UZYSKANY ZMODYFIKOWANĄ ROZMYTĄ METODĄ TOPSIS

Wariant decyzyjny	d_i^+	d_i^-	RC_i	Ranking wariantów decyzyjnych
A_1	0,7036	0,3543	0,3349	4
A_2	0,1105	0,9238	0,8932	1
A_3	0,1838	0,8523	0,8226	2
A_4	0,6271	0,4285	0,4059	3
A_5	1,0084	0,0247	0,0239	5

Źródło: opracowanie własne.

W rozdziale 6, wykorzystując dane liczbowe z przykładu, porównamy wyniki uzyskane za pomocą zmodyfikowanej rozmytej metody TOPSIS wykorzystującej wagi określające istotność decydentów z popularnymi metodami agregacji decyzji indywidualnych, zakładającymi, że decydenci mają jednakowy wpływ na decyzję grupową.

6. PORÓWNANIE PROPONOWANEJ METODY Z INNYM PODOBNYMI METODAMI

W celu porównania proponowanej modyfikacji (MOD) z innymi podobnymi metodami wykorzystamy popularne i dobrze znane z literatury metody agregacji decyzji indywidualnych \tilde{V}^k (33) w decyzję grupową \tilde{V} (42) zakładającymi, że decydenci mają jednakowy wpływ na decyzję zbiorową:

– ART – średnia arytmetyczna (Chen, 2000; Roszkowska, Kacprzak, 2016) określona następująco:

$$\tilde{v}_{ij} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{v}_{ij}^k = \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K a_{\tilde{v}_{ij}^k}, \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K b_{\tilde{v}_{ij}^k}, \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K c_{\tilde{v}_{ij}^k}, \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K d_{\tilde{v}_{ij}^k} \right), \quad (48)$$

– ARTm – zmodyfikowana średnia arytmetyczna (Shemshadi i inni, 2011; Nadaban i inni, 2016) określona następująco:

$$\tilde{v}_{ij} = \left(\min_k a_{\tilde{v}_{ij}^k}, \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K b_{\tilde{v}_{ij}^k}, \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K c_{\tilde{v}_{ij}^k}, \max_k d_{\tilde{v}_{ij}^k} \right), \quad (49)$$

– GEO – średnia geometryczna (Shih i inni, 2007; Ye, Li, 2009) określona następująco:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{ij} &= \left(\prod_{k=1}^K \tilde{v}_{ij}^k \right)^{\frac{1}{K}} = \\ &= \left(\left(\prod_{k=1}^K a_{\tilde{v}_{ij}^k} \right)^{\frac{1}{K}}, \left(\prod_{k=1}^K b_{\tilde{v}_{ij}^k} \right)^{\frac{1}{K}}, \left(\prod_{k=1}^K c_{\tilde{v}_{ij}^k} \right)^{\frac{1}{K}}, \left(\prod_{k=1}^K d_{\tilde{v}_{ij}^k} \right)^{\frac{1}{K}} \right), \end{aligned} \quad (50)$$

– GEOm – zmodyfikowana średnia geometryczna (Chang i inni, 2009; Hatami-Marbini, Kangi, 2017) określona następująco:

$$\tilde{v}_{ij} = \left(\min_k a_{\tilde{v}_{ij}^k}, \left(\prod_{k=1}^K b_{\tilde{v}_{ij}^k} \right)^{\frac{1}{K}}, \left(\prod_{k=1}^K c_{\tilde{v}_{ij}^k} \right)^{\frac{1}{K}}, \max_k d_{\tilde{v}_{ij}^k} \right). \quad (51)$$

Do oceny zgodności uzyskanych rankingów wariantów decyzyjnych analizowanymi metodami, możemy wykorzystać wskaźnik konkordancji W Kendalla, zwany współczynnikiem zgodności (Cabała, 2010), który jest unormowany w przedziale $[0,1]$. W przypadku całkowitej zgodności przyjmuje on wartość 1, a gdy mamy całkowitą niezgodność wartość 0 lub bliską 0.

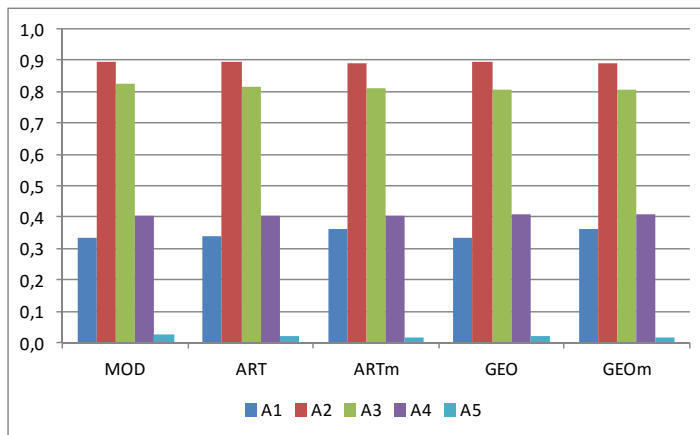
Rezultaty otrzymane za pomocą analizowanych metod, tzn. uzyskane wartości miary syntetycznej oraz rankingi wariantów decyzyjnych prezentuje tabela 14 i rysunek 2. Wynika z nich, że rankingi wariantów decyzyjnych uzyskane wszystkimi rozważanymi metodami są identyczne i mają postać: $A_5 < A_1 < A_4 < A_3 < A_2$, a zatem wartość współczynnika zgodności wynosi $W = 1$.

Tabela 14. PORÓWNANIE WYNIKÓW UZYSKANYCH RÓŻNYMI METODAMI AGREGACJI MACIERZY INDYWIDUALNYCH ZA POMOCĄ MIARY SYNTETYCZNEJ (RANKING WARIANTÓW DECYZYJNYCH)

Wariant decyzyjny	MOD	ART	ARTm	GEO	GEOm
A_1	0,3349 (4)	0,3384 (4)	0,3643 (4)	0,3340 (4)	0,3624 (4)
A_2	0,8932 (1)	0,8961 (1)	0,8921 (1)	0,8948 (1)	0,8912 (1)
A_3	0,8226 (2)	0,8136 (2)	0,8109 (2)	0,8048 (2)	0,8040 (2)
A_4	0,4059 (3)	0,4051 (3)	0,4058 (3)	0,4068 (3)	0,4070 (3)
A_5	0,0239 (5)	0,0197 (5)	0,0146 (5)	0,0237 (5)	0,0174 (5)

Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 2. Porównanie wyników uzyskanych różnymi metodami agregacji macierzy indywidualnych



Źródło: opracowanie własne.

W przykładzie liczbowym (rozdział 5) uzyskany wektor wag określających istotność decydentów miał postać $\lambda = (0,3436; 0,3546; 0,3018)$, co oznacza, że decydent DM_2 ma największy wpływ na macierz grupową, a zatem również na wynik końcowy. Załóżmy, że dokonał on analizy własnej macierzy decyzyjnej i uznał, że oceny drugiego wariantu decyzyjnego względem czwartego i piątego kryterium, tzn. elementy x_{24}^2 i x_{25}^2 , są zawyżone. Dokonał ich korekty, obniżając obie oceny z poziomu BW (bardzo wysoka) o jeden poziom do W (wysokie). Po korekcie zmianie uległ również wektor λ , który teraz ma postać $\lambda = (0,3484; 0,3505; 0,3011)$. Uzyskane wartości miary syntetycznej oraz rankingi

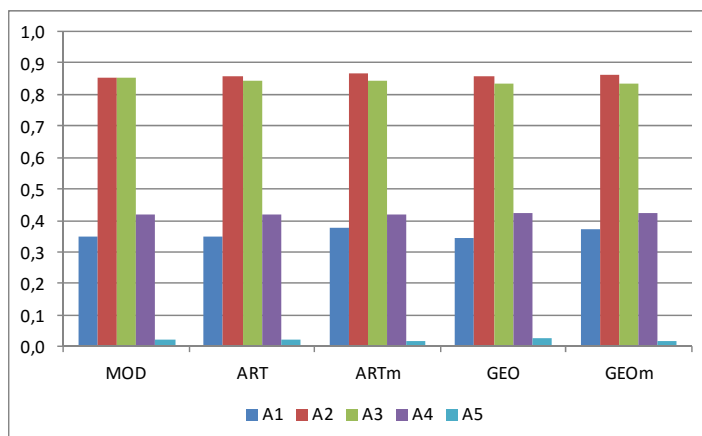
wariantów decyzyjnych prezentuje tabela 15 i rysunek 3. Wynika z nich, że ranking wariantów decyzyjnych wykonany metodą MOD zmienił się i wskazał inny wariant preferowany, natomiast rankingi otrzymane pozostałymi rozważanymi metodami nie uległy zmianie po korekcie. Wartość współczynnika zgodności policzona dla nowej sytuacji wynosi $W = 0,968$.

Tabela 15. PORÓWNANIE WYNIKÓW UZYSKANYCH RÓŻNYMI METODAMI AGREGACJI MACIERZY INDYWIDUALNYCH ZA POMOCĄ MIARY SYNTETYCZNEJ (RANKING WARIANTÓW DECYZYJNYCH) PO KOREKCIE OCEN DOKONANYCH PRZEZ DM_2

Wariant decyzyjny	MOD	ART	ARTm	GEO	GEOm
A_1	0,3471 (4)	0,3503 (4)	0,3751 (4)	0,3463 (4)	0,3737 (4)
A_2	0,8521 (2)	0,8571 (1)	0,8651 (1)	0,8559 (1)	0,8639 (1)
A_3	0,8535 (1)	0,8427 (2)	0,8425 (2)	0,8350 (2)	0,8365 (2)
A_4	0,4208 (3)	0,4194 (3)	0,4213 (3)	0,4218 (3)	0,4231 (3)
A_5	0,0242 (5)	0,0203 (5)	0,0151 (5)	0,0245 (5)	0,0181 (5)

Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 3. Porównanie wyników uzyskanych różnymi metodami agregacji macierzy indywidualnych po korekcie ocen dokonanych przez DM_2



Źródło: opracowanie własne.

7. WNIOSKI

Znaczna część literatury poświęconej grupowemu podejmowaniu decyzji pomija różnice między decydentami zakładając, że mają oni jednakowy wpływ na decyzję końcową (tzn. wagi określające ich istotność są jednakowe). W tej sytuacji do agregacji indywidualnych decyzji (indywidualnych macierzy decyzyjnych) stosowane są zazwyczaj średnia arytmetyczna, geometryczna lub pewne ich modyfikacje.

W pracy zaproponowano modyfikację rozmytej metody TOPSIS dla grupowego podejmowania decyzji, która stanowi alternatywne podejście w stosunku do wspomnianych metod agregacji decyzji indywidualnych. W prezentowanej modyfikacji zróżnicowano wpływ decydentów na wynik końcowy (macierz grupową) i zastosowano do agregacji indywidualnych decyzji średnią ważoną z wagami określającymi istotność poszczególnych decydentów w grupie. Ponieważ w grupie decydenci mogą być zróżnicowani pod wieloma względami, uwzględnienie różnego ich wpływu na decyzję końcową wydaje się zasadne. Przykład liczbowy pokazał, że niewielka korekta ocen jednego z decydentów może doprowadzić do zmiany rankingu wariantów decyzyjnych oraz zamiany wariantu preferowanego.

LITERATURA

- Abdullah L., Adawiyah C. W. R., (2014), Simple Additive Weighting Methods of Multicriteria Decision Making and Applications: A Decade Review, *International Journal of Information Processing and Management*, 5/1, 39–49.
- Behzadian M., Otaghsara S.K., Yazdani M., Ignatius J., (2012), A State of Art Survey of TOPSIS Applications, *Expert Systems with Applications*, 39, 13051–13069.
- Bodily S. E., (1979), A Delegation Process for Combining Individual Utility Functions, *Management Science*, 25, 1035–1041.
- Boran F. E., Genc S., Kurt M., Akay D., (2009), A Multi-Criteria Intuitionistic Fuzzy Group Decision Making for Supplier Selection with TOPSIS Method, *Expert Systems with Applications*, 36, 11363–11368
- Cabała P., (2010), Zastosowanie współczynnika konkordancji w pomiarze zgodności ocen ekspertów, *Przegląd Statystyczny*, 57 (2–3), 36–52.
- Chang C. W., Wu C. R., Lin H. L., (2009), Applying Fuzzy Hierarchy Multiple Attributes to Construct an Expert Decision Making Process, *Expert Systems with Applications*, 36, 7363–7368.
- Chen C. T., (2000), Extensions of the TOPSIS for Group Decision-Making Under Fuzzy Environment, *Fuzzy Sets and Systems*, 114, 1–9.
- Chen X., Fan Z. P., (2006), Study on the Assessment Level of Experts Based on Linguistic Assessment Matrices, *Journal of Systems Engineering*, 24, 111–115.
- Chen X., Fan Z. P., (2007), Study on Assessment Level of Experts Based on Difference Preference Information, *Systems Engineering-Theory & Practice*, 27, 27–35.
- Czogala E., Pedrycz W., (1985), *Elementy i metody teorii zbiorów rozmytych*, PWN, Warszawa.
- French J. R. P. Jr., (1956), A Formal Theory of Social Power, *Psychological Review*, 63, 181–194.
- Hatami-Marbini A., Kangi F., (2017), An Extension of Fuzzy TOPSIS for a Group Decision Making with an Application to Tehran Stock Exchange, *Applied Soft Computing*, 52, 1084–1097.
- Hwang C. L., Yoon K., (1981), *Multiple Attribute Decision Making*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer.
- Jahanshaloo G. R., Hosseinzadeh Lofti F., Izadikhah M., (2006a), An Algorithmic Method to Extend TOPSIS for Decision Making Problems with Interval Data, *Applied Mathematics and Computation*, 175, 1375–1384.
- Jahanshaloo G. R., Hosseinzadeh Lofti F., Izadikhah M., (2006b), Extension of the TOPSIS Method for Decision-Making Problems with Fuzzy Data, *Applied Mathematics and Computation*, 181, 1544–1551.
- Kacprzak D., (2019), A Doubly Extended TOPSIS Method for Group Decision Making Based on Ordered Fuzzy Numbers, *Expert Systems with Applications*, 116, 243–254.
- Kobryń A., (2014), *Wielokryterialne wspomaganie decyzji w gospodarowaniu przestrzenią*, Difin, Warszawa.

- Liu S., Chan F. T. S., Ran W., (2016), Decision Making for the Selection of Cloud Vendor: An Improved Approach Under Group Decision-Making with Integrated Weights and Objective/Subjective Attributes, *Expert Systems with Applications*, 55, 37–47.
- Łuczak A., Wysocki F., (2006), Rozmyta wielokryterialna metoda porządkowania liniowego obiektów, w: Jajuga K., Walesiak M., (red.), *Taksonomia 13, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu*, 1126, AE, Wrocław, 148–158.
- Łuczak A., Wysocki F., (2008), Wykorzystanie rozmytej metody TOPSIS opartej na zbiorach alfa-poziomów do porządkowania liniowego obiektów, w: Jajuga K., Walesiak M., (red.), *Taksonomia 15, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu*, 1297, AE, Wrocław, 337–345.
- Łuczak A., Wysocki F., (2011), Porządkowanie liniowe obiektów z wykorzystaniem rozmytych metod AHP i TOPSIS, *Przegląd Statystyczny*, 53 (1–2), 3–23.
- Nadaban S., Dzitac S., Dzitac I., (2016), Fuzzy TOPSIS: A General View, *Procedia Computer Science*, 91, 823–831.
- Ramanathan R., Ganesh L. S., (1994), Group Preference Aggregation Methods Employed in AHP: An Evaluation and an Intrinsic Process for Deriving Members' Weightages, *European Journal of Operational Research*, 79, 249–265.
- Roszkowska E., (2011), Multi-Criteria Decision Making Models by Applying the TOPSIS Method to Crisp and Interval Data, *Multiple Criteria Decision Making*, 6, 200–230.
- Roszkowska E., (2012), Ocena efektywności decyzji gospodarczych w warunkach ryzyka z wykorzystaniem rozmytej metody TOPSIS, *Optimum. Studia Ekonomiczne*, 6 (60), 3–19.
- Roszkowska E., Kacprzak D., (2016), The Fuzzy SAW and Fuzzy TOPSIS Procedures Based on Ordered Fuzzy Numbers, *Information Sciences*, 369, 564–584.
- Rudnik K., Kacprzak D., (2017), Fuzzy TOPSIS Method with Ordered Fuzzy Numbers for Flow Control in a Manufacturing System, *Applied Soft Computing*, 52, 1020–1041.
- Senvar O., Otay İ., Boltürk E., (2016), Hospital Site Selection via Hesitant Fuzzy TOPSIS, *IFAC-PapersOnLine*, 49, 1140–1145.
- Shemshadi A., Shirazi H., Toreihi M., Tarokh M.J., (2011), A Fuzzy VIKOR Method for Supplier Selection Based on Entropy Measure for Objective Weighting, *Expert Systems with Applications*, 38, 12160–12167.
- Shih H. S., Shyr H. J., Lee E. S., (2007), An Extension of TOPSIS for Group Decision Making, *Mathematical and Computer Modelling*, 45, 801–813.
- Xu Z. S., (2008), Group Decision Making Based on Multiple Types of Linguistic Preference Relations, *Information Sciences*, 178, 452–467.
- Ye F., Li Y. N., (2009), Group Multi-Attribute Decision Model to Partner Selection in the Formation of Virtual Enterprise Under Incomplete Information, *Expert Systems with Applications*, 36, 9350–9357.
- Yue Z., (2011), An Extended TOPSIS for Determining Weights of Decision Makers with Interval Numbers, *Knowledge-Based Systems*, 24, 146–153.
- Zadeh L. A., (1965), *Fuzzy sets*, *Information and Control*, 8, 338–353.

PODWÓJNA ROZMYTA METODA TOPSIS WSPOMAGAJĄCA PODEJMOWANIE DECYZJI GRUPOWYCH

Streszczenie

Dyskretne metody wielokryterialnego wspomaganie decyzji, takie jak TOPSIS, stały się bardzo popularne w ostatnich latach i są często stosowane w rozwiązywaniu wielu problemów życia codziennego. Jednak rosnąca złożoność analizowanych problemów powoduje trudności w rozważaniu wszystkich istotnych

aspektów zagadnienia przez pojedynczego decydenta. W rezultacie wiele problemów życia codziennego jest analizowanych przez grupę decydentów. W takiej grupie każdy z decydentów może specjalizować się w różnych zagadnieniach i mieć unikalne cechy, takie jak wiedzę, umiejętności, doświadczenie, osobowość itp. Sprawia to, że każdy z decydentów powinien mieć różny wpływ na wynik końcowy, tzn. wagi decydentów powinny być różne. Celem pracy jest rozszerzenie rozmytej metody TOPSIS dla grupowego wspomaganie decyzji. Proponowana metoda wykorzystuje metodę TOPSIS dwukrotnie. Pierwszy raz w celu określenia wag decydentów, które dalej posłużą do agregacji macierzy dostarczonych przez decydentów. Bazując na tej zagregowanej macierzy, metoda TOPSIS jest stosowana ponownie do uporządkowania wariantów decyzyjnych i wskazania wariantu końcowego. Przykład liczbowy ilustruje proponowaną modyfikację.

Słowa kluczowe: liczby rozmyte, MCDM, metoda TOPSIS, agregacja

DOUBLY EXTENDED FUZZY TOPSIS METHOD FOR GROUP DECISION MAKING

Abstract

Multiple Criteria Decision Making methods, such as TOPSIS, have become very popular in recent years and are frequently applied to solve many real-life situations. However, the increasing complexity of the decision problems analysed makes it less feasible to consider all the relevant aspects of the problems by a single decision maker. As a result, many real-life problems are discussed by a group of decision makers. In such a group each decision maker can specialize in a different field and has his/her own unique characteristics, such as knowledge, skills, experience, personality, etc. This implies that each decision maker should have a different degree of influence on the final decision, i.e., the weights of decision makers should be different. The aim of this paper is to extend the fuzzy TOPSIS method to group decision making. The proposed approach uses TOPSIS twice. The first time it is used to determine the weights of decision makers which are then used to calculate the aggregated decision matrix for all the group decision matrices provided by the decision makers. Based on this aggregated matrix, the extended TOPSIS is used again, to rank the alternatives and to select the best one. A numerical example illustrates the proposed approach.

Keywords: fuzzy numbers, MCDM, TOPSIS method, aggregation

JEL Codes: C44